Sujet d'entraînement n° 10 — Optique

Partie I — Fibre optique à saut d'indice

1. L'angle de réfraction limite, pour le dioptre gaine/cœur, correspond à un angle émergeant (dans la gaine) de $\pi/2$. La loi de Descartes conduit alors à $n \sin i_\ell = n_1$.
Il y a réflexion totale sur ce dioptre si $\boxed{i > i_\ell}$.
Le rayon reste donc confiné dans le cœur pour

$$\boxed{i > \arcsin\left(\frac{n_1}{n}\right)}.$$

2. On a $r = \pi/2 - i$, et la condition de confinement $i > i_\ell$ revient à $r < \pi/2 - i_\ell$.
La loi de Descartes pour le dioptre air/cœur s'écrit $\sin\theta = n \sin r$. La condition sur r s'écrit alors

$$\sin\theta < n \sin\left(\frac{\pi}{2} - i_\ell\right) = n \cos i_\ell\,.$$

Le rayon reste donc confiné si

$$\boxed{\theta < \theta_\ell} \quad \text{avec} \quad \boxed{\sin\theta_\ell = n\cos i_\ell}.$$

Compte tenu des résultats précédents, on a

$$n\cos i_\ell = n\sqrt{1-\sin^2 i_\ell} = n\sqrt{1-\frac{n_1^2}{n^2}} = \sqrt{n^2 - n_1^2}\,.$$

L'ouverture numérique de la fibre s'écrit donc

$$\boxed{ON = \sqrt{n^2 - n_1^2}}.$$

3. On calcule $\boxed{ON = 0{,}298}$.

4. Le temps de parcours de la lumière dans la fibre est minimal quand son trajet est le plus court, c'est-à-dire pour $\theta = 0$, d'où $r = 0$ (elle se propage selon l'axe de la fibre sur la distance L). La vitesse de la lumière dans la fibre étant $v = c/n$, le temps de parcourt est donné par $t_{\min} = \frac{L}{v} = \frac{nL}{c}$ (on retrouve le chemin optique nL parcouru dans la fibre).
Le temps de parcours dans la fibre est maximal pour $\theta = \theta_\ell$ (le rayon est le plus incliné par rapport à l'axe de la fibre). Dans la fibre, le rayon fait donc avec l'axe l'angle r_ℓ donné par $n \sin r_\ell = \sin\theta_\ell$. La longueur du trajet est

$$L_{\max} = \frac{L}{\cos r_\ell} = \frac{L}{\sin i_\ell} = \frac{n}{n_1} L\,.$$

Le temps de parcours maximal est alors

$$t_{\max} = \frac{nL_{\max}}{c} = \frac{n^2 L}{n_1 c}\,.$$

L'intervalle de temps vaut alors

$$\delta t = t_{\max} - t_{\min} = \frac{n^2 L}{n_1 c} - \frac{nL}{c} = \frac{nL}{c}\left(\frac{n}{n_1} - 1\right),$$

soit

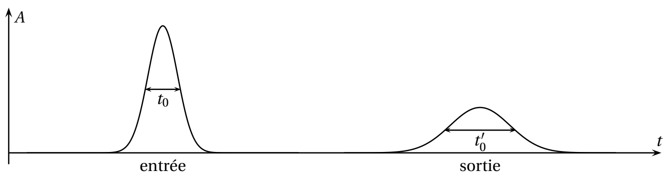
$$\boxed{\delta t = \frac{n(n-n_1)L}{n_1 c}}.$$

5. On a $\frac{n_1}{n} = \sqrt{1-2\Delta}$. Comme $\Delta \ll 1$, on en déduit $\frac{n_1}{n} \approx 1 - \Delta$. On a donc

$$\delta t = \left(\frac{1 - n_1/n}{n_1/n}\right)\frac{nL}{c} = \frac{\Delta}{1-\Delta}\frac{nL}{c} \approx \frac{\Delta n L}{c}\,.$$

L'intervalle de temps s'écrit $\boxed{\delta t = \frac{n\Delta L}{c}}$.

