Sujet d'entraînement n° 6 — Mécanique

Partie I — L'atome d'hydrogène

L'atome d'hydrogène, dans son état fondamental, absorbe ou émet un rayonnement électromagnétique de longueur d'onde $\lambda = 21$ cm. Cette transition, appelée raie HI à 21 cm, est celle du maser à hydrogène. Elle est aussi à l'origine du rayonnement émis à cette longueur d'onde par le milieu interstellaire constitutif des galaxies.
Un atome d'hydrogène protoné (isotope ^{1}H dont le noyau est un proton) dans son état fondamental peut absorber un rayonnement électromagnétique de longueur d'onde $\lambda = 21$ cm, c'est ce que l'on appelle usuellement la raie HI à 21 cm. Pour interpréter exactement l'origine de cette raie, il faut mener une étude complète de l'atome d'hydrogène dans le cadre de la théorie de Dirac (mécanique quantique relativiste).

1 Étude classique de l'atome d'hydrogène

L'étude qui suit sera menée dans le référentiel $\mathcal{R}$ centré sur le proton, ce référentiel sera considéré comme galiléen. On désignera par r la distance entre le proton et l'électron et le moment cinétique de l'électron par rapport à l'origine dans le référentiel $\mathcal{R}$ sera noté $\overrightarrow{L}$.

1. Rappeler l'expression de la force électrostatique $\overrightarrow{F}$ s'exerçant sur l'électron.

2. En déduire l'expression de l'énergie potentielle électrostatique E_p de l'électron, en choisissant le zéro de cette énergie potentielle quand $r \to \infty$.

3. Montrer que le mouvement de l'électron est plan.

4. Déterminer l'énergie mécanique E de l'électron et la mettre sous la forme

$$E = \frac{1}{2} m_\mathrm{e} \dot{r}^2 + E_\mathrm{p,eff}(r)$$

où $E_\mathrm{p,eff}(r)$ est une fonction de r à expliciter en fonction des paramètres du problème et du moment cinétique orbital $\overrightarrow{L}$ de l'électron.

5. Donner l'allure de la représentation graphique de $E_\mathrm{p,eff}(r)$. Analyser qualitativement le comportement du système pour différentes valeurs de l'énergie mécanique E et du moment cinétique $\overrightarrow{L}$.

6. À quelles conditions (sur L et E) une orbite circulaire est-elle possible ? Calculer le rayon r de l'orbite circulaire et l'énergie mécanique E de l'électron décrivant une telle orbite en fonction de L, e, m_e et ε_0.

7. Dessiner une trajectoire de l'électron si $L = 0$.

2 Le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

En 1913 Niels Bohr proposa un modèle « semi-classique » de l'atome d'hydrogène, dans ce modèle l'électron se trouve sur une orbite circulaire de rayon r et son moment cinétique orbital L est quantifié par

$$L = n\frac{h}{2\pi} = n\hbar,$$

où n est un nombre entier strictement positif et h la constante de Planck.

8. Montrer que les orbites sont quantifiées. Déterminer la valeur du rayon a_0 de la première orbite de Bohr.

9. En déduire que les niveaux d'énergie sont quantifiés. Donner la valeur (en eV) de l'énergie de l'état fondamental.

10. À quelle température l'énergie d'agitation thermique d'un atome d'hydrogène est-elle comparable à son énergie d'ionisation ?
Commenter.

11. L'atome d'hydrogène dans son état fondamental est susceptible d'absorber ou d'émettre un rayonnement de longueur d'onde proche de $\lambda = 21$ cm. Le modèle de Bohr permet-il de comprendre l'origine de cette transition ?

Données numériques

Constante de Planck	$h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J·s
Constante de Planck réduite	$\hbar = 1{,}054 \times 10^{-34}$ J·s
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3{,}00 \times 10^{8}$ m·s^{-1}
Permittivité du vide	$\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$ F·m^{-1}
Charge élémentaire	$e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C
Masse de l'électron	$m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg
Constante de Boltzmann	$k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J·K^{-1}

Partie II — Satellite SMOS

Le satellite SMOS est en mouvement circulaire autour de la Terre (masse $M_T \approx 6 \times 10^{24}$ kg, $R_T \approx 6400$ km) à une altitude h d'environ 700 km.

