

# TD de conversion de puissance n° 1

# Puissance en régime sinusoïdal

## 1 — Valeurs efficaces

1. Un signal carré symétrique vaut alternativement  $i(t) = \pm I_m$ . On a donc  $i^2(t) = I_m^2$  constante, égale à sa valeur moyenne.

On en déduit la racine de la moyenne de  $i^2(t)$  :

$$I_{\text{eff}} = I_m .$$

2. On a

$$i^2(t) = \begin{cases} I_m^2 & \text{pour } 0 \leq t < \alpha T \\ 0 & \text{pour } \alpha T \leq t < T \end{cases}$$

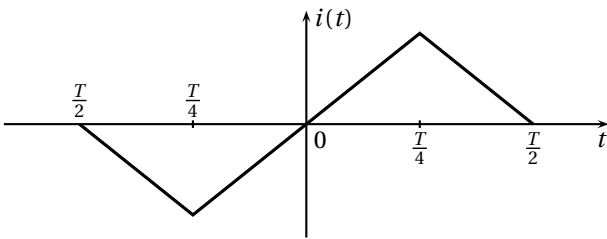
On a donc

$$I_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{\alpha T} I_m^2 dt = \frac{\alpha T}{T} I_m^2 ,$$

d'où

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\alpha} I_m .$$

3. Signal triangulaire symétrique représenté sur une période :



Compte tenu de la parité, on peut écrire

$$I_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} i^2(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} i^2(t) dt .$$

Compte tenu de la symétrie de  $i^2(t)$ , on peut écrire

$$I_{\text{eff}}^2 = \frac{4}{T} \int_0^{T/4} i^2(t) dt .$$

Sur  $[0, T/4]$ , on a

$$i(t) = \frac{I_m}{T/4} t = \frac{4I_m}{T} t ,$$

d'où

$$I_{\text{eff}}^2 = \frac{4}{T} \frac{4^2 I_m^2}{T^2} \int_0^{T/4} t^2 dt = \frac{4^3 I_m^2}{T^3} \frac{1}{3} \left(\frac{T}{4}\right)^3 = \frac{I_m^2}{3} .$$

On en déduit

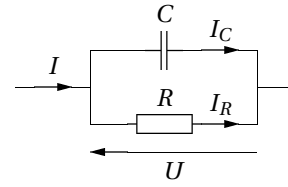
$$I_{\text{eff}} = \frac{I_m}{\sqrt{3}} .$$

## 2 — Angle de pertes d'un condensateur

Pour construire le diagramme de Fresnel, il convient de mettre les signaux sous la même forme « cos » :

$$i(t) = -I_{\text{eff}} \sqrt{2} \sin(2\pi f t - \delta) = I_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(2\pi f t + \pi/2 - \delta) .$$

Le schéma du modèle du condensateur est le suivant :



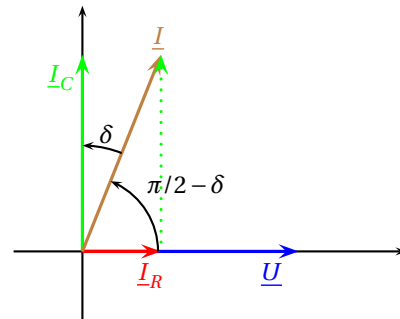
Entre les amplitudes complexes, on a

$$\underline{I} = \underline{I}_C + \underline{I}_R$$

avec

$$\underline{I}_C = jC\omega \underline{U} \quad \text{et} \quad \underline{I}_R = \frac{\underline{U}}{R} .$$

Construisons le diagramme de Fresnel, en plaçant la tension à l'origine des phases. L'intensité  $\underline{I}_C$  présente un déphasage de  $+\pi/2$  avec  $\underline{U}$ .



On en déduit  $\tan \delta = \frac{I_R}{I_C} = \frac{1/R}{C\omega}$  soit

$$\tan \delta = \frac{1}{2\pi f RC} .$$

On calcule  $\delta = 1,8 \times 10^{-3}$  .

Avec la notation

$$i(t) = I_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(2\pi f t + \pi/2 - \delta) ,$$

on remarque que le déphasage du courant par rapport à la tension est  $\varphi_{I/U} = \pi/2 - \delta$ . On a donc

$$\cos \varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = \sin \delta ,$$

et la puissance moyenne  $P = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi$  s'écrit alors

$$P = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin \delta .$$

La puissance moyenne consommée est donnée par

$$P = \text{Re}(\underline{Y}) U_{\text{eff}}^2 .$$

Avec  $\underline{Y} = \frac{1}{R} + jC\omega$ , on a donc

$$P = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R} .$$

On calcule  $P = 2,5 \times 10^{-5} \text{ W}$  .

