Sujet d'entraînement n° 4 — Diffusion thermique

Étude du contact thermique

1 Réponse d'un milieu semi-infini à un choc thermique

On considère un milieu semi-infini ($x > 0$), de masse volumique ρ et de chaleur massique c, initialement à la température T_0. On y étudie la diffusion thermique dans le cas unidimensionnel : $T(x,t)$.
À l'instant $t = 0$, on impose la température $T(0,0) = T_\mathrm{e}$ à la paroi $x = 0$.
La condition initiale (juste avant le choc thermique) s'écrit $T(x,0) = T_0$.
La réponse du système est étudiée *après un intervalle de temps court* (cette condition est discutée en fin de problème) ; la partie du milieu très loin de la frontière n'étant pas affecté après un temps court, les conditions aux limites s'écrivent $T(0,t) = T_\mathrm{e}$ et $T(\infty,t) = T_0$.
On note λ la conductivité thermique du matériau, ρ sa masse volumique et c sa chaleur massique.

1. Établir l'équation de la diffusion thermique. On introduira la diffusivité thermique $a = \lambda/(\rho c)$ du matériau.

On cherche une solution de l'équation de la chaleur sous la forme $T(x,t) = T(u)$, où l'on a posé

$$u = \frac{x}{2\sqrt{at}}.$$

2. Quelle est la dimension de u (justifier la réponse) ?

3. On pose

$$T^*(u) = \frac{T(u) - T_\mathrm{e}}{T_0 - T_\mathrm{e}}.$$

Quelle est la dimension de cette grandeur ?
Avec la fonction $T^*(u)$, comment s'écrivent :
- la condition initiale $T(x,0) = T_0$?
- la condition à la frontière $T(0,t) = T_\mathrm{e}$?
- la condition à la limite $T(\infty,t) = T_0$?

4. Montrer que l'on a

$$\frac{\mathrm{d}^2 T^*}{\mathrm{d}u^2} + 2u\frac{\mathrm{d}T^*}{\mathrm{d}u} = 0.$$

5. En déduire [1] l'expression de $\dfrac{\mathrm{d}T^*}{\mathrm{d}u}$ à une constante multiplicative près que l'on notera A.

6. On donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
On définit la fonction erreur :

$$\mathrm{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^u \mathrm{e}^{-v^2}\,\mathrm{d}v,$$

avec $\mathrm{erf}(\infty) = 1$ et $\mathrm{erf}(0) = 0$.
Déterminer complètement $T^*(u)$ en fonction de $\mathrm{erf}(u)$.

7. En déduire l'expression de $T(x,t)$ sous la forme d'une intégrale.

1. On pourra poser $f(u) = \dfrac{\mathrm{d}T^*}{\mathrm{d}u}$.

8. Montrer que le vecteur densité de courant thermique s'écrit

$$j_{\text{th}}(x,t) = -(T_0 - T_e)\frac{b}{\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right),$$

où b est un coefficient appelé *effusivité* du matériau, que l'on exprimera en fonction de λ, ρ et c.

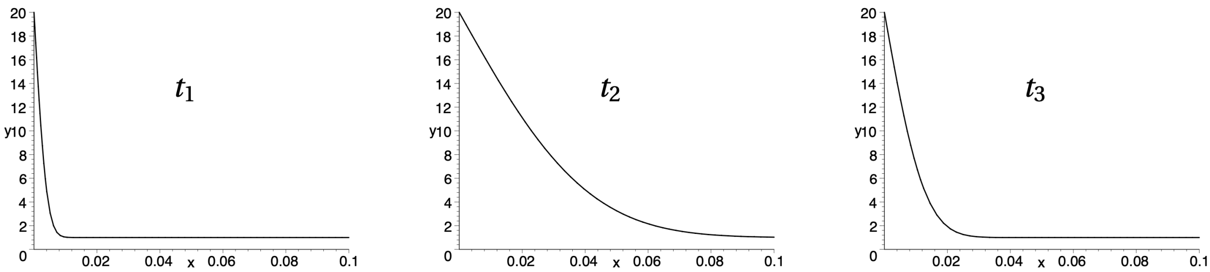
9. Quelle est la profondeur ℓ caractéristique de la diffusion thermique à l'instant t ?

Le milieu n'est pas semi-infini, mais de profondeur L. L'étude menée précédemment décrit la réponse du système pour un « intervalle de temps court ».

Donner une condition sur t pour que le modèle du milieu semi-infini reste valable.

Quelle hypothèse n'est plus valable après un temps plus long ?

On considère un mur de brique de 10 cm d'épaisseur.
Pour la brique à température ambiante, les données sont $\lambda = 0{,}69\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$; $\rho = 1600\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ et $c = 840\ \mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$.
Le mur est initialement à la température $T_0 = 1$ °C, et on applique en $t = 0$ à la face $x = 0$ la température $T_e = 20$ °C.
On représente $T(x,t)$ en fonction de x à différents instants.



10. Classer les dates t_1, t_2 et t_3 par ordre croissant (justifier la réponse).

11. La durée la plus grande parmi les graphes précédents est de 1000 s. La condition établie à la question 8 sur t est-elle vérifiée ? Le modèle du milieu semi-infini est-il valide ?

