Sujet d'entraînement n° 5

Dynamique des fluides

Physique des vagues (Mines-Ponts PSI 2023)

Les vecteurs sont repérés par des flèches ($\vec{v}$) sauf s'ils sont unitaires; ils sont alors spécifiés par des chapeaux ($\hat{e}_x$). On considère un fluide étudié dans un référentiel galiléen $\{O, \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\}$.

Un point de ce fluide, repéré par le vecteur $\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$, est caractérisé par une masse volumique $\rho(\vec{r}, t)$ et un champ de vitesse $\vec{u}(\vec{r}, t)$. La pression au sein du fluide est notée $p(\vec{r}, t)$. Pour simplifier l'étude, nous supposons que le système est invariant par translation dans la direction $(O, \hat{e}_y)$, de telle sorte que la densité, la pression et la vitesse ne dépendent, en plus du temps, que des deux coordonnées spatiales x et z . En particulier, la vitesse du fluide dans la direction y est nulle.

Pour établir les équations qui permettront de décrire les vagues de surface, nous procéderons par étapes. Dans un premier temps, nous établirons les équations générales décrivant le champ de vitesse du fluide accompagnées des conditions aux limites particulières du problème. Nous chercherons, dans un second temps, la solution qui décrit les vagues en nous limitant aux régimes des faibles vitesses et des faibles amplitudes.

1 — Les équations de la vague linéaire

□ 1 — En faisant un bilan de matière dans un petit volume $d\tau = dx dy dz$ pendant un temps élémentaire dt , établir la loi de conservation de la matière reliant $\rho(x, z, t)$, $u_x(x, z, t)$ et $u_z(x, z, t)$, où $u_x = \vec{u} \cdot \hat{e}_x$ et $u_z = \vec{u} \cdot \hat{e}_z$.

□ 2 — Dans le cas où le fluide est incompressible, démontrer que cette relation devient simplement

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

On suppose dorénavant que l'écoulement est irrotationnel, c'est-à-dire que $\text{rot}(\vec{u}) = \vec{0}$.

Cette hypothèse permet de définir un potentiel des vitesses $\phi(x, z, t)$ associé au champ de vitesse et qui vérifie $\vec{u} = \text{grad}(\phi)$.

□ 3 — Montrer que le potentiel des vitesses vérifie l'équation de Laplace

$$\Delta\phi = 0.$$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à une particule de fluide de volume infinitésimal $d\tau$ permet d'établir une équation décrivant la dynamique du fluide.

Dans le cadre de cette description, la dérivée totale d'un champ scalaire quelconque $A(x, z, t)$ par rapport au temps s'écrit

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \vec{u} \cdot \text{grad} A.$$

Par conséquent, en négligeant les effets de viscosité dans le fluide et en supposant que le mouvement du fluide est irrotationnel, le principe fondamental de la dynamique dans un champ de pesanteur $\vec{g} = g\hat{e}_z$ s'écrit

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad}(\vec{u} \cdot \vec{u}) \right] = -\rho g \hat{e}_z - \text{grad}(p). \quad (1)$$

Cette relation est appelée équation d'Euler en mécanique des fluides. Le terme de gauche désigne l'accélération de la particule de fluide, prenant en compte en particulier la dérivée particulière; le premier terme de droite désigne la force de pesanteur, et le dernier terme désigne la contribution des forces de pression.

□ 4 — Montrer que la relation d'Euler permet d'écrire l'équation suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{u} \cdot \vec{u} + gz + \frac{p}{\rho} = f(t)$$

où $f(t)$ est une fonction que l'on ne cherchera pas à déterminer mais qui ne dépend que du temps.

Quel résultat classique retrouve-t-on dans le cas d'un écoulement stationnaire?

Nous admettrons par la suite qu'il est possible de choisir une fonction $f(t) = f_0$ qui est indépendante du temps sans perte de généralité. On choisit $f_0 = p_0/\rho$, où p_0 est la pression atmosphérique immédiatement au-dessus de la surface du fluide. Nous supposons que la pression atmosphérique est constante dans l'espace et dans le temps.

À ce stade, il est possible de spécifier quelques conditions aux limites du problème.

Le fluide est contenu dans un réservoir. La surface libre du fluide est caractérisée par un profil de hauteur $z = \eta(x, t)$. Le fond du réservoir est situé à une altitude $z = -H$, de telle sorte que le plan $z = 0$ correspond à la surface du fluide au repos, sans présence de vague. La vitesse du fluide dans la direction verticale est nulle sur le fond du réservoir :

$$u_z(x, z = -H, t) = \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=-H} = 0. \quad (2)$$

□ 5 — Montrer que, sur la surface libre $z = \eta(x, t)$, on a la relation

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (3)$$

□ 6 — Déterminer l'expression de la pression $p(x, z = \eta, t)$ à la surface du fluide.