### 3 — Relèvement du facteur de puissance d'un moteur électrique

Un moteur électrique est alimenté par un courant alternatif de fréquence  $f = 50$  Hz sous une tension efficace  $U_{\text{eff}} = 220$  V. Sa puissance est  $P = 10$  kW et son facteur de puissance est  $\cos \varphi = 0,7$ .

Le moteur est modélisé par l'association en série d'une bobine d'inductance  $L$  et d'un résistor de résistance  $R$ .

1. La puissance consommée par le moteur est donnée par

$$P = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi,$$

d'où

$$I_{\text{eff}} = \frac{P}{U_{\text{eff}} \cos \varphi}.$$

On calcule  $I_{\text{eff}} = 65$  A.

De  $P = RI_{\text{eff}}^2$  on déduit  $R = 2,4 \Omega$ .

2. L'impédance du moteur modélisé par  $R$  en série avec  $L$  est

$$\underline{Z} = R + jL\omega = R + j2\pi fL.$$

On en déduit<sup>1</sup>

$$\tan \varphi = \frac{2\pi fL}{R}.$$

On en déduit  $L = 7,7$  mH.

3. L'admittance de  $C$  en parallèle avec l'association série de  $R$  et  $L$  est

$$\underline{Y} = jC\omega + \frac{1}{R + jL\omega}.$$

Pour exprimer  $\tan \varphi'$ , il faut expliciter les parties réelle et imaginaire :

$$\underline{Y} = jC\omega + \frac{R - jL\omega}{R^2 + L^2\omega^2} = \frac{R}{R^2 + L^2\omega^2} + j\left(C\omega - \frac{L\omega}{R^2 + L^2\omega^2}\right).$$

Comme  $\underline{Z} = Z e^{j\varphi}$ , on a  $\underline{Y} = \frac{1}{Z} e^{-j\varphi}$ . On en déduit

$$\tan \varphi' = -\frac{C\omega - \frac{L\omega}{R^2 + L^2\omega^2}}{\frac{R}{R^2 + L^2\omega^2}}$$

soit

$$\tan \varphi' = \frac{L\omega - C\omega(R^2 + L^2\omega^2)}{R}.$$

4. On déduit de l'expression précédente

$$C = \frac{2\pi fL - R \tan \varphi'}{2\pi f(R^2 + 4\pi^2 f^2 L^2)}.$$

Avec  $\cos \varphi' = 0,9$ , on calcule  $C = 350 \mu\text{F}$ .

Cette valeur est tout à fait accessible.

1. Comme  $\underline{Z} = Z e^{j\varphi}$ , on a  $R = Z \cos \varphi$  et  $L\omega = Z \sin \varphi$ .

### 4 — Facteur de puissance

Une installation électrique est alimentée sous une tension efficace  $U_{\text{eff}} = 200$  V.

Elle consomme une puissance  $P = 12$  kW.

La fréquence est  $f = 50$  Hz et l'intensité efficace  $I_{\text{eff}} = 80$  A.

1. La puissance consommée par l'installation est donnée par

$$P = RI_{\text{eff}}^2.$$

On en déduit  $R = 1,88 \Omega$ .

Pour peut déterminer  $L$  à partir de l'impédance de l'installation :

$$U_{\text{eff}} = Z I_{\text{eff}} \quad \text{avec} \quad Z = |Z| = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}.$$

On en déduit

$$L = \frac{\sqrt{U_{\text{eff}}^2 / I_{\text{eff}}^2 - R^2}}{\omega},$$

d'où  $L = 5,26$  mH.

On peut aussi déterminer le  $\cos \varphi$  à partir de

$$P = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi$$

soit  $\cos \varphi = 0,75$ .

De  $\underline{Z} = R + jL\omega = Z e^{j\varphi}$  on déduit

$$\tan \varphi = \frac{L\omega}{R}.$$

En en déduit la même valeur de  $L$ .

2. On calcule l'admittance de  $C$  en parallèle avec l'installation :

$$\underline{Y} = jC\omega + \frac{1}{R + jL\omega} = \frac{R}{R^2 + L^2\omega^2} + j\left(C\omega - \frac{L\omega}{R^2 + L^2\omega^2}\right)$$

On en déduit comme  $\arg \underline{Y} = -\varphi$

$$-\tan \varphi = \frac{C\omega - \frac{L\omega}{R^2 + L^2\omega^2}}{\frac{R}{R^2 + L^2\omega^2}} = \frac{R^2 + L^2\omega^2}{R} C\omega - \frac{L\omega}{R}.$$

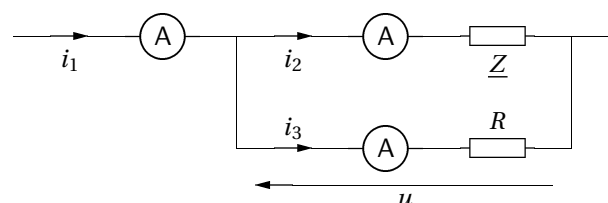
Avec  $\cos \varphi = 0,9$ , on calcule  $\tan \varphi = 0,48$ , et on en déduit

$$C = \frac{-R \tan \varphi + L\omega}{(R^2 + L^2\omega^2)\omega}$$

On calcule  $C = 0,39$  mF.

