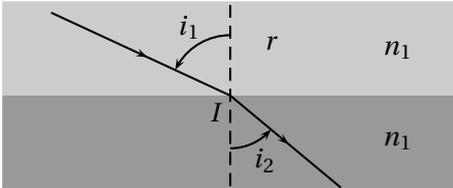


Partie I : Escalé à Fort Boyard (E3A PSI 2024)

1 — Observation du Fort

Q 1. Schéma pour la réfraction :



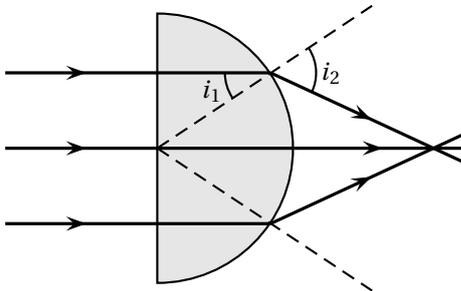
Lois de Snell-Descartes relatives à la réfraction :

- le rayon réfracté est dans le plan d'incidence (défini par le rayon incident et la normale au dioptre) ;
- les angles d'incidence  $i_1$  et de réfraction  $i_2$  vérifie  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ .

Q 2. Lentille plan convexe

Le rayon arrivant sous incidence normale sur la face d'entrée, il n'est pas dévié.

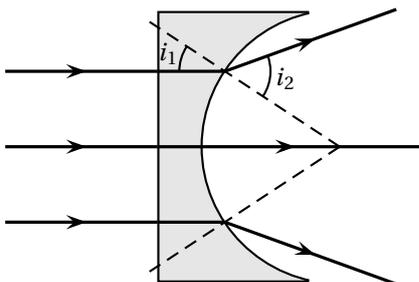
On a  $n \sin i_1 = \sin i_2$ . Comme  $n > 1$ , on a  $\sin i_2 > \sin i_1$  soit  $i_2 > i_1$  : le rayon émergent est dévié comme indiqué sur la figure.



Lentille plan concave

Le rayon arrivant sous incidence normale sur la face d'entrée, il n'est pas dévié.

On a  $n \sin i_1 = \sin i_2$ . Comme  $n > 1$ , on a  $\sin i_2 > \sin i_1$  soit  $i_2 > i_1$  : le rayon émergent est dévié comme indiqué sur la figure.



Q 3. La lentille plan convexe est convergente.  
La lentille plan concave est divergente.

Q 4. Partant d'un objet  $A_0$  à l'infini sur l'axe, la lentille  $L_1$  forme

$$A_0 \longleftrightarrow F'_1.$$

L'image finale  $A_i$  formée par  $L_2$  étant à l'infini sur l'axe, son objet est au foyer objet de  $L_2$  :

$$F_2 \longleftrightarrow A_i.$$

L'image finale d'un objet à l'infini sera donc à l'infini si

$$F'_1 = F_2.$$

L'encombrement est donc donné par

$$\ell = O_1 O_2 = \overline{O_1 O_2} = \overline{O_1 F'_1} + \overline{F'_1 O_2}$$

soit

$$\ell = \overline{O_1 F'_1} + \overline{F_2 O_2}.$$

On a

$$\overline{F_2 O_2} = -\overline{O_2 F_2} = \overline{O_2 F'_2} = f'_2,$$

soit

$$\ell = f'_1 + f'_2.$$

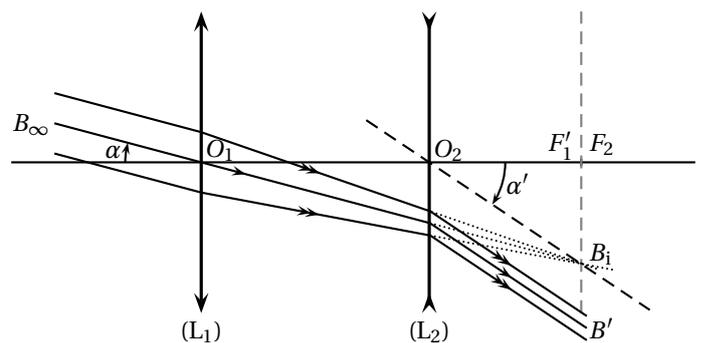
La lentille  $L_1$  étant convergente, on a  $f'_1 > 0$ .

La lentille  $L_2$  étant divergente, on a  $f'_2 > 0$ , soit  $|f'_2| = f'_1$ .