6. Considérons un signal lumineux infiniment bref envoyé à l'instant T_0 à l'entrée de la fibre ; son arrivée à la sortie de la fibre s'étale entre les instants $T_0 + t_{\min}$ et $T_0 + t_{\max}$, soit sur une durée δt.
Un signal d'entrée ayant une durée caractéristique t_0 a donc en sortie une durée caractéristique $t_0' = t_0 + \delta t$, soit $\boxed{t_0' = t_0 + \frac{n\Delta L}{c}}$.



7. En supposant t_0 négligeable devant δt, les impulsions de sortie ont pour largeur δt. L'intervalle de temps entre deux impulsions successives étant $T = \frac{1}{F}$, le non-recouvrement des impulsions à la sortie de la fibre optique s'écrit $T > \delta t$, soit

$$\boxed{F < \frac{c}{n\Delta L}}.$$

8. D'après la question précédente, pour une fréquence donnée, il n'y a pas recouvrement si la longueur de la fibre vérifie

$$L < L_{\max} = \frac{c}{n\Delta F}\,.$$

La bande passante vaut alors

$$\boxed{B = \frac{c}{n\Delta}}.$$

9. On calcule

$$\boxed{\Delta = 1{,}98\times10^{-2}}$$

et $B = 1{,}01\times10^{10}$ Hz·m, soit

$$\boxed{B = 10{,}1\ \text{MHz}\cdot\text{km}}\,.$$

Pour un débit d'information de $F = 100$ Mbits·s^{-1}, soit $F = 100$ MHz, la longueur maximale de fibre optique que l'on peur utiliser pour transmettre le signal est $\boxed{L_{\max} = 101\ \text{m}}$.
Une telle fibre peut être utilisée au sein d'un bâtiment, mais pas sur de longues distances.

Partie II — Trajet d'un rayon lumineux : principe de Fermat

1. Dans un milieu homogène l'indice a même valeur en tout point; entre deux points A et B, le chemin optique vaut alors $(AB) = nAB$, et le temps de parcours entre ces deux points est $T_{AB} = \dfrac{(AB)}{c} = \dfrac{nAB}{c}$. Ce dernier est donc minimale quand la longueur de la trajectoire entre A et B est minimale, ce qui correspond à la ligne droite : les rayons sont donc rectilignes.

2. La lumière se propage à la célérité $v_1 = \dfrac{c}{n_1}$ dans le milieu (1) et à la célérité $v_2 = \dfrac{c}{n_2}$ dans le milieu (2). Compte tenue de la question précédente, les trajets sont rectilignes dans les deux milieux; le temps de parcours est donc

$$T = \frac{AI}{v_1} + \frac{IB}{v_2},$$

soit

$$\boxed{T = \frac{n_1 AI}{c} + \frac{n_2 IB}{c}}\,.$$

3. On a $AI = \sqrt{h^2+x^2}$ et $IB = \sqrt{(L-x)^2+h'^2}$, d'où

$$\boxed{T(x) = \frac{n_1}{c}\sqrt{h^2+x^2} + \frac{n_2}{c}\sqrt{(L-x)^2+h'^2}}\,.$$

4. La durée $T(x)$ est minimale si

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x} = 0} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} > 0\,.$$

On calcule

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = \frac{n_1}{2c}\frac{2x}{\sqrt{h^2+x^2}} + \frac{n_2}{2c}\frac{(-2)(L-x)}{\sqrt{(L-x)^2h'^2}}$$
$$= \frac{n_1}{c}\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}} - \frac{n_2}{c}\frac{L-x}{\sqrt{(L-x)^2h'^2}} = 0$$

D'où

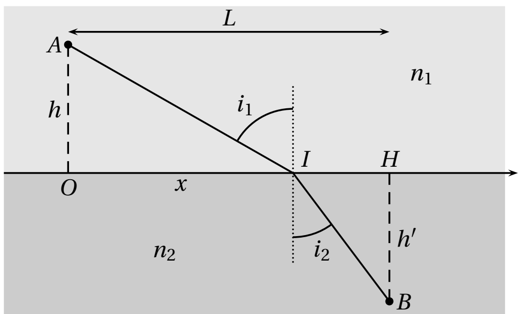
$$\boxed{\frac{n_1 x}{\sqrt{h^2+x^2}} = \frac{n_2(L-x)}{\sqrt{h'^2+(L-x)^2}}}\,.$$