### 5 — Mesure d'un facteur de puissance par la méthode des 3 ampèremètres

On considère les ampèremètres d'impédance nulle : il n'y a pas de tension à leurs bornes.



1. Prenons l'intensité  $i_2$  pour l'origine des phases. On a donc en amplitudes complexes

$$\underline{I}_2 = I_{2e}\sqrt{2} \quad \text{et} \quad \underline{U} = U_e\sqrt{2}e^{j\varphi},$$

le facteur de puissance cherché étant  $\cos \varphi$ .  
La loi des nœuds s'écrit

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3.$$

Comme  $\underline{U} = R\underline{I}_3$ , l'intensité  $i_3$  présente le même déphasage que la tension avec  $i_2$ .

En notant  $\varphi'$  le déphasage de  $i_1$  avec  $i_2$ , on peut donc écrire

$$I_{1e}e^{j\varphi'} = I_{2e} + I_{3e}e^{j\varphi}.$$

Multiplions par l'expression conjuguée pour en déduire le module :

$$I_{1e}^2 = (I_{2e} + I_{3e}e^{j\varphi})(I_{2e} + I_{3e}e^{-j\varphi}) = I_{2e}^2 + I_{3e}^2 + 2I_{2e}I_{3e}\cos\varphi.$$

On en déduit le facteur de puissance

$$\cos\varphi = \frac{I_{1e}^2 - I_{2e}^2 - I_{3e}^2}{2I_{2e}I_{3e}}.$$

2. La puissance moyenne consommée par le dipôle est donnée par

$$P = U_e I_{2e} \cos\varphi \quad \text{avec} \quad U_e = RI_{3e}.$$

On a donc

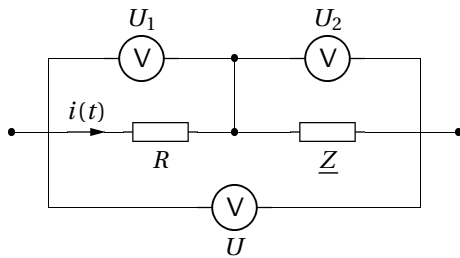
$$P = RI_{2e}I_{3e}\cos\varphi.$$

Avec l'expression précédente, on déduit

$$P = \frac{R}{2}(I_{1e}^2 - I_{2e}^2 - I_{3e}^2).$$

## 6 — Mesure d'un facteur de puissance par la méthode des 3 voltmètres

On considère les voltmètres d'impédance infinie : la même intensité circule dans  $R$  et  $\underline{Z}$ .



Prenons l'intensité  $i$  pour origine des phases. On a donc

$$\underline{I} = I_e\sqrt{2} \quad \text{et} \quad \underline{U}_2 = U_{2e}\sqrt{2}e^{j\varphi}.$$

La tension  $u_1 = ri$  est en phase avec l'intensité :

$$\underline{U}_1 = U_{1e}\sqrt{2}.$$

La loi d'additivité des tensions s'écrit

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2$$

soit en notant  $\varphi'$  le déphasage de  $u$  avec  $i$

$$U_e e^{j\varphi'} = U_{1e} + U_{2e} e^{j\varphi}.$$

En multipliant par l'expression conjuguée

$$U_e e^{-j\varphi'} = U_{1e} + U_{2e} e^{-j\varphi}$$

on obtient

$$U_e^2 = U_{1e}^2 + U_{2e}^2 + 2U_{1e}U_{2e}\cos\varphi,$$

d'où le facteur de qualité

$$\cos\varphi = \frac{U_e^2 - U_{1e}^2 - U_{2e}^2}{2U_{1e}U_{2e}}.$$

Le dipôle consomme la puissance moyenne

$$P = U_{2e}I_e \cos\varphi$$

soit comme  $U_{1e} = RI_e$ ,

$$P = \frac{U_{1e}U_{2e}}{R} \cos\varphi.$$

Avec l'expression précédente, on obtient

$$P = \frac{U_e^2 - U_{1e}^2 - U_{2e}^2}{2R}.$$