1. Quelles sont les affirmations fausses ?

A) Le moment cinétique du satellite se conserve.

B) Le satellite est soumis à un champ de force centrale.

C) Le mouvement du satellite s'effectue dans un dans plan.

D) Le mouvement du satellite s'effectue obligatoirement dans le plan équatorial.

2. Exprimer puis calculer la période de révolution T de SMOS. On donne la valeur approximative de la constante de Newton $G \approx 7 \times 10^{-11}$ N·m^2·kg^{-2}.

A) $T = \left[\dfrac{4\pi^2}{GM_T}(R_T + h)^3\right]^{1/2}$

B) $T = \left[\dfrac{4\pi^2}{GM_T}(R_T + h)^2\right]^{1/3}$

C) $T \approx 60$ s

D) $T \approx 6000$ s

3. Exprimer la vitesse de satellisation v_s (vitesse sur une orbite circulaire) de SMOS.

A) $v_s = \dfrac{GM_T}{R_T + h}$

B) $v_s = \left(\dfrac{GM_T}{R_T + h}\right)^{1/2}$

C) $v_s = \dfrac{GM_T}{h}$

D) $v_s = \left(\dfrac{GM_T}{h}\right)^{1/2}$

4. Calculer v_s puis déterminer la vitesse de libération v_ℓ de SMOS.

A) $v_s 7$ km·s^{-1}

B) $v_s \approx 7000$ km·h^{-1}

C) $v_\ell = 2v_s$

D) $v_\ell = \sqrt{2}v_s$

5. Quelle serait l'altitude h de SMOS si son orbite était géostationnaire ?

A) $h \approx 3600$ km

B) $h \approx 360\,000$ km

C) $h \approx 36\,000$ km

D) $h \approx 42\,000$ km

6. Par quelles relations l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ de SMOS est-elle reliée à son énergie cinétique $\mathcal{E}_k$ et à son énergie potentielle $\mathcal{E}_p$?

A) $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_k = \mathcal{E}_p$

B) $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_k = \mathcal{E}_p$

C) $\mathcal{E}_m = -\mathcal{E}_k = \mathcal{E}_p/2$

D) On ne peut rien dire *a priori*.

Partie III — Trajectoire d'un volant de badminton

Le badminton est un sport dans lequel les joueurs frappent un projectile, appelé volant, à l'aide d'une raquette. Le but de ce problème est de proposer une modélisation simplifiée de la trajectoire du volant sous l'effet conjugué de la pesanteur et de la résistance de l'air, et de confronter le modèle aux résultats d'une expérience. On négligera la poussée d'Archimède dans tout le problème.
On néglige dans un premier temps la force de freinage exercée par l'air.

1. On lance depuis le sol le volant de masse m avec une vitesse initiale U_0, dans une direction faisant un angle θ_0 avec le plan du sol, supposé horizontal. Quelle est la nature de la trajectoire ? Dessiner son allure. Déterminer la portée L_0 (distance horizontale à laquelle le volant retombe sur le sol) en fonction de U_0, de θ_0 et de l'accélération de la pesanteur g.

2. Validez dimensionnellement l'expression de L_0 obtenue et vérifiez-là sur des cas limites simples que vous choisirez.

3. La vitesse initiale étant fixée, quel angle θ_0 permet d'envoyer le volant le plus loin possible ?

On tient maintenant compte du freinage de l'air, modélisé en assimilant le volant à une sphère solide en mouvement dans un fluide newtonien. On écrit la force de freinage sous la forme $\vec{F} = -\frac{1}{2}\rho S C_x U \vec{U}$, où $\vec{U}$ est la vitesse du volant et U sa norme, ρ la masse volumique de l'air, S la surface de référence du volant et C_x le coefficient de traînée.