On en déduit

$$\ell = f'_1 - |f'_2|.$$

Q 5. Plaçons  $F'_1 = F_2$  sur le schéma :



Considérons le rayon issu de l'objet  $B_\infty$  hors de l'axe optique, passant par  $O_1$ .

Le schéma de formation des images est

$$B_\infty \xrightarrow{L_1} B_i \xrightarrow{L_2} B'_\infty.$$

L'image intermédiaire  $B_i$  formée par  $L_1$  est dans le plan focal image de  $L_1$ .

On peut la tracer sachant que le rayon passant par  $O_1$  n'est pas dévié à la traversée de  $L_1$ .

On peut tracer les autres rayons issus de  $B_\infty$  :

- les supports des rayons émergent de  $L_1$  passent par l'image intermédiaire  $B_1$ ;
- ils sortent de  $L_2$  parallèlement au premier rayon tracé.

L'image de  $B_1$  par  $L_2$  est à l'infini, hors de l'axe optique (c'est-à-dire incliné par rapport à l'axe). On trace le rayon issu de  $B_1$  dont le support passe par  $O_2$  (en tirets sur la figure). Les rayons sortant de  $L_2$  sont donc parallèles à ce rayon, ce qui permet de continuer le tracé du rayon.

**Q 6.** On remarque sur la figure que  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont de même signe : **l'image apparaît droite à travers les jumelles.**

**Q 7.** Dans le triangle  $O_1 F_1' B_1$ , on a

$$\frac{F_1' B_1}{O_1 F_1'} = \tan \alpha \approx \alpha$$

soit

$$F_1' B_1 = f_1' \alpha.$$

Dans le triangle  $O_2 F_2' B_1$ , on a

$$\frac{F_2' B_1}{O_1 F_1'} = \tan \alpha' \approx \alpha'$$

soit

$$F_2' B_1 = |f_2'| \alpha'.$$

Comme  $F_1' B_1 = F_2' B_1$ , on a

$$\frac{|f_2'| \alpha'}{f_1' \alpha} = 1$$

d'où

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{f_1'}{|f_2'|}.$$

**Q 8.** On a  $f_1' = G |f_2'|$ , d'où

$$\ell = f_1' - |f_2'| = (G - 1) |f_2'|.$$

Comme  $f_2' = -|f_2'| < 0$ , on en déduit

$$f_2' = \frac{\ell}{1 - G}.$$

On calcule  $f_2' = -1,3 \text{ cm}$ .

On a alors  $f_1' = -G f_2'$ , soit  $f_1' = 26 \text{ cm}$ .

**Q 9.** Le Fort est observé à l'œil nu sous l'angle  $\alpha$  tel que

$$\tan \alpha = \frac{h}{d}.$$

Comme  $h \ll d$ , on a  $\alpha \ll 1$ , et

$$\alpha = \frac{h}{d}.$$

On calcule  $\alpha = 6,7 \times 10^{-3} \text{ rad}$ .

À travers les jumelles, il est vu sous l'angle  $\alpha' = G\alpha$ , soit

$$\alpha' = 1,3 \times 10^{-1} \text{ rad}.$$

On a bien  $\alpha \ll 1$  et  $\alpha' \ll 1$  : les conditions de Gauss sont respectées.

## 2 — Mesure du temps : la clepsydre

**Q 10.** Pour appliquer la relation de Bernoulli, l'écoulement doit être :

- stationnaire;
- incompressible et homogène;
- parfait.

On a alors

$$\frac{P}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2} = C(\mathcal{L})$$

le long d'une ligne de courant  $\mathcal{L}$ .

**Q 11.** En considérant  $s \ll S$ , la conservation du débit volumique  $SV(t) = sv(t)$  entraîne  $V(t) \ll v(t)$ . On peut donc considérer  $V(t) \approx 0$ , c'est-à-dire un écoulement stationnaire.

