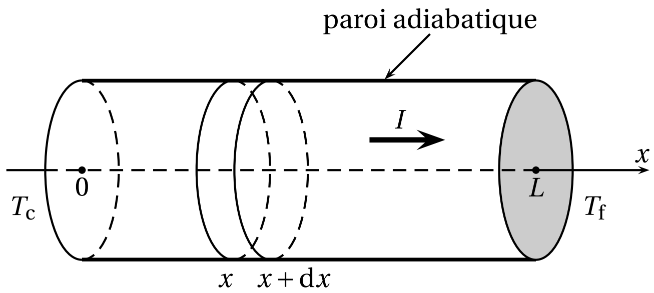
Sujet d'entraînement n° 1 — Phénomènes de transport

Étude de la thermoélectricité

Partie 1 — Effet Joule

On considère un conducteur homogène, cylindrique, d'axe Ox, de section Σ et de longueur L. Il est en contact avec deux sources de chaleur : une source chaude qui impose la température T_c à l'extrémité $x = 0$ et une source froide qui impose la température T_f à l'extrémité $x = L$.
La surface latérale du conducteur est calorifugée.



Ce conducteur est également parcouru par un courant électrique d'intensité I selon l'axe Ox, uniformément réparti sur la section du conducteur.
On note R la résistance électrique du cylindre entre $x = 0$ et $x = L$.
On se place dans le cas du régime stationnaire unidimensionnel : la température est de la forme $T(x)$.
On note λ la conductivité thermique du cylindre, supposée indépendante de la température.

1. Rappeler la loi de Fourier donnant l'expression du vecteur densité de flux thermique $\vec{J}_q(M, t)$.

2. En effectuant un bilan d'énergie pour la portion de conducteur comprise entre x et $x + dx$, établir l'équation différentielle vérifiée par $T(x)$.

3. En déduire l'expression de $T(x)$ en fonction de x, T_c, T_f, λ, Σ, L, R et I.

4. Déterminer l'expression de la puissance thermique $\mathcal{P}_c$ reçue par le conducteur de la part de la source chaude, et la puissance thermique $\mathcal{P}_f$ reçue par le conducteur de la part de la source froide.
Exprimer $\mathcal{P}_c + \mathcal{P}_f$ et commenter le résultat obtenu.

Partie 2 — Forces thermodynamiques

1 Conduction thermique pure

Le conducteur n'est maintenant pas parcouru par un courant électrique : $I = 0$. Le problème est toujours unidimensionnel en régime stationnaire : $T(x)$.

5. Montrer que $\vec{J}_q = J_q(x)\,\vec{e}_x$ est uniforme dans le barreau.

6. Montrer que l'entropie reçue par la tranche comprise entre x et $x + dx$ entre les instants t et $t + dt$ vaut

$$\delta S_e = \left[\frac{J_q}{T(x)} - \frac{J_q}{T(x+dx)}\right]\Sigma\,dt.$$

7. En déduire que l'entropie créée par unité de temps et de volume de matériau s'écrit

$$\sigma = J_q \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{T}\right) = \vec{J}_q \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{T}\right).$$

8. Le barreau, de longueur $L = 10$ cm, est en cuivre de conductivité thermique $\lambda = 400\ \text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. Ses extrémités sont maintenues aux températures $T(x=0) = 293$ K et $T(x=L) = 273$ K.
Calculer numériquement σ au milieu du barreau.

2 Conduction électrique pure

Le même barreau, de conductivité électrique γ, est maintenant parcouru par un courant électrique de vecteur densité de courant $\vec{J_e} = J_e(x)\,\vec{e_x}$ supposé uniforme sur une section droite du barreau.
On se place en régime stationnaire. On note $\vec{E} = E(x)\,\vec{e_x}$ le champ électrique dans le conducteur et $V(x)$ le potentiel électrique. On rappelle la relation locale $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$.
La température T est uniforme dans le barreau.