On calcule

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = \frac{n_1}{c}\left[\frac{1}{\sqrt{h^2+x^2}} - \frac{x^2}{(h^2+x^2)^{3/2}}\right] - \frac{n_2}{c}\left[\frac{-1}{\sqrt{(L-x)^2+h'^2}} + \frac{(L-x)^2}{\left[(L-x)^2+h'^2\right]^{3/2}}\right]$$
$$= \frac{n_1}{c}\frac{h^2}{(h^2+x^2)^{3/2}} + \frac{n_2}{c}\frac{h'^2}{\left[(L-x)^2+h'^2\right]^{3/2}}\,.$$

Étant somme de deux termes positifs, on a $\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} > 0$ et l'extremum est bien un minimum.

5. Introduisons les angles i_1 et i_2 :



On a donc

$$\sin i_1 = \frac{OI}{AI} = \frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}$$

et

$$\sin i_2 = \frac{IH}{IB} = \frac{L-x}{\sqrt{(L-x)^2+h^2}}\,,$$

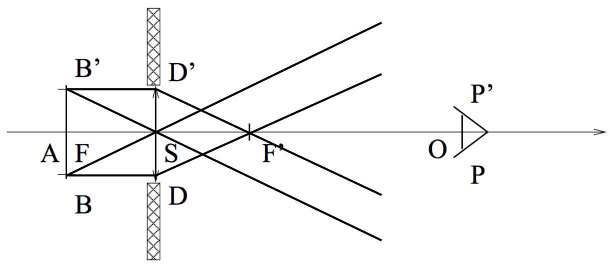
et la relation devient $\boxed{n_1\sin i_1 = n_2\sin i_2}$. On retrouve la loi de Descartes.

Partie III — L'image au fond du gobelet

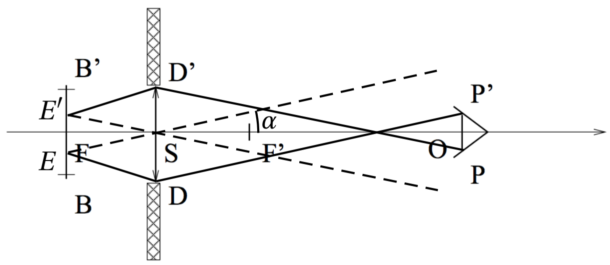
1 Visibilité d'un objet situé dans le plan focal objet

1. Dans l'approximation de Gauss, on se limite à des rayons paraxiaux, c'est-à-dire proches de l'axe optique et peu incliné par rapport à cet axe.

2. Le rayon issu de B passant par le centre optique de la lentille n'est pas dévié. Un rayon issu de B parallèle à l'axe optique ressort en passant par le foyer image F'.



3. On trace le rayon parallèle à $P'D$ passant par le centre S ; il rejoint l'objet BB' en E.



4. On a d'une part $\tan\alpha = \dfrac{EE'/2}{SF}$ et d'autre part $\tan\alpha = \dfrac{DD'/2 + PP'/2}{SO}$, d'où

$$\boxed{EE' = (DD' + PP')\frac{SF}{SO}}\,.$$

On calcule $\boxed{EE' = 1{,}56\ \text{mm}}$.
La fraction d'aire de l'objet visible par l'œil est

$$\boxed{\tau_1 = 6{,}0\times 10^{-3} = 0{,}6\ \%}\,.$$

2 Visibilité d'un objet situé entre le plan focal et la lentille

1. En notant A_2 le milieu de B_2B_2', la relation de conjugaison s'écrit

$$\frac{1}{\overline{SA_2}} = \frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{f'} = -\frac{1}{12} + \frac{1}{36}$$

d'où $\boxed{\overline{SA_2} = -18\ \text{mm}}$.
Le grandissement est donné par

$$\gamma = \frac{\overline{B_2B_2'}}{\overline{BB'}} = \frac{\overline{SA_2}}{\overline{SA}}\,,$$

soit $\boxed{\gamma = 1{,}5}$.