Entre un point de la surface libre et un point à l'orifice de sortie sur une même ligne de courant, on a alors

$$\frac{P_0}{\rho} + gh(t) = \frac{P_0}{\rho} + \frac{v^2(t)}{2},$$

d'où

$$v(t) = \sqrt{2gh(t)}.$$

**Q 12.** L'incompressibilité de l'écoulement permet d'écrire  $sv(t) = SV(t)$ , d'où

$$V(t) = \frac{s}{S} \sqrt{2gh(t)}.$$

La hauteur  $h(t)$  diminuant au fur et à mesure de la vidange, **la vitesse  $V(t)$  diminue lors de la vidange.**

**Q 13.** La vitesse de la surface libre est reliée à l'évolution de la hauteur d'eau par

$$V(t) = -\frac{dh}{dt}.$$

La section à la côte  $h$  étant donnée par

$$S = \pi r^2(z) = \pi K^2 h^{2/n},$$

la relation de la question **Q11** donne

$$-\frac{dh}{dt} = \frac{s}{\pi K^2 h^{2/n}} \sqrt{2gh(t)}$$

soit

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{s\sqrt{2g}}{\pi K^2} \frac{\sqrt{h}}{h^{2/n}}.$$

**Q 14.** D'après la relation précédente,  $\frac{dh}{dt}$  est proportionnel à  $h^{\frac{1}{2}-\frac{2}{n}}$ . Comme  $h(t)$  dépend du temps, la dérivée ne dépend pas du temps si elle ne dépend plus de  $h$ , c'est-à-dire pour

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{n} = 0$$

soit pour  $n = 4$ .

### Données

Accélération de la pesanteur :  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Section de l'orifice :  $s = 1,0 \text{ cm}^2$ .

Le rayon est alors donné par

$$r(z) = Kz^{1/4}.$$

On en déduit  $[K] = \text{L}^{3/4}$  :  $K$  s'exprime en  $\text{m}^{3/4}$ .

**Q 15.** On a

$$K^2 = \frac{s\sqrt{2g}}{\pi \left| \frac{dh}{dt} \right|}.$$

On calcule  $K = 0,38 \text{ m}^{3/4}$ .

## 3 — L'épreuve de la cloche

**Q 16.** Le vecteur position est  $\vec{OM} = \ell_0 \vec{u}_r$ . Le vecteur vitesse est donc

$$\vec{v} = \ell_0 \dot{\theta} \vec{u}_\theta.$$

Le vecteur accélération vaut

$$\vec{a} = -\ell_0 \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + \ell_0 \ddot{\theta} \vec{u}_\theta.$$

**Q 17.** L'axe  $OX$  étant vers le bas, l'énergie potentielle de pesanteur est

$$E_p = -mgX + C = -mg\ell_0 \cos\theta + C$$

où  $C$  est une constante. On prend

$$E_p(\theta = \pi/2) = C = 0$$

d'où

$$E_p(\theta) = -mg\ell_0 \cos\theta.$$

**Q 18.** Le pendule est soumis à :

- la force de pesanteur conservative ;
- la tension du fil qui ne travaille pas (normale à la trajectoire).

L'énergie mécanique est une constante du mouvement, soit

$$\frac{1}{2} m \ell_0^2 \dot{\theta}^2 - mg\ell_0 \cos\theta = E_m.$$

Dérivons par rapport au temps :

$$m\ell_0^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + mg\ell_0 \dot{\theta} \sin\theta = 0.$$

Comme  $\dot{\theta} \neq 0$ , on en déduit

$$m\ell_0^2 \ddot{\theta} + mg\ell_0 \sin\theta = 0,$$

soit

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell_0}}.$$

**Q 19.** Si  $|\theta| \ll 1$ , l'équation précédente se linéarise selon

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0.$$

La solution générale est

$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t).$$

On a

$$\theta(t=0) = \theta_0 = A$$

et

$$\dot{\theta}(t=0) = B\omega_0 = 0$$

d'où

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t).$$

La période est  $T_0 = 2\pi/\omega_0$  soit  $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell_0}{g}}$ .

On calcule  $T_0 = 5,3 \text{ s}$ .

**Q 20. Attention :** la longueur de la corde varie sous l'effet d'une force *non conservative* exercée par les coéquipiers. On ne peut donc plus utiliser la conservation de l'énergie.

Le vecteur position est maintenant

$$\vec{OM} = \ell(t) \vec{u}_r.$$

La vitesse vaut donc

$$\vec{v} = \dot{\ell} \vec{e}_r + \ell(t) \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

et l'accélération

$$\vec{a} = (\ddot{\ell} - \ell(t) \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (2\dot{\ell} \dot{\theta} + \ell(t) \ddot{\theta}) \vec{u}_\theta.$$

La tension de la corde ayant un moment en  $O$  nul, nous allons appliquer le théorème du moment cinétique en  $O$ .

