# Sujet d'entraînement n° 8 — Ondes

## Télécommunications — d'après Mines-Ponts PSI 2021

Pour toutes les applications numériques, repérées par les initiales A.N., on se contentera d'un ou deux chiffres significatifs. À l'exception de i tel que $i^2 = -1$, les nombres complexes sont repérés par une notation avec barre : $\overline{z} \in \mathbf{C}$. Une grandeur sinusoïdale de pulsation $\omega$ sera associée à la représentation $e^{i\omega t}$.

### 1 Le fil du télégraphe

— Sire, une nouvelle dépêche.

— D'où vient-elle ?

— De Tomsk.

— Le fil est coupé au-delà de cette ville ?

— Il est coupé depuis hier.

— D'heure en heure, général, fais passer un télégramme à Tomsk, et que l'on me tienne au courant.

Dans le roman de JULES VERNE, *Michel Strogoff*, publié en 1876, l'année même de la fondation à Paris de l'École Supérieure de Télégraphie (actuellement Télécom Paris), les télécommunications électriques (le télégramme) jouent, dès la première page, un rôle essentiel.

**1.** L'alphabet cyrillique utilisé par Michel Strogoff comporte 32 lettres, plus les chiffres et quelques symboles de ponctuation. Combien de symboles binaires (les bits ou les points et traits du code MORSE) faut-il prévoir pour coder chaque caractère d'un document écrit en cyrillique contenant du texte, des chiffres et de la ponctuation ?

A.N. : sachant qu'un opérateur compose 3 symboles binaires par seconde, combien de temps faudra-t-il pour transmettre une page complète de texte comme celle-ci par exemple ? On détaillera l'évaluation proposée.

Le premier télégraphe électrique terrestre a été mis en service en 1838 par WHEATSTONE en Angleterre et le premier câble sous-marin posé en 1851 entre la France et l'Angleterre. La suite de ce sujet explore quelques propriétés de la transmission d'informations le long d'un tel fil électrique.

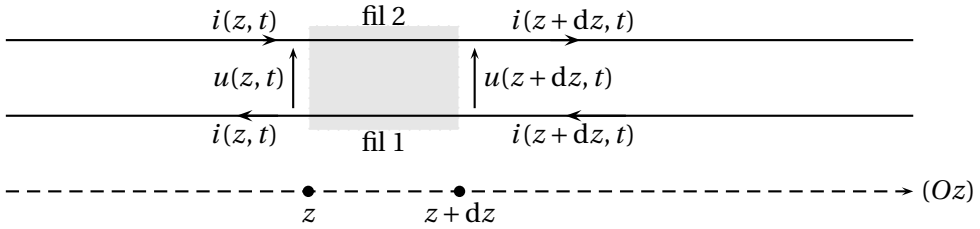


FIGURE 1 – Modèle de la ligne bifilaire

### 2 Transmission par une ligne bifilaire

Le modèle électrique d'une ligne télégraphique est représenté figure 1 : la transmission a lieu dans le sens de l'axe $(Oz)$ et un élément de ligne de longueur $\mathrm{d}z$ transmet la tension aux bornes de la ligne $u(z,t)$ et le courant de ligne $i(z,t)$ selon les équations des télégraphistes, $R_0$, $\ell_0$ et $\chi_0$ étant des constantes positives :

$$-\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{R_0}{\chi_0}\frac{\partial i}{\partial t} + \frac{R_0}{\ell_0} i(z,t) \quad \text{et} \quad -\frac{\partial i}{\partial z} = \frac{1}{R_0\chi_0}\frac{\partial u}{\partial t}.$$

**2.** Déterminer les unités usuelles des grandeurs $R_0$, $\chi_0$ et $\ell_0$.

**3.** Dans le cas du télégraphe terrestre du XIX^e^ siècle, l'installation comportait en général un seul fil tendu sur des poteaux. Le modèle de transmission par ligne bifilaire reste-il applicable ? Expliquer.

**4.** Déterminer l'équation aux dérivées partielles (équation de propagation) vérifiée par la seule fonction $u(z,t)$, puis l'équation de dispersion associée reliant la pulsation $\omega$ au nombre d'onde $\overline{k}$.

Ici et dans toute la suite, on étudie une ligne bifilaire permettant le transport du signal sur une assez grande distance ; les phénomènes limitant la propagation seront donc traités comme une perturbation et leur étude limitée au premier ordre du développement.

**5.** Les phénomènes limitant la propagation sont-ils représentés par la partie réelle ou la partie imaginaire de $\underline{k}$ ? Justifier ?

**6.** En déduire la vitesse de phase des ondes de courant et de tension. Y a-t-il dispersion à cet ordre du développement ?

