TD de conversion de puissance n° 2 Solution

1 — Détermination des caractéristiques d'un transformateur

1. Avec $P = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\varphi$, la valeur maximale correspond au facteur de puissance $\boxed{\cos\varphi = 1}$. On a alors $P_{\text{app}} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$.

2. Avec les valeurs efficaces des grandeurs délivrées par le transformateur, on a $U_2 I_2 = 1{,}5 \times 10^3$ V/A avec $U_2 = 24$ V, d'où $\boxed{I_2 = 62{,}5\ \text{A}}$.

3. Avec une chute de tension relative de 4 % quand le transformateur débite, on a $U_2 = 0{,}96 U_{2\text{v}}$, d'où $U_{2\text{v}} = 25$ V.

4. Le rapport du nombre de spires est donné par le rapport de transformation $m = \dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{25}{380}$, soit $\boxed{m = \dfrac{5}{76}}$.

5. La tension au borne du primaire s'exprime en fonction du flux magnétique commun :

$$u_1(t) = N_1 \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = N_1 S \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t},$$

soit en amplitude complexe

$$\underline{U}_1 = \mathrm{j}\omega N_1 S \underline{B} = \mathrm{j}2\pi f N_1 S \underline{B}.$$

En notant $B_{\max}$ l'amplitude maximum du champ magnétique, on en déduit la valeur efficace de la tension

$$U_1 = \frac{2\pi f N_1 S B_{\max}}{\sqrt{2}}.$$

Le nombre de spires du primaire est donc

$$N_1 = \frac{\sqrt{2} U_1}{2\pi f S B_{\max}} = \frac{\sqrt{2} \times 380}{2\pi \times 50 \times 25 \times 10^{-4} \times 0{,}9}$$

soit $\boxed{N_1 = 760}$. Avec le rapport de transformation, on en déduit $\boxed{N_2 = 50}$.

6. Écrivons le théorème d'Ampère pour un contour dans le milieu magnétique de longueur ℓ :

$$\ell H = N_1 i_1 + 2 i_2.$$

Lorsque le secondaire est vide, on a $i_2 = 0$, d'où

$$N_1 i_1 = \ell H = \ell \frac{B}{\mu_0 \mu_{\text{r}}}.$$

On en déduit le courant efficace dans le primaire

$$I_1 = \frac{\ell B_{\max}}{\sqrt{2} N_1 \mu_0 \mu_{\text{r}}} = \frac{0{,}6 \times 0{,}9}{\sqrt{2} \times 760 \times 4\pi 10^{-7} \times 3180}$$

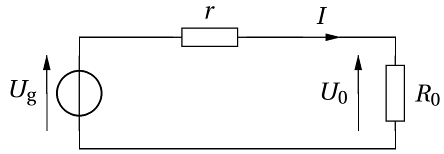
soit $\boxed{I_1 = 0{,}13\ \text{A}}$.

2 — Ligne à haute tension

La longueur totale de la ligne est $\ell = 40$ km ; sa résistance est donc

$$r = \frac{\ell}{\gamma S} = \frac{40 \times 10^3}{5{,}9 \times 10^7 \times 10^{-4}} = 6{,}8\ \Omega.$$

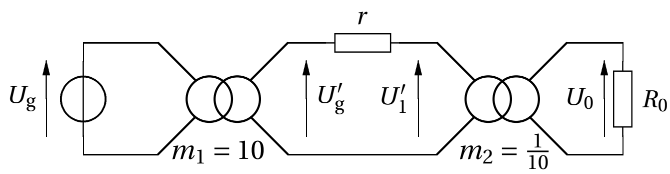
En reliant directement la charge à la source *via* la ligne, on se ramène au circuit



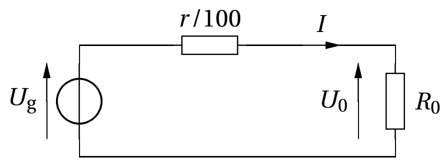
La charge consomme $P_{\text{u}} = R_0 I^2$.
La ligne consomme $P_\ell = r I^2$.
Le générateur fourni $P_{\text{g}} = U_{\text{g}} I$ avec $U_{\text{g}} = U_0 + r I$.
On a $P_{\text{g}} = P_{\text{u}} + P_\ell$.
Le rendement du transfert de puissance est

$$\eta = \frac{P_{\text{u}}}{P_{\text{g}}} = \frac{P_{\text{u}}}{P_{\text{u}} + P_\ell} = \frac{1}{1 + \frac{P_\ell}{P_{\text{u}}}} = \frac{1}{1 + \frac{r}{R_0}} = 0{,}42.$$