On a

$$\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m \vec{v} = m \ell^2(t) \dot{\theta} \vec{u}_Z.$$

Le moment du poids est

$$\vec{M}_O(m \vec{g}) = \vec{OM} \wedge m \vec{g} = -mg \ell(t) \sin \theta \vec{u}_Z.$$

Le théorème du moment cinétique s'écrit

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O(m \vec{g})$$

soit en projection selon  $\vec{u}_Z$

$$2m \ell(t) \dot{\ell} \dot{\theta} + m \ell^2(t) \ddot{\theta} = -mg \ell(t) \sin \theta$$

soit

$$\ddot{\theta} + \frac{2\dot{\ell}(t)}{\ell(t)} \dot{\theta} + \frac{g}{\ell(t)} \sin \theta = 0.$$

**Q 21.** Entre les points  $M_{n,1}$  et  $M_{n,2}$ , le mobile n'est soumis qu'au poids conservatif et à la tension de la corde de longueur constante, qui ne travaille pas. **L'énergie mécanique est constante entre ces points.**

La vitesse du mobile étant nulle en  $M_{n,1}$ , la conservation de l'énergie mécanique s'écrit

$$0 - mg \ell_0(1 + \alpha) \cos \theta_n = \frac{1}{2} m v_{n,2}^2 - mg \ell_0(1 + \alpha).$$

d'où

$$v_{n,2} = 2g \ell_0(1 + \alpha)(1 - \cos \theta_n).$$

On a donc

$$v_{n,2} = \sqrt{2g \ell_0 \beta (1 - \cos \theta_n)^\gamma}$$

avec

$$\beta = 1 + \alpha \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{2}.$$

**Q 22.** La conservation du moment cinétique entre les points  $M_{n,2}$  et  $M_{n,3}$  s'écrit

$$\ell_0(1 + \alpha) v_{n,2} = \ell_0(1 - \alpha) v_{n,3}.$$

On a donc

$$v_{n,3} = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} v_{n,2}$$

soit avec le résultat précédent

$$v_{n,3} = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \sqrt{2g \ell_0(1 + \alpha) \sqrt{1 - \cos \theta_n}}.$$

**Q 23.** En utilisant le même raisonnement qu'à la question **Q 21**, on peut dire que l'énergie mécanique est conservée entre les points  $M_{n,3}$  et  $M_{n,4}$ .

La vitesse du mobile étant nul en  $M_{n,4}$ , on peut écrire

$$-mg \ell_0(1 - \alpha) + \frac{1}{2} m v_{n,3}^2 = -mg \ell_0(1 - \alpha) \cos \theta_{n+1},$$

soit avec le résultat de **Q 23**

$$\begin{aligned} v_{n,3}^2 &= 2g \ell_0(1 - \alpha)(1 - \cos \theta_{n+1}) \\ &= \frac{(1 + \alpha)^2}{(1 - \alpha)^2} 2g \ell_0(1 + \alpha)(1 - \cos \theta_n). \end{aligned}$$

On en déduit

$$1 - \cos \theta_{n+1} = \left( \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right)^\delta (1 - \cos \theta_n) \quad \text{avec} \quad \delta = 3.$$

**Q 24.** Avec  $\alpha > 0$ , on a

$$\left( \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right)^3 > 1.$$

Comme  $1 - \cos \theta > 0$ , on a alors

$$1 - \cos \theta_{n+1} > 1 - \cos \theta_n$$

soit

$$\cos \theta_{n+1} < \cos \theta_n.$$

La fonction  $\cos$  étant décroissante sur  $[\pi/2, \pi]$ , on en déduit

$$\theta_{n+1} > \theta_n.$$

**L'amplitude des balancements augmente.**

**Q 25.** En posant  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = 1 - \cos \theta_n$ , on a

$$u_{n+1} = q u_n \quad \text{avec} \quad q = \left( \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right)^3.$$

Cette suite est géométrique de raison  $q$ , d'où

$$u_n = q^n u_0$$

soit

$$1 - \cos \theta_n = q^n (1 - \cos \theta_0).$$

On veut  $\theta_N = \pi/2$ , soit  $\cos \theta_N = 0$ , soit

$$1 = q^N (1 - \cos \theta_0) = \left( \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right)^{3N} (1 - \cos \theta_0).$$

On en déduit

$$N = - \frac{\ln(1 - \cos \theta_0)}{3 \ln \left( \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right)}.$$

On calcule  $N \approx 9,4$ , soit 10 oscillations simples.