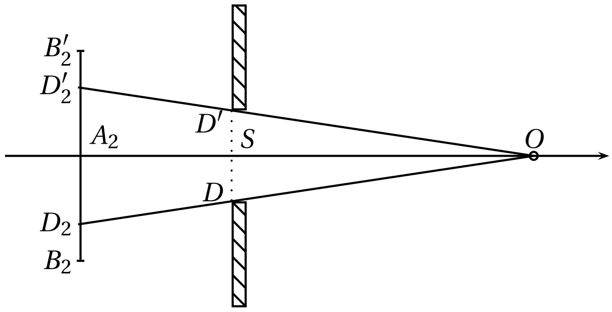
On en déduit la taille de l'image : $\boxed{B_2B_2' = 30\ \text{mm}}$

On a $\overline{SA_2} < 0$: **l'image est virtuelle**.

2. On a en terme de distances exprimées en millimètres

$$OA_2 = OS + SA_2 = 200 + 18\,,$$

soit $\boxed{OA_2 = 218\ \text{mm}}$.



Le diaphragme ne laisse visible que la partie D_2D_2' de l'image B_2B_2', telle que

$$\frac{D_2D_2'}{DD'} = \frac{OA_2}{OS}\,,$$

soit $D_2D_2' = DD'\dfrac{OA_2}{OS} = 21{,}8$ mm.

On a $D_2D_2' < B_2B_2'$: **le diaphragme masque une partie de l'image.**
La fraction surfacique de l'image visible par l'œil est

$$\tau_2 = \left(\frac{D_2D_2'}{B_2B_2'}\right)^2 = \left(\frac{21{,}8}{30}\right)^2$$

soit $\boxed{\tau_2 = 0{,}53 = 53\ \%}$.

3 Distance focale de lentilles minces accolées

1. La formule de conjugaison donnée peut s'écrire

$$\frac{1}{\overline{SA'}} - \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{n_2 - n_1}{n_1\overline{CS}} = \frac{1}{f_1'}\,.$$

Si $A \to \infty$, on a $A' = F_1'$ avec $SA' = f_1'$. La distance focale de la lentille convexe vaut donc

$$\boxed{f_1' = \frac{n_1}{n_2 - n_1}\overline{CS}}\,.$$

On calcule $\boxed{f_1' = 12\ \text{mm}}$.

2. Comme précédemment on a

$$\frac{1}{\overline{SA'}} - \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{n_2 - n_3}{n_1\overline{CS}} = \frac{1}{f_2'}\,,$$

d'où

$$\boxed{f_2' = \frac{n_1}{n_2 - n_3}\overline{CS}}\,.$$

On calcule $\boxed{f_2' = 35{,}3\ \text{mm}}$.

3. Quand le gobelet est vide, l'objet à observer est dans le plan focal de la lentille. D'après la partie I.1, on ne voit que 0,6 % de sa surface : autant dire qu'on ne voit rien !

Quand le gobelet est plein, l'objet à observer se retrouve entre le plan focal et la lentille. D'après la partie I.2, plus de la moitié de la surface de l'objet est visible. On voit alors une image virtuelle (effet de loupe).

Quand le gobelet a été rempli d'alcool de riz et vidé plusieurs fois de suite, l'image redevient curieusement floue...

