

Sujet d'entraînement n° 10

Optique

Ce sujet comporte 4 parties indépendantes.

N'oubliez pas les consignes :

- respectez et indiquez les numérotations des questions;
- **encadrez vos résultats**;
- un résultat numérique sans unité ne sera pas pris en compte.

Partie I — Fibre optique à saut d'indice

Les applications numériques seront données avec 3 chiffres significatifs.

Une fibre optique à saut d'indice, représentée sur la figure 1.1 est formée d'un cœur cylindrique en verre d'axe (Ox) , de diamètre $2a$ et d'indice n entouré d'une gaine optique d'indice n_1 légèrement inférieur à n . Les deux milieux sont supposés homogènes, isotropes, transparents et non chargés. Un rayon situé dans le plan (Oxy) entre dans la fibre au point O avec un angle d'incidence θ .

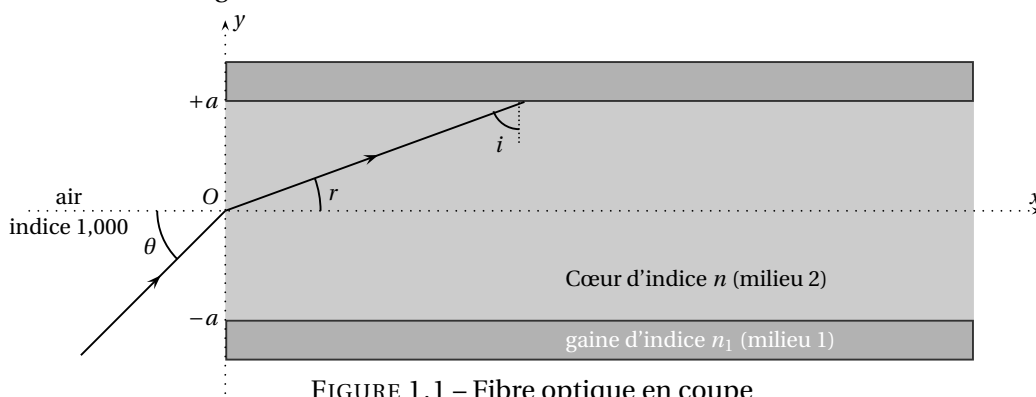


FIGURE 1.1 – Fibre optique en coupe

Les rayons lumineux sont supposés issus d'une radiation monochromatique de fréquence f , de pulsation ω et de longueur d'onde λ dans le milieu constituant le cœur.

1. Les différents angles utiles sont représentés sur la figure 1.1. À quelle condition sur i , angle d'incidence à l'interface cœur/gain, le rayon reste-t-il confiné à l'intérieur du cœur? On note i_ℓ l'angle d'incidence limite.
2. Montrer que la condition précédente est vérifiée si l'angle d'incidence θ est inférieur à un angle limite θ_ℓ dont on exprimera le sinus en fonction de n et i_ℓ . En déduire l'expression de l'ouverture numérique $ON = \sin \theta_\ell$ de la fibre en fonction de n et n_1 uniquement.
3. Donner la valeur numérique de ON pour $n = 1,50$ et $n_1 = 1,47$.

On considère une fibre optique de longueur L . Le rayon entre dans la fibre avec un angle d'incidence θ variable compris entre 0 et θ_ℓ . On note c la vitesse de la lumière dans le vide.

4. Pour quelle valeur de l'angle θ le temps de parcours de la lumière dans la fibre est-il minimal? maximal? Exprimer alors l'intervalle de temps δt entre le temps de parcours minimal et maximal en fonction de L , c , n et n_1 .
5. On pose $2\Delta = 1 - (n_1/n)^2$. On admet que pour les fibres optiques $\Delta \ll 1$. Donner dans ce cas l'expression approchée de δt en fonction de L , c , n et Δ . On conservera cette expression de δt pour la suite du problème.