9. Montrer que $\vec{J_e}$ est uniforme dans tout le conducteur.

10. Calculer la puissance cédée par le champ $\vec{E}$ à la tranche de conducteur comprise entre les sections d'abscisses x et $x + \mathrm{d}x$.

En déduire l'expression de σ, entropie créée par unité de temps et de volume.

11. Mettre σ pour la forme $\sigma = \vec{J_e} \cdot \vec{X_e}$, où $\vec{X_e}$ sera exprimée en fonction de V et T.

12. Le barreau conducteur est parcouru par un courant de 100 mA; sa section vaut $\Sigma = 1\ \mathrm{mm}^2$. Il est constitué de cuivre de conductivité électrique $\gamma = 5{,}9 \times 10^7\ \Omega^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-1}$. La température du barreau vaut $T = 293$ K.

Calculer numériquement σ.

3 Forces thermodynamiques

Soit $\vec{J_i}$ le flux d'une grandeur extensive (énergie thermique pour $\vec{J_q}$, charge électrique pour $\vec{J_e}$). On associe la force thermodynamique $\vec{X_i}$ telle que la production d'entropie par unité de volume et de temps sous l'effet de ce flux s'écrit

$$\sigma = \vec{J_i} \cdot \vec{X_i}.$$

13. D'après l'étude précédente, donner l'expression :

— de la force thermodynamique $\vec{X_q}$ relative à la conduction thermique seule en fonction de T ;

— de la force thermodynamique $\vec{X_e}$ relative à la conduction électrique seule en fonction de V et T.

14. À l'équilibre thermodynamique, le flux $\vec{J_q}$ (respectivement $\vec{J_e}$) est nul.

Montrer que T (respectivement V) est alors uniforme. Que peut-on dire de la force thermodynamique correspondante ?

Pour qu'il y ait transport de chaleur ou de charges, il faut donc être hors d'équilibre : la force thermodynamique $\vec{X}$ n'est alors plus nulle.
Si l'on n'est pas trop loin de l'équilibre, la théorie de la réponse linéaire de Onsager considère que la densité $\vec{J_q}$ (resp. $\vec{J_e}$) est proportionnelle à la force thermodynamique.

Partie 3 — Phénomènes thermoélectriques couplés

Lorsque le milieu est simultanément le siège de phénomènes de conduction électrique et de conduction thermique, on admet que l'entropie créée par unité de temps et de volume de matériau s'écrit

$$\sigma = \vec{J_q} \cdot \vec{X_q} + \vec{J_e} \cdot \vec{X_e}.$$

On parle alors de couplage thermoélectrique. Il est à noter que ce résultat est absolument non trivial, contrairement à ce que l'on pourrait penser.

1 Théorie de la réponse linéaire de Onsager

Dans le cadre d'un couplage thermoélectrique, si l'on n'est pas trop loin de l'équilibre, les densités de courant s'expriment linéairement en fonction des forces thermodynamiques [1] :

$$\begin{cases} \vec{J_q} &= L_{qq}\vec{X_q} + L_{qe}\vec{X_e} \\ \vec{J_e} &= L_{eq}\vec{X_q} + L_{ee}\vec{X_e} \end{cases}$$

avec la relation dite de Onsager $L_{qe} = L_{eq}$.

1. Si vous n'avez pas su établir les expressions des forces thermodynamiques : $\vec{X_q} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\dfrac{1}{T}\right)$ et $\vec{X_e} = -\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V}{T}$.

Les coefficients L_{qq}, L_{ee} et L_{qe} sont des coefficients phénoménologiques. Ceci constitue la théorie de la réponse linéaire mise au point par le physicien norvégien Lars Onsager en 1931, prix Nobel de chimie en 1938.
On se propose de calculer les coefficients de Onsager en fonction des données expérimentales dont on dispose sur le milieu étudié :

— sa conductivité thermique λ ;

— sa conductivité électrique γ ;

— son pouvoir thermoélectrique, ou coefficient Seebeck, ε, défini plus loin.