**Il faut 5 allers-retours pour que le candidat puisse attraper l'indice.**

## 4 — Utilisation d'un colorant : la fluorescéine

**Q 26.** La vitesse débitante est définie par

$$Q = v_m \ell h.$$

On a donc

$$v_m = \frac{Q}{\ell h} = \frac{10 \times 10^{-6} \times 10^{-3} / 60}{100 \times 10^{-6} \times (80 \times 10^{-6})}$$

soit  $v_m = 2,1 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Le nombre de Reynolds est défini par

$$\mathcal{R}e = \frac{\tau_{\text{diff}}}{\tau_{\text{cov}}}$$

où

$\tau_{\text{diff}}$  : temps caractéristique du transfert diffusif de quantité de mouvement (par viscosité);

$\tau_{\text{conv}}$  : temps caractéristique du transfert convectif de quantité de mouvement.

Son expression en fonction des grandeurs caractéristiques de l'écoulement est

$$\mathcal{R}e = \frac{\rho L v_m}{\eta}.$$

► La longueur caractéristique à prendre est ambiguë ici :  $h$  ou  $\ell$ ?... L'ordre de grandeur est le même.

En prenant  $L = (h + \ell)/2$ , on obtient

$$\mathcal{R}e = \frac{10^3 \times 90 \times 10^{-6} \times 2,1 \times 10^{-2}}{10^{-3}}$$

soit  $\mathcal{R}e \approx 2$ .

L'écoulement est **laminaire**.

**Q 27.** On considère une tranche de section  $S$  comprise entre  $x$  et  $x + dx$ .

Elle contient  $\delta N = C(x, t) S dx$  molécules de fluorescéine.

Le bilan entre  $t$  et  $t + dt$  s'écrit

$$d(\delta N) = \delta N_{\text{reçu}}$$

en l'absence de source.

La variation est donné par

$$d(\delta N) = \delta N(t + dt) - \delta N(t) = \frac{\partial C}{\partial t} dt S dx.$$

La quantité de molécule reçue pendant  $dt$  est

$$\delta N_{\text{reçu}} = j(x, t) S dt - j(x + dx, t) S dt = -\frac{\partial j}{\partial t} S dx dt.$$

Le bilan conduit alors à

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x}.$$

Avec la loi de Fick

$$j(x, t) = -D \frac{\partial C}{\partial x}$$

on en déduit l'équation de diffusion

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}.$$

**Q 28.** On donne pour  $x > 0$ ,  $C(x, 0) = C_0$ .

La condition  $t = 0$  en  $x > 0$  correspond à  $u \rightarrow +\infty$ , soit

$$C(x, 0) = A + B \int_0^\infty e^{-s^2} ds = A + B \frac{\sqrt{\pi}}{2} = C_0.$$

On a de plus pour  $x < 0$ ,  $C(x, 0) = 0$ . La condition  $t = 0$  en  $x < 0$  correspond à  $u \rightarrow -\infty$ , soit

$$C(x, 0) = A + B \int_0^\infty e^{-s^2} ds = A - B \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0.$$

On a donc

$$\begin{cases} A + \frac{\sqrt{\pi}}{2} B = C_0 \\ A - \frac{\sqrt{\pi}}{2} B = 0 \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$A = \frac{C_0}{2} \quad \text{et} \quad B = \frac{C_0}{\sqrt{\pi}}.$$

Comme  $x = 0$  pour  $t > 0$  correspond à  $u = 0$ , on a

$$C(0, t) = A + \int_0^0 e^{-s^2} ds = A$$

soit

$$C(0, t) = \frac{C_0}{2}.$$

La concentration à l'interface est constamment égale à la concentration moyenne entre les deux compartiments.

**Q 29.** L'écoulement selon  $Oy$  se faisant avant la vitesse débitante  $v_m$ , on a

$$y = v_m t.$$

Sur une durée typique  $t^*$ , la diffusion se fait sur une longueur typique  $L^*$  telle que

$$t^* = \frac{L^{*2}}{D}$$

soit  $L^* = \sqrt{Dt^*}$ .

Au bout d'une durée  $t = t^*$ , la diffusion au bout d'une longueur  $y$  est visible sur une distance

$$L^* = \sqrt{\frac{Dy}{v_m}}.$$

Si le débit augmente,  $v_m$  augmente et  $L^*$  diminue : la diffusion est moins visible.