On injecte à l'entrée de la fibre une impulsion lumineuse d'une durée caractéristique $t_0 = t_2 - t_1$ formée par un faisceau de rayons ayant un angle d'incidence compris en 0 et θ_ℓ . La figure 1.2 représente l'allure de l'amplitude A du signal lumineux en fonction du temps t .

6. Reproduire la figure 1.2 en ajoutant à la suite l'allure du signal lumineux à la sortie de la fibre. Quelle est la durée caractéristique t'_0 de l'impulsion lumineuse en sortie de fibre?

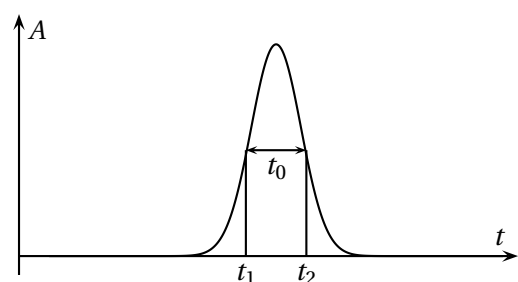


FIGURE 1.2 – Impulsion lumineuse

Le codage binaire de l'information consiste à envoyer des impulsions lumineuses (appelées « bits ») périodiquement avec une fréquence d'émission F .

7. En supposant t_0 négligeable devant δt , quelle condition portant sur la fréquence d'émission F exprime le non-recouvrement des impulsions à la sortie de la fibre optique?

Pour une fréquence F donnée, on définit la longueur maximale $L_{\max}$ de la fibre optique permettant d'éviter le phénomène de recouvrement des impulsions. On appelle bande passante de la fibre le produit $B = L_{\max} \cdot F$.

8. Exprimer la bande passante B en fonction de c , n et Δ .

9. Calculer la valeur numérique de Δ et de la bande passante B (exprimée en $\text{MHz} \cdot \text{km}$) avec les valeurs de n et n_1 données dans la question 3. Pour un débit d'information de $F = 100 \text{ Mbits} \cdot \text{s}^{-1} = 100 \text{ MHz}$, quelle longueur maximale de fibre optique peut-on utiliser pour transmettre le signal? Commenter la valeur de $L_{\max}$ obtenue.

Partie II — Trajet d'un rayon lumineux : principe de Fermat

Les lois de Descartes, publiées en 1637 dans son traité *La Dioptrique*, en annexe du *Discours de la méthode*, prévoient quel sera le trajet suivi par un rayon lumineux initial donné.

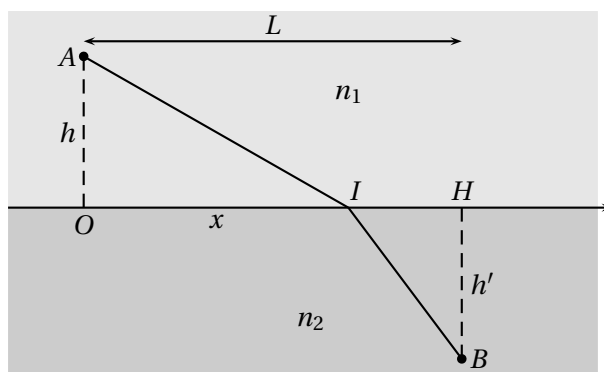
Fermat a envisagé ce problème d'un point de vue plus global, cherchant à déterminer le chemin effectivement suivi par la lumière pour relier deux points A et B donnés. Fermat s'est basé sur un principe moral : « la nature agit toujours par les voies les plus courtes et les plus simples ». Le principe de Fermat s'énonce ainsi :

La lumière se propage d'un point à un autre sur les trajectoires telles que la durée du parcours soit localement minimale.

On considère dans un premier temps un dioptre plan séparant deux milieux d'indices respectifs n_1 et n_2 . Étant donnés un point A dans le milieu (1) et un point B dans le milieu (2), il s'agit de chercher le chemin effectivement suivi par la lumière pour aller de A à B .