**7.** On considère une onde de tension progressant le long de l'axe $(Oz)$ caractérisée par $u(z=0,t) = U_0\cos(\omega t)$.
Exprimer l'onde de tension $\underline{u}(z,t)$ et l'onde de courant $\underline{i}(z,t)$ associée.
Montrer que la puissance électrique moyenne [1] $\mathcal{P}_\text{m}(z)$ transportée par la ligne décroît lors de la propagation et déterminer la distance caractéristique de cette atténuation.

## 3 Câble coaxial

Depuis l'installation de lignes télégraphiques sousmarines, l'obligation d'isoler la ligne conduit à utiliser une forme géométrique particulière : le câble est coaxial, formé d'une armature centrale métallique formant un cylindre de rayon $a$, entouré d'une gaine isolante et d'un second câble métallique de rayon $b > a$. Les photographies de la figure 2 représentent les extrémités dénudées de deux câbles de ce type qui relient la télévision à l'antenne ; quelques éléments de la fiche technique du plus performant des deux sont repris dans la table 1.
Un tel câble est d'abord modélisé comme un milieu continu sans pertes caractérisé par une inductance linéique $l_\text{u}$ et une capacité linéique $c_\text{u}$.

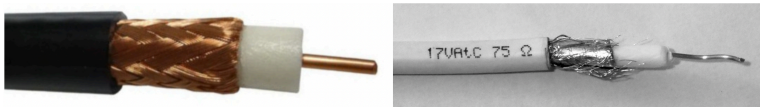


FIGURE 2 – Câble coaxial professionnel (à gauche) et bas de gamme (à droite)

| | | | |
|---|---|---|---|
| Conducteur interne : | cuivre, ⌀1,6 mm | Impédance : | 75 Ω |
| Isolant : | polyéthylène, ⌀7,2 mm | Capacité nominale : | 53 pF · m$^{-1}$ |
| Tresse externe : | cuivre, couverture > 95 % | Inductance nominale : | 0,32 µH · m$^{-1}$ |
| Gaine : | polyéthylène | Résistance nominale câble : | 8,5 Ω · km$^{-1}$ |
| Délai : | 4,0 ns · m$^{-1}$ | Résistance nominale tresse : | 3,6 Ω · km$^{-1}$ |

TABLE 1 – Extraits de la fiche technique du câble Velden 8213

**8.** Représenter le schéma équivalent à une longueur infinitésimale d$z$ du câble. Établir les équations de propagation des ondes de courant et de tension.

**9.** Définir, exprimer, calculer et commenter la célérité de propagation des ondes électriques dans le câble Belden 8213. Comparer au « délai » de la fiche technique.

**10.** Définir et établir l'expression de l'impédance caractéristique $Z_0$ du câble. Les données de la fiche technique ci-dessus sont-elles compatibles avec ce modèle ?

Lorsqu'un tel câble relie un générateur (par exemple l'antenne de réception du signal TV) à un récepteur (ici, l'étage d'entrée de l'amplificateur TV) modélisé par une impédance complexe $\underline{Z}_\text{e}$ en $z = 0$ sur la figure 3, on observe en général la superposition d'ondes de tension et de courant incidente et réfléchie, donc la superposition d'une onde strictement progressive, d'amplitude $u_\text{p} = U_\text{p}\cos(\omega t - kz + \varphi_\text{p})$ et d'une onde stationnaire, d'amplitude $u_\text{s} = U_\text{s}\cos(\omega t - \varphi_\text{s})\sin(kz - \psi_\text{s})$. L'importance de cette dernière est caractérisée par le rapport $\rho = U_\text{s}/U_\text{p}$, qui peut être mesuré pour indiquer le degré de désaccord entre le câble et sa charge.

**11.** On impose d'abord dans la partie $z < 0$ du câble une onde de tension incidente $\underline{u}_+(z,t)$ d'amplitude complexe $\underline{U}_+$, de pulsation $\omega$ et de vecteur d'onde $k$.
Exprimer l'onde de courant $\underline{i}_+(z,t)$ associée en fonction de $Z_0$, $\underline{U}_+$, $k$ et $\omega$.
Exprimer les ondes de tension $\underline{u}_-(z,t)$ et de courant $\underline{i}_-(z,t)$ réfléchies par le câble en fonction de $\underline{Z}_\text{e}$, $Z_0$, $k$ et $\omega$.

1. En régime harmonique, la puissance moyenne est définie par la moyenne temporelle $\langle\mathcal{P}(z,t)\rangle_t$. On peut l'écrire en fonction des grandeurs complexes $\mathcal{P}_\text{m}(z) = \dfrac{1}{2}\text{Re}\left(\underline{u}\,\underline{i}^*\right)$ ou $\underline{i}^*$ est le conjugué de $\underline{i}$.