Pour minimiser les pertes en ligne, il faut élever la tension en sortie de la source, et la rabaisser avant la charge :
On place de 1er transformateur de façon à avoir un rapport $m_1 = 10$, et le 2nd de façon à avoir un rapport $m_2 = \frac{1}{10}$:



La source est vue, de la sortie du premier transformateur, comme une fém $U'_{\text{g}} = m_1 U_{\text{g}} = 10 U_{\text{g}}$.
Cette fém en série avec r est vue, de la sortie du second transformateur, comme une fém $U''_{\text{g}} = m_2 U'_{\text{g}} = \frac{1}{10} 10 U_{\text{g}} = U_{\text{g}}$ en série avec la résistance $m_2^2 r = \frac{r}{100}$:



On se ramène au cas précédent, avec $r \to r/100$. Le nouveau rendement est

$$\eta' = \frac{1}{1 + \frac{r}{100 R_0}} = 0{,}99.$$

La charge consomme la puissance

$$P_{\text{u}} = \frac{U_0^2}{R_0} = 10{,}6\ \text{kW}.$$

En l'absence de transformateur, le générateur délivre la puissance $P_\mathrm{g} = \dfrac{P_\mathrm{u}}{\eta} = 24{,}9$ kW.
Avec le transformateur, le générateur délivre la puissance $P'_\mathrm{g} = 10{,}7$ kW.
On a ainsi économisé 14,2 kW.

---

3 — Impédance ramenée au primaire

1. Les relations du transformateur sont

$$\underline{u}_2 = m\underline{u}_1 \quad \text{et} \quad \underline{i}_2 = -\frac{1}{m}\underline{i}_1\,.$$

La relation $\underline{u}_2 = -\underline{Z}\,\underline{i}_2$ (la charge est orientée en convention générateur comme le secondaire du transformateur est orienté en convention récepteur) s'écrit

$$\underline{u}_1 = \frac{\underline{u}_2}{m} = -\frac{\underline{Z}}{m}\underline{i}_2 = \frac{\underline{Z}}{m^2}\underline{i}_1\,.$$

On a donc $\boxed{\underline{Z}_\text{éq} = \dfrac{\underline{Z}}{m^2}}$.

2.a) L'ampoule étant parfaitement résistive, tension et intensité sont en phase ; la puissance moyenne absorbée s'écrit donc $P = U_\mathrm{eff}I_\mathrm{eff} = \dfrac{U_\mathrm{eff}^2}{R}$. On en déduit $\boxed{R_1 = 110\ \Omega}$ et $\boxed{R_2 = 440\ \Omega}$.

2.b) Pour utiliser une ampoule américaine sur le réseau français, il faut que sa résistance vue de la source soit multipliée par 4. On peut donc intercaler avant l'ampoule un transformateur de rapport $m = 0{,}5$.

Si on branchait directement l'ampoule américaine sur le réseau français, elle recevrait la puissance $P = \dfrac{U_{2,\mathrm{eff}}^2}{R_1} = 440$ W, quatre fois plus grande que celle prévue, ce qui la détruirait.

---

4 — Facteur de puissance apparent d'un transformateur

1. Notons N_1 et N_2 le nombre de spires des enroulements primaire et secondaire.
Le flux magnétique dans l'enroulement primaire est

$$\Phi_1(t) = N_1 S B(t) = N_1 S B_\mathrm{max}\cos(\omega t)\,.$$

La tension aux bornes du primaires est donc

$$u_1(t) = -e_1(t) = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -N_1 S\omega B_\mathrm{max}\sin(\omega t)\,.$$

Sa valeur efficace est

$$U_1 = \frac{N_1 S 2\pi f}{\sqrt{2}}B_\mathrm{max} = 4{,}44 N_1 S f B_\mathrm{max}\,.$$

On a donc

$$N_1 = \frac{220}{4{,}44\times 10\times 10^{-4}\times 50\times 1}$$

soit $\boxed{N_1 = 990}$.
Le rapport de transformation donne

$$\frac{N_2}{N_1} = m = 0{,}06\,.$$

On a donc $\boxed{N_2 = 59}$.