1. Justifier simplement, à partir du principe de Fermat, que les rayons sont rectilignes dans un milieu homogène.

Déterminer le trajet suivi par la lumière revient donc à chercher le point I d'intersection avec le dioptre (on note $x = OI$ et $L = OH$) :



2. Exprimer le temps T que met la lumière pour aller de A à B en fonction des indices n_1 et n_2 , de la célérité c de la lumière dans le vide et des longueurs AI et IB .

3. En déduire l'expression $T(x)$ en fonction de n_1 , n_2 , c , L , h , h' et x .

4. À quelle condition sur $T(x)$ cette durée est-elle minimale?

Montrer que cette condition entraîne

$$\frac{n_1 x}{\sqrt{h^2 + x^2}} = \frac{n_2 (L - x)}{\sqrt{h'^2 + (L - x)^2}}.$$

Montrer qu'il s'agit bien d'un minimum.

5. En reproduisant la figure ci-dessus en y indiquant les angles d'incidence i_1 et de réfraction i_2 , montrer que la relation précédente permet de retrouver la loi de Descartes pour la réfraction.

Partie III — L'image au fond du gobelet

Il existe de petits gobelets amusants (figure 3.1a) possédant la propriété suivante :

- en l'absence de liquide, le fond du gobelet est constitué d'une lentille sphérique qui ne laisse rien apparaître (figure 3.1b) ;
- en présence de liquide, une image nette apparaît (figure 3.1c).

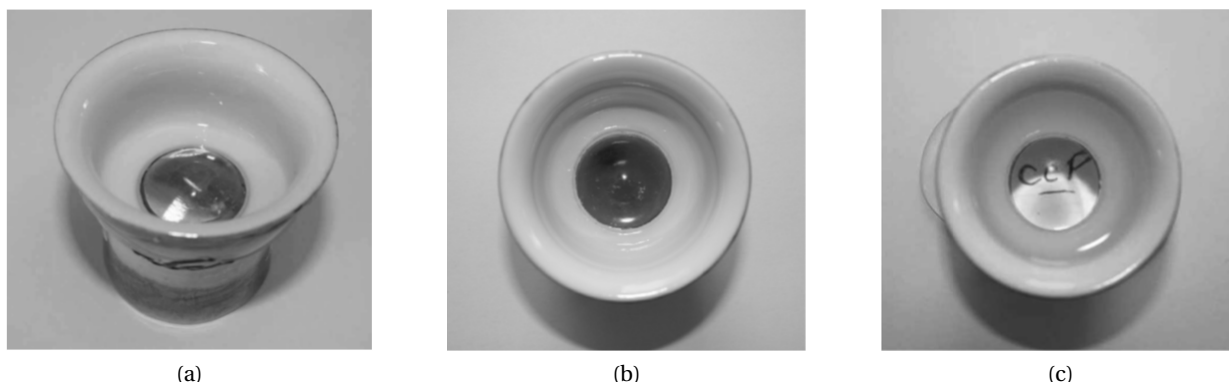


FIGURE 3.1 – Le gobelet

L'objet de ce problème est de proposer une modélisation simple de ce phénomène optique. Les conditions de l'optique de Gauss seront supposées satisfaites tout au long du problème. Les figures ne sont pas à l'échelle. Les valeurs numériques considérées dans ce problème sont réalistes. L'approximation des lentilles minces n'est, en revanche, pas vraiment justifiée dans le contexte.

1 Visibilité d'un objet situé dans le plan focal objet

Sur un banc d'optique (figure 3.2) sont alignés un objet BB' , coupant l'axe optique en un point A et une lentille mince convergente L_1 située au point S . Les points B et B' sont symétriques l'un de l'autre par rapport à l'axe optique. La figure représente le foyer principal objet F , confondu avec A , ainsi que le foyer principal image F' . L'œil d'un observateur est placé en un point O de l'axe optique. La pupille de l'œil est représentée comme un disque centré en O , de diamètre PP' . Le bord de la lentille est un cercle, assimilable à un diaphragme DD' . Le diamètre de l'objet BB' est identique à celui du diaphragme DD' .