15. Pour un conducteur à température uniforme, montrer que l'on retrouve la loi d'Ohm locale. En déduire l'expression de L_{ee} en fonction de γ et T.

16. Pour un conducteur où ne circule aucun courant électrique et dont la température n'est pas uniforme, montrer que l'on retrouve la loi de Fourier. En déduire l'expression de la conductivité thermique λ en fonction des coefficients L_{ee}, L_{qq}, L_{qe} et de la température T.
Montrer qu'il existe alors au sein du conducteur un champ électrique $\vec{E}$ tel que

$$\vec{E} = \varepsilon \, \overrightarrow{\text{grad}}\, T$$

où ε est le coefficient de Seebeck. Donner l'expression de ce coefficient ε en fonction de L_{ee}, L_{qe} et T.

17. En déduire l'expression de $\vec{J}_q$ et $\vec{J}_e$ en fonction de λ, ε, γ, T, $\overrightarrow{\text{grad}}\, T$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\, V$.

18. En déduire la relation

$$\vec{J}_q = -\lambda \, \overrightarrow{\text{grad}}\, T + \varepsilon T \vec{J}_e \, .$$

Commenter. On supposera cette relation valable dans toute la suite.

2 Effet Seebeck : mesure de température

L'effet Seebeck est à la base du fonctionnement des thermocouples. Le principe de la mesure d'une température à l'aide d'un thermocouple est indiqué sur la figure I-1 : la jonction (ou soudure) chaude (j) de deux conducteurs A et B de nature différente est portée à la température T_c, tandis que les jonctions de référence (j_1) et (j_2) sont maintenues à la même température de référence $T_{réf}$ prise usuellement à 0 °C.
Entre les jonctions froides, il apparaît une f.é.m. e_{AB} fonction de la différence de température $T_c - T_{réf}$. Cette f.é.m. est comptée positivement si elle a tendance à faire circuler un courant dans le sens de A vers B comme indiqué sur la figure I-1. Pour mesurer cette f.é.m. on réalise en (j_1) et (j_2) deux soudures avec des fils de connexion utilisant un même métal conducteur comme le cuivre.
On mesure la d.d.p. $V_M - V_n$ aux extrémités M et N de ces deux fils pris à la température ambiante T_a à l'aide d'un microvolmètre électronique de très grand impédance.

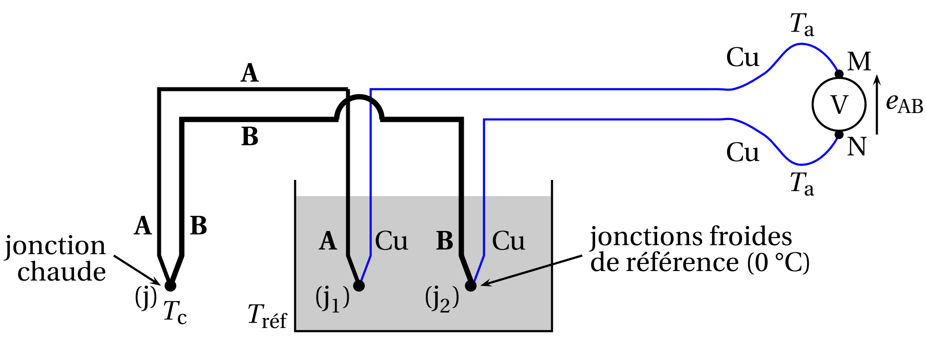


FIGURE I-1 – Thermocouple avec température de référence

19. Comment peut-on réaliser au laboratoire, sous pression atmosphérique normale, une source idéale de chaleur à la température de référence de 0 °C ?

20. On désigne par ε_A, ε_B et ε_{Cu} les coefficients Seebeck respectifs des conducteurs A, B et du cuivre.
Montrer que si le voltmètre est de résistance infinie, on a

$$V_M - V_N = \int_{T_{réf}}^{T_c} (\varepsilon_A - \varepsilon_B)\, dT = e_{AB}$$

dont la valeur ne dépend pas de la température ambiante T_a.