4. Déterminer la dimension de C_x.

5. Écrire l'équation du mouvement du volant. Montrer qu'elle admet une solution particulière, correspondant à un mouvement rectiligne uniforme dont on exprimera la vitesse, notée U_∞, en fonction des paramètres du problème.

6. Récrire l'équation du mouvement en faisant notamment apparaître le rapport $\vec{U}/U_\infty$.

7. À quelle condition sur U peut-on négliger la pesanteur ? On suppose dans toute la suite du problème que cette condition est initialement vérifiée. Dans ce cas, quelle est la nature de la trajectoire ? Intégrer l'équation du mouvement pour obtenir U en fonction du temps.

8. En utilisant cette expression, déterminer et calculer le temps $t_{1/2}$ pour lequel la vitesse est égale à la moitié de la vitesse initiale. Repérer le point correspondant sur la chronophotographie de la figure 1. Vérifier, par une mesure que l'on expliquera, que la vitesse en ce point est bien approximativement la moitié de la vitesse initiale.

9. Toujours dans le cadre de l'approximation de la question 7, déterminer l'expression donnant la distance horizontale $x(t)$ parcourue au temps t.

10. Obtenir x en fonction de U.

11. On suppose que l'approximation de la question 7 cesse d'être valable lorsque la composante verticale de la force de freinage est égale au poids. Quelle est l'expression de U à cet instant ? En déduire la distance horizontale parcourue L.

On modélise la trajectoire du volant en distinguant trois régimes successifs : (1) le régime que l'on vient d'étudier, durant lequel l'accélération de la pesanteur est négligeable ; (2) un régime intermédiaire ; (3) un régime limite durant lequel l'accélération du volant est négligeable.

12. Localiser sur la chronophotographie le régime limite ainsi défini, en justifiant précisément votre réponse.

13. Une approximation de la trajectoire consiste à oublier la partie correspond au régime intermédiaire. Dessiner la trajectoire obtenue dans cette approximation.

14. Donner l'expression littérale de la portée du tir dans cette approximation. Comment se compare-t-elle à la portée en l'absence de freinage, déterminée à la question 1 ?

15. Estimer numériquement la portée du tir. Comparer le résultat avec la valeur indiquée sur la chronophotographie.

16. Durant le régime intermédiaire, tous les termes de l'équation du mouvement sont du même ordre de grandeur. En déduire, par un argument dimensionnel, une expression littérale de l'ordre de grandeur de la distance parcourue lors du régime intermédiaire. Dans quelle limite l'approximation faite à la question 13 est-elle justifiée ?