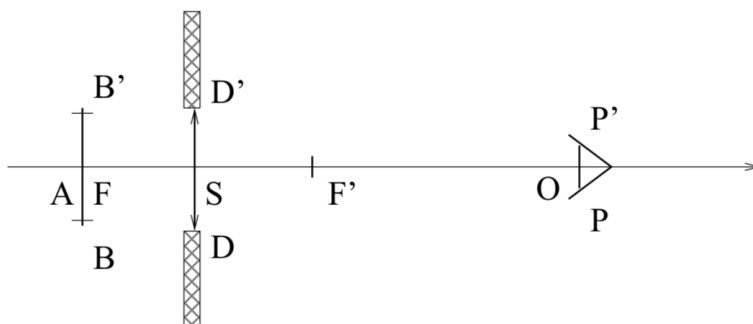


FIGURE 3.2 – Montage de la lentille L_1 (échelle non respectée)

Données : $\overline{SA} = -12 \text{ mm}$, $\overline{SO} = 200 \text{ mm}$, $\overline{BB'} = \overline{DD'} = 20 \text{ mm}$, $\overline{PP'} = 6 \text{ mm}$.

1. Rappeler les hypothèses de l'approximation de Gauss en optique géométrique.
2. Reproduire soigneusement la figure 3.2. Construire graphiquement l'allure de deux rayons issus de B et traversant la lentille.
Faire de même avec deux rayons issus de B' . Réaliser un tracé de taille suffisante, de l'ordre de la moitié de la largeur de la feuille.
3. Lorsque l'objet est situé dans le plan focal objet de la lentille, l'image se forme à l'infini et seule une fraction minimale des rayons issus de l'objet est captée par la pupille de l'œil PP' . Il s'agit d'estimer cette fraction. Soit un point E défini par :

- E appartient au plan de l'objet BB' ;
- le rayon issu de E , passant par le bord inférieur D du diaphragme, est réfracté en un rayon DP' passant par le bord supérieur P' de la pupille de l'œil.

De même, le point E' , symétrique de E par rapport à l'axe optique, est défini par les propriétés suivantes :

- E' appartient au plan de l'objet BB' ;
- le rayon issu de E' , passant par le bord supérieur D' du diaphragme, est réfracté en un rayon $D'P$ passant par le bord inférieur P de la pupille de l'œil.

Reproduire soigneusement la figure 3.2. Placer les points E et E' , obtenus à l'aide du tracé des rayons $PD'E'$ et $P'DE$. Pour plus de clarté, on tracera une diffère distincte de celle de la question 2.

4. À l'aide du schéma précédent, déduire l'expression de la distance EE' en fonction des distances SF , SO , DD' et PP' . Calculer numériquement EE' , puis donner la fraction d'aire, définie par le rapport $\tau_1 = \left(\frac{EE'}{BB'}\right)^2$, de l'objet visible par l'œil placé au point O .

2 Visibilité d'un objet situé entre le plan focal et la lentille

La figure 3.3 représente un montage analogue à celui de la figure 3.2. La lentille L_1 a été remplacée par une lentille L_2 moins convergente. L'objet BB' coupe l'axe en un point A distinct du foyer principal objet F . La distance SA est encore égale à -12 mm, tandis que la distance focale $f' = SF'$ de la lentille L_2 est désormais de 36 mm (figure 3.3).

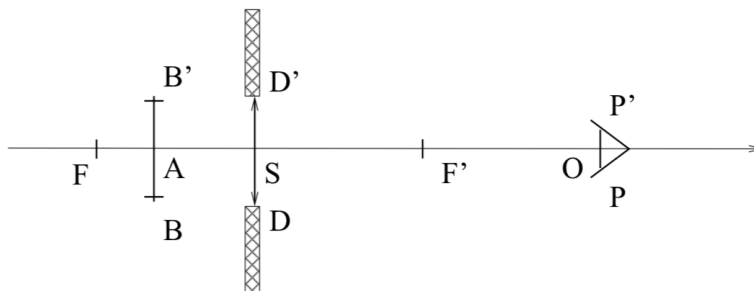


FIGURE 3.3 – Montage de la lentille L_2 (échelle non respectée)

La formule de conjugaison d'une lentille convergente, de distance focale f' située en S , entre un point objet A_1 de l'axe et son image A_2 est rappelée :

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{SA_2} - \frac{1}{SA_1}.$$

5. Déterminer par le calcul la position de l'image $B_2B'_2$ de l'objet BB' .

Calculer le grandissement $\frac{B_2B'_2}{BB'}$ et la taille de l'image $B_2B'_2$.