Partie IV — Appareil photographique

1. Quand l'objet est à l'infini, la distance lentille-photodétecteur est $OP = f_1' = 50$ mm.

Quand l'objet est à 55 cm de $\mathcal{L}_o$, on a en valeur algébrique $p_o = -550$ mm et la distance lentille-photodétecteur p_i vérifie

$$\frac{1}{p_i} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{p_o} = \frac{1}{50} - \frac{1}{550} = \frac{550-50}{550 \times 50} = \frac{500}{550 \times 50} = \frac{1}{55},$$

d'où $p_i = 55$ mm. L'amplitude de déplacement de $\mathcal{L}_o$ vaut alors

$$\boxed{\Delta = p_i - f_1' = 5{,}0 \text{ mm}}$$

2. Il suffit d'utiliser la formule de grandissement avec $p_o = -550$ mm et $p_i = 55$ mm, d'où

$$G_t = \frac{p_i}{p_o} = -1/10.$$

On a donc

$$\boxed{a = 1{,}5 \text{ mm}}.$$

3. En notant A l'objet, la lentille $\mathcal{L}_b$ en forme une image intermédiaire A_1, qui est objet pour $\mathcal{L}_o$ qui en forme l'image finale A' sur le détecteur.

L'objectif étant éloigné du détecteur à sa distance maximale, on a $\overline{OA'} = 55$ mm. D'après la question 1, l'image intermédiaire est donc située 55 cm devant la lentille, soit $\overline{OA_1} = -550$ mm.

On a donc

$$\overline{O_bA_1} = \overline{O_bO} + \overline{OA_1} = 50 - 550 = -500 \text{ mm}$$

et la relation de Descartes s'écrit

$$\frac{1}{\overline{O_bA_1}} = \frac{1}{\overline{O_bA}} + \frac{1}{f_2'},$$

soit comme $\overline{O_bA} = -d_1$,

$$\frac{1}{d_1} = \frac{1}{f_2'} - \frac{1}{\overline{O_bA_1}} = \frac{1}{300} + \frac{1}{500} = \frac{800}{300 \times 500} = \frac{8}{1\,500}.$$

On a donc $d_1 = \dfrac{1\,500}{8} = 187{,}5$ mm, soit

$$\boxed{d_1 = 18{,}75 \text{ cm}}.$$

4. Dans cette configuration, le grandissement de la lentille $\mathcal{L}_o$ vaut $G_{t,o} = -1/10$ (question 2).

Le grandissement de la lentille $\mathcal{L}_b$ vaut

$$G_{t,b} = \frac{\overline{O_bA_1}}{\overline{O_bA}} = \frac{500}{190}.$$

Le grandissement de l'ensemble des deux lentilles vaut alors

$$G_t = G_{t,o} \cdot G_{t,b} \approx -\frac{1}{10} \times \frac{500}{190}.$$

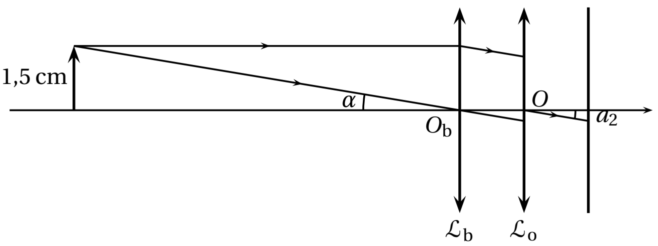
Un objet de dimension transversale 1,5 cm donne une image de dimension $a_1 = G_t \times 1{,}5$, soit

$$\boxed{a_1 = 0{,}39 \text{ cm}}.$$

5. Quand l'objectif est à la distance minimale f_1' du détecteur, l'image intermédiaire est à l'infini. La lentille $\mathcal{L}_b$ forme donc de l'objet A une image à l'infini : A est situé au foyer objet de $\mathcal{L}_b$. On a donc

$$\boxed{d_2 = 30 \text{ cm}}.$$

6. On ne peut considérer le grandissement de chaque lentille, l'image intermédiaire étant à l'infini. Une construction géométrique s'impose.



On a $\tan\alpha = \dfrac{1{,}5}{f_2'} = \dfrac{a_2}{f_1'}$, d'où

$$a_2 = a\frac{f_1'}{f_2'} = 1{,}5 \times \frac{50}{300} = \frac{3}{2} \times \frac{5}{30} = \frac{2{,}5}{10} = 0{,}25 \text{ cm}.$$

soit

$$\boxed{a_2 = 2{,}5 \text{ mm}}.$$