2 Mise en contact thermique de deux corps

On considère deux corps semi-infinis, notés 1 et 2, initialement aux températures respectives T_{01} et T_{02}, mis brusquement en contact thermiques à l'instant $t = 0$.
On ne s'intéresse à l'évolution du système qu'aussitôt après la mise en contact ; on est alors en droit de considérer les milieux comme semi-infinis, comme on l'a montré dans la première partie.
Chaque corps est caractérisé par sa conductivité thermique λ_i, sa masse volumique ρ_i, sa chaleur massique c_i, sa diffusivité thermique a_i et son effusivité $b_i = \sqrt{\lambda_i \rho_i c_i}$.
Le milieu 1 correspond à $x < 0$ et le milieu 2 à $x > 0$, la surface de contact étant le plan $x = 0$.

12. Par analogie avec la première partie, écrire sans les établir les deux équations aux dérivées partielles vérifiées par $T_1(x,t)$ et $T_2(x,t)$.

13. Que peut-on dire de $T_1(0,t)$ et de $T_2(0,t)$?

14. Que peut-on dire du flux thermique en $x = 0$? Justifiez votre réponse brièvement.

En déduire une relation entre $\dfrac{\partial T_1}{\partial x}(0,t)$ et $\dfrac{\partial T_2}{\partial x}(0,t)$.

15. D'après les conditions initiales, déterminer $T_1(-\infty,t)$, $T_1(x,0)$ pour $x < 0$, $T_2(+\infty,t)$ et $T_2(x,0)$ pour $x > 0$.

Comme lors de l'étude précédente, on pose

$$u_1 = \frac{x}{2\sqrt{a_1 t}} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{x}{2\sqrt{a_2 t}},$$

et [2]

$$T_1^*(u) = \frac{T_1 - T_{01}}{T_{02} - T_{01}} \quad \text{et} \quad T_2^*(u) = \frac{T_2 - T_{02}}{T_{01} - T_{02}}\,.$$

16. Montrer que l'on a

$$\frac{\mathrm{d}^2 T_1^*}{\mathrm{d}u_1^2} + 2u_1 \frac{\mathrm{d}T_1^*}{\mathrm{d}u_1} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}^2 T_2^*}{\mathrm{d}u_2^2} + 2u_2 \frac{\mathrm{d}T_2^*}{\mathrm{d}u_2} = 0\,.$$

17. Comment s'écrivent les conditions initiales et aux limites ?

18. Montrer que l'on a

$$b_1 \frac{\mathrm{d}T_1^*}{\mathrm{d}u_1}(0) + b_2 \frac{\mathrm{d}T_2^*}{\mathrm{d}u_2}(0) = 0\,.$$

19. Montrer que l'on a

$$T_1^*(0) + T_2^*(0) = 1\,.$$

20. L'intégration des équations établies à la question 3.a conduit à

$$\frac{\mathrm{d}T_1^*}{\mathrm{d}u_1} = A_1\, \mathrm{e}^{-u_1^2} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}T_2^*}{\mathrm{d}u_2} = A_2\, \mathrm{e}^{-u_2^2}\,,$$

où A_1 et A_2 sont deux constantes.

En déduire une relation entre b_1, b_2, A_1 et A_2.

21. On définit la fonction erreur complémentaire :

$$\mathrm{erfc}(u) = 1 - \mathrm{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^{\infty} \mathrm{e}^{-v^2}\, \mathrm{d}v\,.$$

Exprimer $T_1^*(u_1)$ et $T_2^*(u_2)$ respectivement en fonction de $\mathrm{erfc}(u_1)$ et $\mathrm{erfc}(u_2)$.

22. Montrer que $A_1 - A_2 = 2/\sqrt{\pi}$.

23. Montrer finalement que

$$\frac{T_1(x,t) - T_{01}}{T_{02} - T_{01}} = \frac{b_2}{b_1 + b_2}\, \mathrm{erfc}\left(\frac{-x}{2\sqrt{a_1 t}}\right)$$

et

$$\frac{T_2(x,t) - T_{02}}{T_{01} - T_{02}} = \frac{b_1}{b_1 + b_2}\, \mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2 t}}\right).$$

24. En déduire la température du point de contact en $x = 0$ en fonction des températures initiales des deux corps T_{01} et T_{02}, et des effusivités b_1 et b_2.

25. Que peut-on dire de la température du point de contact si $b_1 \gg b_2$?

L'effusivité de la peau est $b_\mathrm{p} \approx 1600$ SI, celle du bois $b_\mathrm{b} \approx 11$ SI et celle de l'acier $b_\mathrm{a} \approx 13\,000$ SI. Expliquer la différence de sensation si on touche ($T_\mathrm{peau} = 37$ °C) un morceau de bois ou un morceau d'acier à la même température de 60 °C, peu après le contact.

Que se passe-t-il si l'on garde le contact plus longtemps ?

Ce problème a été écrit à partir de l'ouvrage *Transferts thermique, introduction aux sciences des transferts*, de Jean Taine et Jean-Pierre Petit (éditions Dunod).

2. Ces variables sont choisies de façon à garder la symétrie du problème.