L'image est-elle réelle ou virtuelle (justifier) ?

6. Calculer la distance entre l'œil et le plan image $B_2B'_2$.

En déduire que le diaphragme DD' masque une partie de l'image $B_2B'_2$ à l'observateur dont l'œil est situé en O . Estimer, dans l'approximation où les points O , P et P' sont confondus, la fraction surfacique τ_2 de l'image $B_2B'_2$ visible par l'œil de l'observateur situé en O .

3 Distance focale de lentilles minces accolées

Le modèle proposé pour décrire la situation représentée sur la figure 3.1b (absence de liquide) est celui d'une lentille mince plan-convexe de rayon de courbure R (figure 3.4a). La lentille est constituée de verre d'indice n_2 entourée d'air d'indice n_1 . Le modèle proposé pour décrire la situation représentée sur la figure 3.1c (présence de liquide) est la succession d'un dioptré plan entre un milieu d'indice n_1 et un milieu d'indice n_2 , d'un dioptré sphérique de rayon de courbure R entre un milieu d'indice n_2 et un milieu d'indice n_3 , puis d'un second dioptré plan entre le milieu d'indice n_3 et le milieu d'indice n_1 (figure 3.4b).

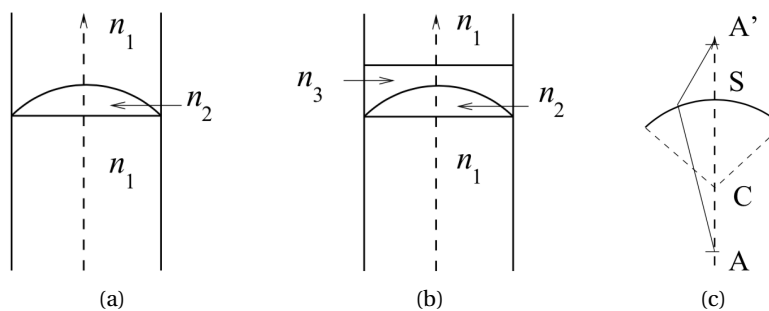


FIGURE 3.4 – Modélisation

7. On donne la formule de conjugaison correspondant à la succession de dioptries représentés sur la figure 3.4a :

$$n_1 \left(\frac{1}{\overline{SA'}} - \frac{1}{\overline{SA}} \right) = \frac{n_2 - n_1}{\overline{CS}},$$

où $\overline{CS}$ représente la distance algébrique entre le centre de courbure et le sommet du dioptre sphérique, représenté sur la figure 3.4c.

Reconnaitre la distance focale f'_1 de la lentille convexe dans l'expression ci-dessus et calculer sa valeur numérique.

Données : $n_1 = 1,00$, $n_2 = 1,50$ et $R = 6,0$ mm.

8. On donne la formule de conjugaison correspondant à la succession de dioptries représentés sur la figure 3.4b :

$$n_1 \left(\frac{1}{\overline{SA'}} - \frac{1}{\overline{SA}} \right) = \frac{n_2 - n_3}{\overline{CS}},$$

où $\overline{CS}$ représente la distance algébrique entre le centre de courbure et le sommet du dioptre sphérique, représenté sur la figure 3.4c.

Reconnaitre la distance focale f'_2 de la lentille plane dans l'expression ci-dessus et calculer sa valeur numérique.

Données : $n_1 = 1,00$, $n_2 = 1,50$, $n_3 = 1,33$ et $R = 6,0$ mm.