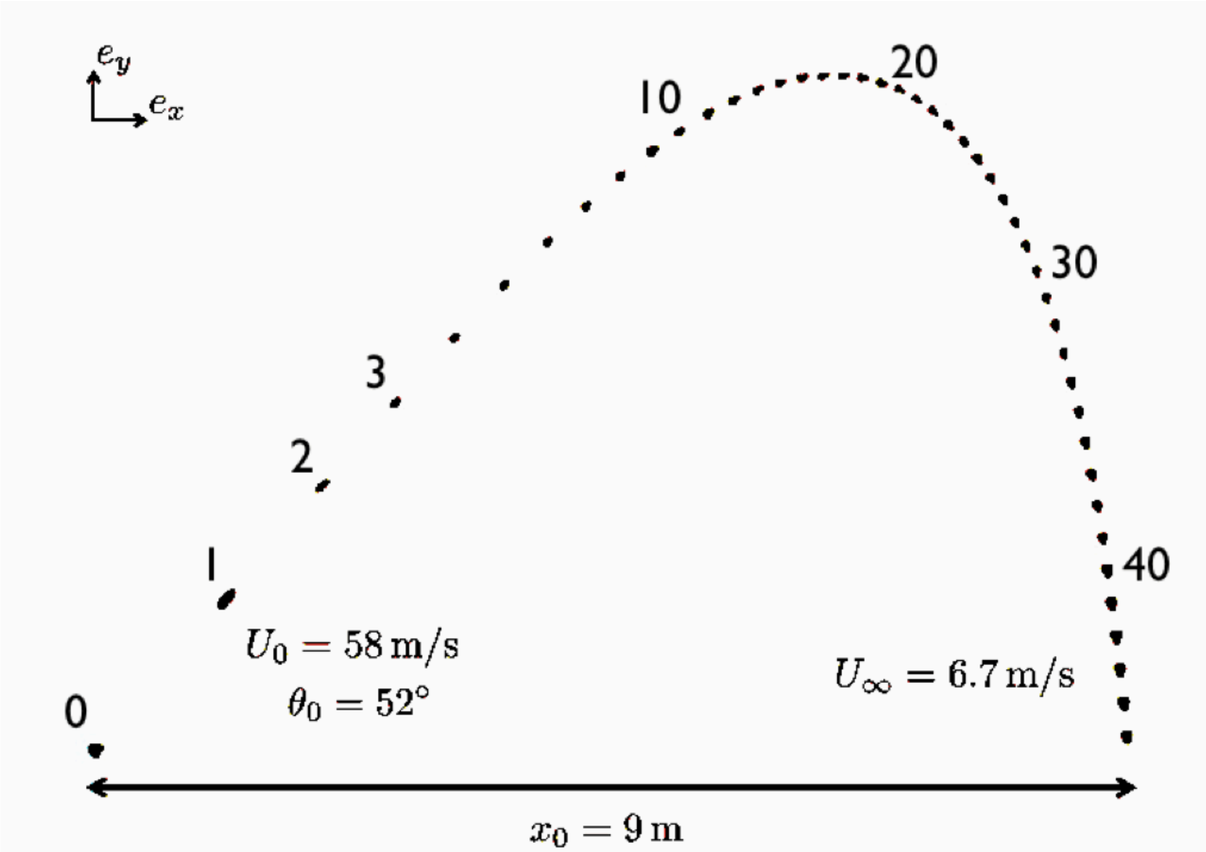

FIGURE 1 – Positions successives d'un volant de badminton allant de la gauche vers la droite, enregistrées toutes les 50 ms. Le premier point, repéré par le chiffre 0, correspond au lancer $t = 0$.

17. Comment faudrait-il modifier les paramètres de l'expérience pour que la trajectoire corresponde plus précisément à celle obtenue à la question 13 ? On discutera suivant la vitesse initiale et la nature du projectile. La convergence vers cette solution est-elle plutôt rapide ou lente ?

18. Donner les expressions littérales des temps de montée et de descente du volant. Estimer, par un argument dimensionnel, l'ordre de grandeur littéral de la durée du régime intermédiaire. Comparer les durées de ces trois régimes dans la limite où l'approximation de la question 13 s'applique.

Partie IV — Pendule asymétrique

1. Un pendule simple de masse m et de longueur ℓ oscille, dans le plan vertical Oxy, autour d'une liaison pivot parfaite d'axe Oz, sous l'action du champ de pesanteur g supposé uniforme. On note θ l'angle que fait le pendule avec la verticale. Les frottements sont négligés. Le référentiel d'étude, supposé galiléen, est celui du laboratoire. On désigne par $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ les vecteurs de base du repère cartésien $Oxyz$. Exprimer le moment cinétique $\vec{L}_0$ au point O du pendule :

A) $\vec{L}_O = m\ell^2\dot{\theta}^2\vec{e}_z$ **B)** $\vec{L}_O = m\ell^2\dot{\theta}\vec{e}_x$ **C)** $\vec{L}_O = m\ell\dot{\theta}^2\vec{e}_z$ **D)** $\vec{L}_O = m\ell\dot{\theta}\vec{e}_z$

2. En notant ω_0 une constante, quelle est l'équation différentielle du mouvement des petites oscillations et la période propre de ces dernières ?