## 5 — Milieu marin

### 1 Structure cristalline du chlorure de sodium

**Q 30.** Les ions sodium forme un réseau cfc; on a donc

$$Z = 8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2}$$

soit **4 ions sodium par maille.**

**Q 31.** Sites octaédriques :

- un au centre du cube;
- un au milieu de chaque arête du cube.

On a donc  $1 + 12 \times \frac{1}{4}$ , soit **4 sites octaédriques par maille.**

Afin d'assurer l'électroneutralité de ce cristal ionique ( $\text{Na}^+, \text{Cl}^-$ ), il faut autant d'ions sodium que d'ions chlorure par maille.

**Tous les sites octaédriques sont occupés par le chlore.**

**Q 32.** Si les ions  $\text{Na}^+$  étaient tangents entre eux, ce serait sur la diagonale d'une face, de longueur  $a\sqrt{2}$ .

On a  $4r = 388 \text{ pm}$  et  $a\sqrt{2} = 786 \text{ pm}$ , soit  $4r > a\sqrt{2}$  : **les ions sodium ne sont pas tangents entre eux.**

Si les ions  $\text{Na}^+$  et  $\text{Cl}^-$  étaient tangents entre eux, ce serait sur une arête du cube, de longueur  $a$ .

On a  $2r + 2R = 556 \text{ pm} = a$  : **les ions sodium et chlorure sont tangents entre eux, le long d'une arête du cube.**

**Q 33.** Le volume de la maille est

$$V_{\text{maille}} = a^3.$$

Le volume occupé par les ions est

$$V_{\text{occupé}} = 4 \times \frac{4}{3}\pi R^3 + \frac{4}{3}\pi r^3$$

La compacité vaut donc

$$C = \frac{V_{\text{occupé}}}{V_{\text{maille}}} = \frac{16\pi(R^3 + r^3)}{3a^3}.$$

Or  $a = 2(R + r)$ , donc

$$C = \frac{16\pi(R^3 + r^3)}{3 \times 8a^3}$$

soit

$$C = \frac{2}{3}\pi \frac{R^3 + r^3}{(R + r)^3}.$$

On calcule  $C = 0,67 = 67 \%$ .

**Q 34.** La masse volumique du chlorure de sodium est

$$\rho_{\text{NaCl}} = \frac{4[M(\text{Na}) + M(\text{Cl})]}{N_A a^3}$$

soit comme  $a = 2(R + r)$ ,

$$\rho_{\text{NaCl}} = \frac{M(\text{Na}) + M(\text{Cl})}{2(R + r)^3}.$$

Sachant que  $1 \text{ pm} = 10^{-12} \text{ m} = 10^{-10} \text{ cm}$ , on calcule en  $\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$  la masse volumique :

$$\rho_{\text{NaCl}} = \frac{23 + 35,5}{2 \times 6,02 \times 10^{23} \times (97 + 181)^3 \times 10^{-30}}$$

soit  $\rho_{\text{NaCl}} = 2,26 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ .

### 2 Enthalpie de dissolution du chlorure de sodium dans l'eau

**Expérience 1** On place dans un calorimètre une masse  $m_1 = 300 \text{ g}$  d'eau ainsi qu'un thermomètre et un barreau aimanté. L'ensemble est à température ambiante  $T_1 = 20^\circ\text{C}$ . On ajoute rapidement une quantité  $m_2 = 200 \text{ g}$  d'eau à  $T_2 = 60^\circ\text{C}$ . À l'équilibre, on relève une température  $T_3 = 35^\circ\text{C}$ .

**Expérience 2** On introduit dans le même calorimètre, toujours équipé d'un thermomètre et d'un barreau aimanté, une masse  $m_3 = 500 \text{ g}$  d'eau. Le tout est à température ambiante  $T_1 = 20^\circ\text{C}$ .

On introduit ensuite rapidement une masse  $m_4 = 50 \text{ g}$  de chlorure de sodium initialement à la température ambiante  $T_1 = 20^\circ\text{C}$ .

On mesure alors une baisse brutale de température  $\Delta T = -1,5^\circ\text{C}$ .

On note  $c_e$  la capacité calorifique massique de l'eau à pression constante, supposée indépendante de la température. De plus, la capacité calorifique d'une solution sera assimilée à celle de l'eau pure qu'elle contient.