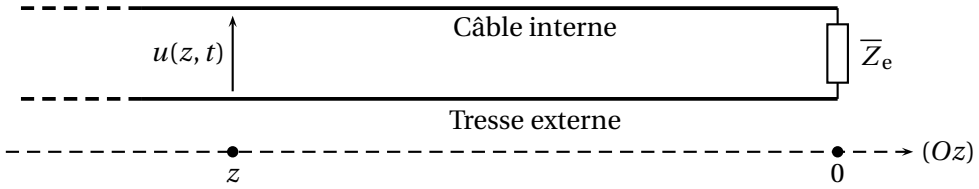


FIGURE 3 – Câble TV alimentant un étage électronique

**12.** Exprimer $\rho$ en fonction de $Z_0$ et $\overline{Z}_e$. À quelle condition aura-t-on $\rho = 0$ ? On parle dans ce cas d'adaptation (ou accord) entre le câble et sa charge.

Dans tout ce qui suit, on choisit une valeur de $\overline{Z}_e$ qui assure cet accord. On souhaite évaluer l'importance des pertes en ligne dues aux résistances électriques par unité de longueur $r_u$ et $r'_u$ du câble et de la tresse.

**13.** Proposer un schéma modifié de l'élément de longueur d$z$ de câble. Établir la nouvelle équation de propagation de l'onde de tension ; définir et exprimer la longueur caractéristique d'atténuation de l'amplitude des ondes en fonction de $Z_0$, $r_u$ et $r'_u$.

**14.** A.N. : calculer et commenter la valeur de la distance caractéristique.

**Question pour les 5/2** : *En pratique, on évite d'utiliser de tels câbles à très haute fréquence (1 GHz et plus). Pourquoi ?*

Dans une installation de captage de télévision, un câble coaxial $(C)$ relie l'antenne $P$ au décodeur $D$. Un voisin indélicat, souhaitant bénéficier du signal sans payer, réalise le branchement en dérivation de la figure 4 en dénudant partiellement le câble $(C)$ pour y souder son propre câble $(C')$ relié à son détecteur $D'$. Les soudures relient entre elles les câbles centraux d'une part et les tresses externes d'autre part. Les décodeurs $D$ et $D'$ sont tous deux adaptés aux câbles. Tous les câbles sont assez courts pour négliger l'atténuation du signal.

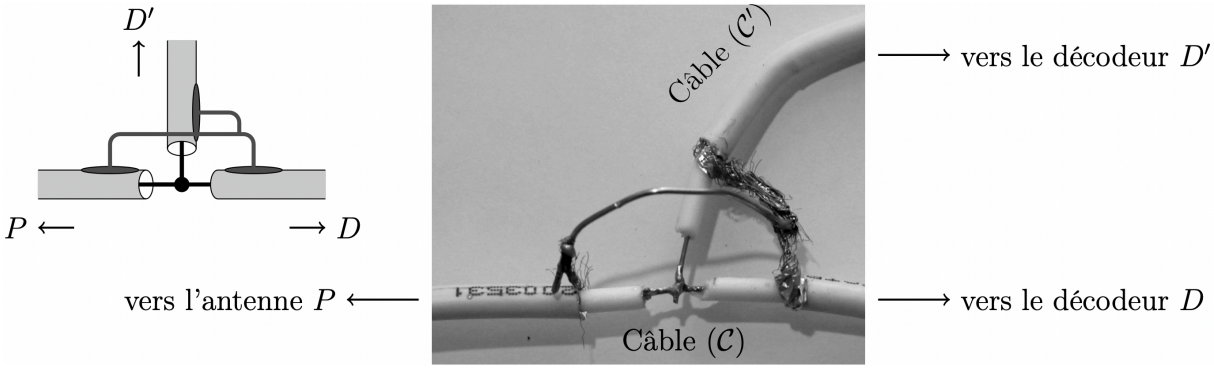


FIGURE 4 – Branchement illégal d'un câble coaxial $(C')$ sur une installation préexistante $(C)$

Un onde de tension $u_i = U_0 \cos(\omega t - kz)$ provient de l'antenne $P$ dans la partie $z < 0$ du câble ; elle atteint en $z = 0$ la soudure ainsi réalisée. Dans les deux câbles situés en parallèle dans le domaine $z > 0$ apparaît la même onde de tension $u_i = U'_0 \cos(\omega t - kz)$, avec $|U'_0| < |U_0|$.

**15.** Pourquoi n'y a-t-il *pas d'onde réfléchie* dans les câbles situés en $z > 0$ ? Montrer qu'il en existe une dans le câble situé en $z < 0$ et déterminer son amplitude.

**16.** L'introduction de cette dérivation « pirate » est-elle détectable par une mesure de $\rho$ ou bien par celle de l'atténuation du signal incident au niveau du détecteur $D$ ?