9. L'objet à observer est situé à une distance de 12 mm sous la lentille (voir le schéma de la vue en coupe du gobelet sur la figure 3.5).

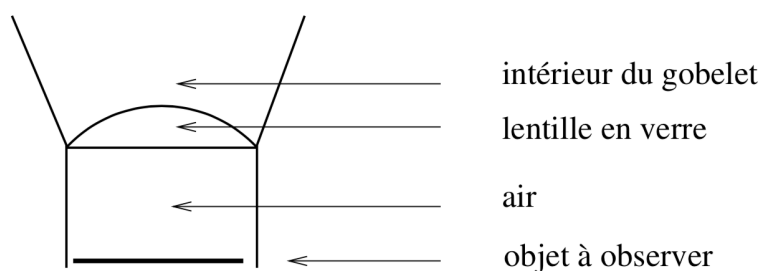


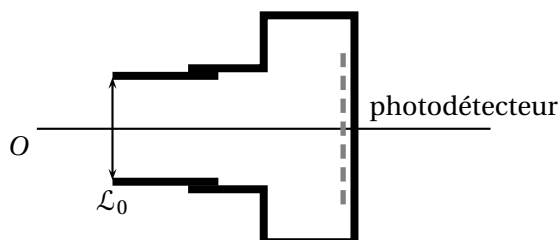
FIGURE 3.5 – Vue en coupe du gobelet

Pourquoi ne voit-on rien en l'absence de liquide ?

Pourquoi l'image devient-elle visible lorsque l'on remplit le verre ?

Partie IV — Appareil photographique

Un appareil photographique est constitué d'un objectif assimilé à une lentille mince convergente $\mathcal{L}_o$ de centre O et de distance focales $f'_1 = 50$ mm, mobile par rapport à un photodétecteur CCD fixé sur le boîtier de l'appareil.



On donne la relation de conjugaison de Descartes, de Newton et le grandissement transversal G_t pour une lentille mince de distance focale image f_i :

$$-\frac{1}{p_o} + \frac{1}{p_i} = \frac{1}{f_i} \quad \sigma_o \sigma_i = -f_i^2 \quad G_t = \frac{p_i}{p_o} = -\frac{\sigma_i}{f_i}$$

où p_o et p_i sont les distances algébriques de l'objet et de l'image au centre de la lentille et σ_o et σ_i les distances algébriques de l'objet et de l'image respectivement au foyer principal objet et image de la lentille.

Les applications numériques seront faites avec deux chiffres significatifs.

1. Calculer numériquement l'amplitude Δ de déplacement de $\mathcal{L}_o$ sachant que l'appareil est aussi bien capable de faire la mise au point sur un paysage (à l'infini) que sur un objet situé à une distance de 55 cm de $\mathcal{L}_o$.
2. Calculer numériquement la taille a , sur le photodétecteur, de l'image d'un objet transversal de 1,5 cm de longueur situé à 55 cm de $\mathcal{L}_o$.
3. À l'aide d'une bague extérieure, on ajoute sur l'objectif (en avant de $\mathcal{L}_o$), une deuxième lentille convergente $\mathcal{L}_b$ de centre O_b et de distance focale $f'_2 = 30$ cm. La distance entre $\mathcal{L}_o$ et $\mathcal{L}_b$ est fixe, de valeur $O_b O = 5$ cm. À quelle distance minimale d_1 de $\mathcal{L}_b$ peut-on photographier un objet (l'objectif est alors éloigné du photodétecteur à sa distance maximale) ?
4. Quelle est alors, sur le photodétecteur, la taille a_1 de l'image d'un objet transversal de 1,5 cm de longueur ?
5. À quelle distance maximale d_2 de $\mathcal{L}_b$ peut-on photographier un objet (l'objectif est alors à sa distance minimale du photodétecteur) ?
6. Quelle est alors, sur le photodétecteur, la taille a_2 de l'image d'un objet transversal de 1,5 cm de longueur ?