En déduire une seconde condition de surface libre :

$$\eta = -\frac{1}{g} \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{z=\eta} - \left. \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2g} \right|_{z=\eta}. \quad (4)$$

Il n'est généralement pas possible de résoudre de façon générale les équations de la dynamique des fluides (ici conservation de la matière et Euler) avec les conditions aux limites discutées dans les questions précédentes.

Il est cependant possible de linéariser ces équations et ces conditions aux limites. On se place pour cela dans une limite de faible vitesse et de faible amplitude pour une vague de surface. Les premiers travaux en ce sens ont été menés par Joseph-Louis Lagrange dès le XIII^e siècle.

Sous ces hypothèses, on peut linéariser les conditions de surface libre (3) et (4) qui deviennent

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0} \quad \text{et} \quad \eta = -\frac{1}{g} \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{z=0}$$

et qui sont écrites sur la position de la surface libre au repos.

Pour trouver une solution décrivant la dynamique du fluide sous l'hypothèse de faible vitesse et faible amplitude, il ne reste plus qu'à trouver un potentiel de vitesse solution de l'équation de Laplace et satisfaisant ces conditions aux limites du problème. Pour ce faire, on utilise la méthode de séparation des variables en cherchant cette solution sous la forme $\phi(x, z, t) = X(x, t)Z(z)$.

□ 7 — Montrer que les fonction $X(x, t)$ et $Z(z)$ sont solution du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\mu X \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} = \mu Z \end{cases}$$

où μ est une constante qui ne dépend ni des coordonnées spatiales ni du temps.

On peut montrer par des arguments de symétrie que $\mu > 0$.

La solution $X(x, t)$ est alors de forme sinusoïdale comme il est possible de s'y attendre dans le cadre d'un modèle de vague se propageant le long de la direction x .

Pour la fonction définissant la surface libre du fluide, nous choisirons une forme d'onde plane progressive $\eta(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$ de nombre d'onde k , de pulsation ω et d'amplitude A , constante.

□ 8 — En utilisant l'une des conditions de surface au repos montrer que les expressions

$$X(x, t) = \sin(kx - \omega t) \quad \text{et} \quad \left. \frac{dZ}{dz} \right|_{z=0} = \gamma = \text{cste}$$

résolvent le problème. On exprimera la constante γ en fonction de A et ω .

□ 9 — En utilisant les résultats précédents complétés par la condition (2) au fond du réservoir, montrer qu'alors

$$Z(z) = \zeta \frac{\cosh[k(z+H)]}{\sinh(kH)}$$

où l'on exprimera la constante ζ en fonction de A , ω et k . La solution totale correspondante $\phi(x, z, t) = X(x, t)Z(z)$ sera appelée par la suite « vague linéaire ».

□ 10 — En utilisant la condition de surface au repos non encore utilisée, établir la relation de dispersion de l'onde entre ω , g , k et la tangente hyperbolique de kH .

□ 11 — Calculer la vitesse de phase v_ϕ de la vague linéaire.

Déterminer les deux expressions limites de v_ϕ lorsque la profondeur H du réservoir est petite ou grande devant la longueur d'onde de la vague linéaire. On commentera les expressions obtenues.

□ 12 — Déterminer l'expression de la vitesse de groupe v_g de la vague linéaire en profondeur arbitraire.

Montrer la relation $v_g = \frac{v_\phi}{n} [1 + nkH / \sinh(2kH)]$ où n est un entier que l'on déterminera.

En déduire les valeurs extrêmes du rapport v_g / v_ϕ .

Au sein du fluide on considère deux vagues linéaires de même amplitude, mais de nombre d'onde et de pulsation distinctes : $\eta_1 = A \cos(k_1 x - \omega_1 t)$ et $\eta_2 = A \cos(k_2 x - \omega_2 t)$.

□ 13 — Montrer que la vague résultante (surface du fluide) peut se mettre sous la forme $\eta(x, t) = 2A \cos(kx - \omega t) \cos(k'x - \omega't)$. On donnera l'expression des 4 paramètres $k < k'$ et $\omega < \omega'$ en fonction de k_1 , k_2 , ω_1 et ω_2 .

Tracer le profil de cette vague résultante à un instant t fixé en représentant les longueurs d'onde $\lambda = 2\pi/k$ et $\lambda' = 2\pi/k'$ sur la même schéma.