**Q 35.** La capacité thermique du calorimètre équipé et de la masse  $m_1$  d'eau froide est

$$C_1 = C + m_1 c_e.$$

Sa variation d'enthalpie quand la température passe de  $T_1$  à  $T_3$  est

$$\Delta H_1 = (C + m_1 c_e)(T_3 - T_1).$$

La variation d'enthalpie de la masse d'eau chaude dans l'expérience vaut

$$\Delta H_2 = m_2 c_e (T_3 - T_2).$$

L'ensemble étant isolé, le bilan d'enthalpie s'écrit

$$\Delta H = 0.$$

L'enthalpie étant extensive, on a

$$\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2$$

d'où

$$(C + m_1 c_e)(T_3 - T_1) + m_2 c_e(T_3 - T_2) = 0.$$

On en déduit

$$C = m_2 c_e \frac{T_2 - T_3}{T_3 - T_1} - m_1 c_e.$$

On calcule

$$C = 200 \times 4,18 \times \frac{60 - 35}{35 - 20} - 300$$

soit  $C = 1,1 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$ .

**Q 36. État initial :** calorimètre, eau et chlorure de sodium non dissous à  $T_1$ .

**État final :** calorimètre, eau et chlorure de sodium dissous à  $T_1 - \Delta T$ .

L'ensemble étant isolé, la variation d'enthalpie est

$$\Delta H = 0.$$

L'enthalpie étant une fonction d'état, on peut décomposer l'évolution selon un chemin fictif, passant par :

**État intermédiaire :** calorimètre, chlorure de sodium dissous à  $T_1$ .

La première étape consiste donc en une dissolution isotherme du chlorure de sodium ; la variation d'enthalpie vaut alors

$$\Delta H_1 = m_4 \Delta_{\text{diss}} h.$$

La seconde étape consiste en une variation de température du système :

$$\Delta H_2 = [(m_3 + m_4)c_e + C] \Delta T.$$

L'enthalpie étant une fonction d'état, on a

$$\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2$$

soit

$$m_4 \Delta_{\text{diss}} h + [(m_3 + m_4)c_e + C] \Delta T = 0.$$

On en déduit

$$\Delta_{\text{diss}} h = - \frac{(m_3 + m_4)c_e + C}{m_4} \Delta T.$$

On calcule  $\Delta_{\text{diss}} h = 102 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1}$ .

**Q 37.** On a  $\Delta_{\text{diss}} h > 0$  : la dissolution du chlorure de sodium est **endothermique**.

Une augmentation de température déplace l'équilibre de dissolution dans le sens endothermique, c'est-à-dire dans le sens direct ici.

**Une augmentation de température augmente la solubilité du chlorure de sodium dans l'eau pure.**

### 3 Phénomène de corrosion

**Q 38.** Les porteurs de charge assurant le rebouclage du courant électrique dans la goutte sont  $\text{HO}^-$  et  $\text{M}^{n+}$ .

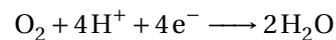
En milieu marin, l'eau contient de plus des ions  $\text{Na}^+$  et  $\text{Cl}^-$  qui augmentent la conductivité de la solution (ils assurent aussi le rebouclage du courant électrique). La corrosion s'est trouvée plus rapide.

**Q 39.** Comme indiqué sur la figure, les oxydants envisagés sont  $\text{H}_2\text{O}$  mais aussi le dioxygène  $\text{O}_2$ .

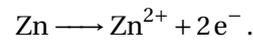
Les réducteurs envisagés sont Fe et Zn.

La réaction privilégiée thermodynamiquement (qui sera celle observée en l'absence de surpotentiels, c'est-à-dire si les systèmes sont rapides) est celle de l'oxydant le plus fort, soit  $\text{O}_2$ , sur le réducteur de plus fort, soit Zn.

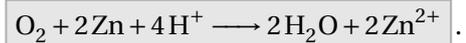
Dans la zone anodique, on a donc l'oxydation



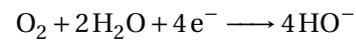
et dans la zone cathodique, on a la réduction



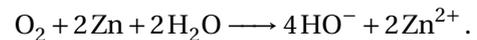
Le bilan est donc



► Si le milieu n'est pas acide, on peut écrire



et le bilan devient



Le zinc forme l'anode qui se fait corroder à la place de la pièce en fer protégée : on parle de protection par **anode sacrificielle**.