21. On peut en première approximation, et dans un intervalle restreint de température, considérer que e_{AB} est fonction affine de T_c. En réalité e_{AB} n'est en général pas fonction linéaire de l'écart de température. Pour quelle raison ?

22. Application numérique : pour le thermocouple nickel-chrome/nickel-aluminium, dit de type K, que l'on peut utiliser de 0 à 1100 °C, on relève, lorsque les jonctions de référence sont à 0 °C, les valeurs des f.é.m., pour différentes valeurs de T_c :

T	450 °C	500 °C	550 °C
e_{AB}	18513 µV	20640 µV	22772 µV

En déduire la valeur de $\varepsilon_{AB} = \varepsilon_A - \varepsilon_B$.

23. Pour des meures courantes de température, on peut n'utiliser que la soudure chaude à la température T_c et connecter directement les extrémités aux points de connexion du microvoltmètre considérés comme une source froide à la température locale T_f (figure I-2).

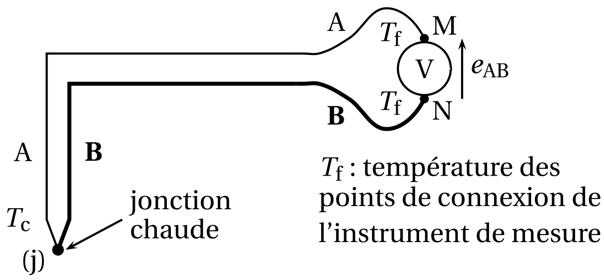


FIGURE I-2 – Thermocouple sans température de référence

Montrer qu'il est alors nécessaire de compenser cette température pour ramener la mesure à la référence 0 °C.
Les progrès réalisés en électronique permettent de disposer d'appareils à affichage numérique à compensation électronique intégrée ; ils affichent directement la température.

3 Effet Peltier

L'effet Peltier est l'effet thermique, autre que l'effet Joule, qui résulte du passage d'un courant électrique à travers une jonction (soudure) entre deux métaux A et B à la même température.

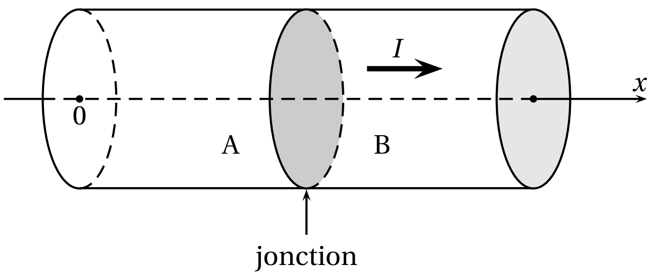


FIGURE I-3 – Effet Peltier à une jonction

24. Quelle est la relation entre $\vec{J}_q$ et $\vec{J}_e$ pour un conducteur à température uniforme ?

Une jonction entre deux conducteurs cylindriques A et B de nature différente est en contact par sa surface latérale avec une source idéale de chaleur. Elle est ainsi maintenue à la température T. Elle est traversée du conducteur A vers le conducteur B par un courant électrique d'intensité I (figure I-3).

25. Montrer que la puissance thermique $\mathcal{P}_P$ reçue à la jonction (c'est-à-dire reçue par le circuit conducteur à travers les sections amont et aval de la jonction supposée de très faible épaisseur) vaut

$$\mathcal{P}_P = \Pi_{AB} I,$$

où Π_{AB} est le coefficient Peltier pour les deux conducteurs A et B. Exprimer Π_{AB} en fonction de la température T et du coefficient Seebeck $\varepsilon_{AB} = \varepsilon_A - \varepsilon_B$ pour les deux conducteurs A et B.

26. Conclure quant au signe de la puissance thermique $\mathcal{P}_P$ dégagée par effet Peltier au niveau d'une jonction parcourue par un courant électrique d'intensité I.