A) $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ **B)** $\ddot{\theta} - \omega_0^2\theta = 0$ **C)** $T_0 = 2\pi\left(\dfrac{\ell}{g}\right)^{1/2}$ **D)** $T_0 = 2\pi\left(\dfrac{g}{\ell}\right)^{1/2}$

On rend le pendule asymétrique en fixant un clou K situé à 30 cm en dessous du point O (cf. figure 2). Ainsi, à gauche de la verticale OK, le pendule se balance selon une rotation du tronçon OA_g du fil autour de O ; à droite, c'est le tronçon KA_d, de longueur ℓ_d, qui tourne autour de K.
On note $\theta_g = (\vec{e}_x, \overrightarrow{KA_g})$ l'angle que forme le pendule avec la verticale à gauche de OK ; $\theta_d = (\vec{e}_x, \overrightarrow{KA_d})$ représente l'angle des oscillations à droite de OK.

3. Déterminer l'énergie mécanique $E_{m,g}$ pour les oscillations à gauche, puis l'équation différentielle du mouvement correspondant.

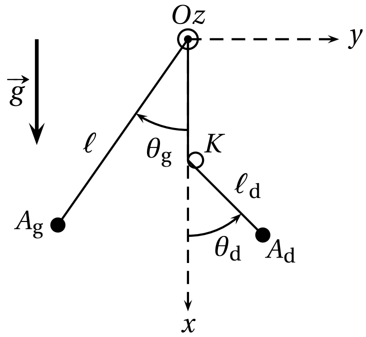

FIGURE 2 – Pendule asymétrique

A) $E_{m,g} = \dfrac{m\ell^2\dot{\theta}_g^2}{2} + mg\ell\cos\theta_g$

B) $E_{m,g} = \dfrac{m\ell^2\dot{\theta}_g^2}{2} - mg\ell\cos\theta_g$

C) $\ddot{\theta}_g + \dfrac{g}{\ell}\sin\theta_g = 0$

D) $\ddot{\theta}_g + \dfrac{g}{\ell}\theta_g = 0$

4. Déterminer l'énergie mécanique $E_{m,d}$ pour les oscillations à droite, puis l'équation différentielle du mouvement correspondant.

A) $E_{m,d} = \dfrac{m\ell_d^2\dot{\theta}_d^2}{2} - mg\ell_d\cos\theta_d - mg(\ell-\ell_d)$

B) $E_{m,d} = \dfrac{m\ell_d^2\dot{\theta}_d^2}{2} - mg(\ell-\ell_d)\cos\theta_d$

C) $\ddot{\theta}_d + \dfrac{g}{\ell_d}\sin\theta_d = 0$

D) $\ddot{\theta}_d + \dfrac{g}{\ell_d}\theta_d = 0$

5. Pour des mouvements de faible amplitude angulaire, estimer la période d'une oscillation complète (aller-retour) du pendule.

A) $T = \pi\left[\left(\dfrac{\ell}{g}\right)^{1/2} + \left(\dfrac{\ell_d}{g}\right)^{1/2}\right]$

B) $T = 2\pi\left[\left(\dfrac{\ell}{g}\right)^{1/2} + \left(\dfrac{\ell_d}{g}\right)^{1/2}\right]$

C) $T = 2\pi\left(\dfrac{\ell+\ell_d}{g}\right)^{1/2}$

D) $T = 2\pi\left(\dfrac{\ell-\ell_d}{g}\right)^{1/2}$

6. On s'intéresse aux hauteurs maximales atteintes par le pendule et aux amplitudes angulaires, à gauche et à droite. Cocher la ou les bonnes réponses correctes parmi les affirmations proposées ci-dessous.

A) Les hauteurs maximales et les amplitudes angulaires sont les mêmes.

B) Les hauteurs maximales sont différentes mais les amplitudes angulaires sont identiques.

C) Les hauteurs maximales sont les mêmes mais les amplitudes angulaires sont différentes.

D) Les hauteurs maximales et les amplitudes angulaires sont différentes.