**Q 40.** La charge échangée pendant  $\Delta t$  est

$$Q = I \Delta t.$$

En notant  $n_{\text{e}^-}$  et  $n_{\text{Zn}}$  les quantités (en moles) d'électrons et de Zn échangées, comme  $n_{\text{e}^-} = 2n_{\text{Zn}}$ , on a

$$Q = F n_{\text{e}^-} = 2F n_{\text{Zn}}.$$

Avec  $m_{\text{Zn}} = n_{\text{Zn}} M_{\text{Zn}}$ , on a

$$I \Delta t = 2F \frac{m_{\text{Zn}}}{M_{\text{Zn}}}$$

d'où

$$\Delta t = \frac{2F m_{\text{Zn}}}{I M_{\text{Zn}}}.$$

## Partie II : séparateur à courant de Foucault (CCINP PSI 2022)

**Q 41.** Les phénomènes d'induction électromagnétiques peuvent être observés dans deux situations :

- conducteur mobile dans un champ  $\vec{B}$  stationnaire (induction de Lorentz);
- conducteur fixe dans un champ  $\vec{B}(t)$  variable

► On peut avoir une combinaison des deux situations : conducteur mobile dans un champ magnétique variable, comme c'est le cas ici.

**Q 42.** Un volume  $d\tau$  de la particule est soumise à la force de Laplace

$$d\vec{F}_L = j \wedge \vec{B} d\tau = \gamma \vec{E} \wedge \vec{B} d\tau$$

soit avec les champs proposés

$$d\vec{F}_L = \gamma B_0^2 \left( \frac{\omega}{k} - V(t) \right) \cos^2(\omega t - kx) d\tau \vec{e}_x.$$

Le champ magnétique présente la structure d'une onde progressive de longueur d'onde  $\lambda = 2\pi/k$ . Si les dimensions de la particule sont petites devant  $1/k$  (donc devant la longueur  $\lambda$  caractéristique des variations spatiales du champ magnétique), on peut considérer le champ magnétique comme uniforme sur la particule, c'est-à-dire le terme  $\omega - kx$  comme uniforme.

On peut alors directement déduire la force s'exerçant sur la particule :

$$\vec{F}_L = \gamma B_0^2 \left( \frac{\omega}{k} - V(t) \right) \cos^2(\omega t - kx) \tau \vec{e}_x.$$

Dans le cas où  $\omega/k \gg V(t)$ , on peut écrire

$$\vec{F}_L = \gamma B_0^2 \frac{\omega}{k} \cos^2(\omega t - kx) \tau \vec{e}_x.$$

Sa moyenne temporelle est

$$\langle \vec{F}_L \rangle = \frac{\gamma B_0^2 \omega \tau}{2k} \vec{e}_x.$$

**Q 43.** L'augmentation de l'énergie cinétique d'une particule est égale au travail de la force de Laplace moyenne sur la traversée de la zone exposée au champ magnétique :

$$\Delta E_c = \langle \vec{F}_L \rangle a \vec{e}_x$$

soit

$$\Delta E_c = \frac{a \gamma B_0^2 \omega^2 \tau}{2k}.$$

Les particules de type 1 sont conductrices donc

$$\Delta E_c = \frac{1}{m} V_1^2 - \frac{1}{m} V_0^2$$

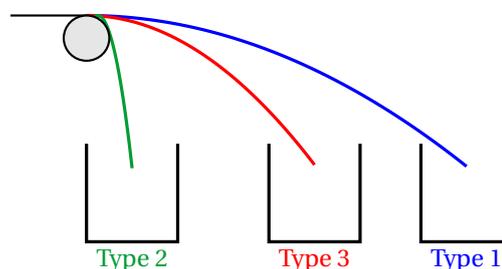
d'où

$$V_1 = \sqrt{V_0^2 + \frac{a \gamma B_0^2 \omega^2 \tau}{km}}.$$

Les particules de type 3 ne sont pas conductrices; on a alors  $\gamma = 0$ , d'où  $\Delta E_c = 0$  et  $V_3 = V_0$ .

**Q 44.** À la sortie du convoyeur, les particules ont une trajectoire balistique parabolique, avec une vitesse initiale horizontale.

Les particules ayant la vitesse initiale la plus grande iront plus loin :



**Q 45.** Les particules de type 2 sont attirées par les zones de fort champ magnétique; elles ont donc tendance à rester dans la zone exposée au champ magnétique au dessus de second rotor (là où le champ est intense). Sous l'effet du mouvement du tapis, on peut s'attendre à ce qu'elles tombent quasiment à l'aplomb du rotor en sortie du convoyeur (cf. figure question précédente).