2. La tension efficace aux bornes du secondaire est

$$u_2(t) = m u_1(t)\,.$$

On a de plus $u_2(t) = -Ri_2(t)$ (la sortie du transformateur est orientée en convention récepteur, la résistance est donc en convention générateur), d'où en valeur efficace

$$I_2 = \frac{mU_1}{R} = \frac{0{,}06\times 220}{5}$$

soit $\boxed{I_2 = 2{,}64\ \mathrm{A}}$.
Appliquons le théorème d'Ampère au contour de longueur ℓ dans le circuit magnétique :

$$\ell H(t) = N_1 i_1(t) + N_2 i_2(t)\,.$$

On a $H(t) = \dfrac{B(t)}{\mu_0\mu_\mathrm{r}} = \dfrac{B_\mathrm{max}}{\mu_0\mu_\mathrm{r}}\cos(\omega t)$.
On a de plus

$$i_2(t) = -\frac{u_2(t)}{R} = -\frac{m u_1(t)}{R} = \frac{m}{R}N_1 S\omega B_\mathrm{max}\sin(\omega t)\,.$$

On en déduit

$$i_1(t) = \frac{\ell B_\mathrm{max}}{N_1\mu_0\mu_\mathrm{r}}\cos(\omega t) - \frac{mN_2 S\omega B_\mathrm{max}}{R}\sin(\omega t)\,.$$

La valeur efficace est donc

$$I_1 = \sqrt{\frac{\ell^2}{2N_1^2\mu_0^2\mu_\mathrm{r}^2} + \frac{m^2N_2^2S^2}{2R^2}}B_\mathrm{max}\,.$$

On calcule

$$I_1 = \sqrt{\frac{0{,}6^2}{2\times 990^2\times(4\pi\times 10^{-7})^2\times 5000^2} + \frac{0{,}06^2\times 59^2\times(10\times 10^{-4})^2\times 4\pi^2\times 50^2}{2\times 5^2}}$$

soit $\boxed{I_1 = 0{,}17\ \mathrm{A}}$.

3. La puissance instantanée reçue au primaire est

$$p_1(t) = u_1(t)i_1(t)\,,$$

soit

$$p_1(t) = -N_1 S\omega B_\mathrm{max}\sin(\omega t)\left[\frac{\ell B_\mathrm{max}}{N_1\mu_0\mu_\mathrm{r}}\cos(\omega t) - \frac{mN_2 S\omega B_\mathrm{max}}{R}\sin(\omega t)\right].$$

La puissance moyenne vaut donc

$$P_1 = \frac{mN_1N_2S^2 4\pi^2 f^2 B_\mathrm{max}^2}{2R}\,.$$

On calcule $\boxed{P_1 = 34{,}6\ \mathrm{W}}$.
Le facteur de puissance est donné par

$$P_1 = U_1 I_2\cos\varphi$$

d'où $\boxed{\cos\varphi = 0{,}92}$.

---

6 — Méthode des pertes séparées

1. On distingue trois causes de pertes dans un transformateur, regroupées en deux catégories :

pertes cuivre effet Joule dans les enroulements; item[pertes fer] par hystérésis magnétique et par effet Joule à cause des courants de Foucault dans le noyau magnétique.

Le bilan de puissance associé s'écrit

$$\boxed{P_1 = P_{c\,1} + P_f + P_{c\,2} + P_2}\,.$$

2. Le secondaire étant ouvert (courant $i_2(t)$ nul), le bilan de puissance devient $P_1 = P_{c1} + P_f$.

Il faut montrer que les pertes cuivre $P_{c1} = R_1 I_{1\,\text{eff}}^2$ au primaire sont négligeables dans le cadre de l'expérience envisagée, où $I_{1\,\text{eff}} = 1{,}0$ A.

Par définition, l'intensité nominale au primaire est

$$I_{1n} = \frac{P_n}{U_{1n}} = \frac{2{,}2\times 10^3}{230} \simeq 9{,}5\,\text{A}\,.$$

On peut alors calculer

$$\frac{R_1 I_{1\,\text{eff}}^2}{R_1 I_{1\,n}^2} = \left(\frac{1}{9{,}5}\right)^2 \simeq 1\times 10^{-2}\,.$$

Ainsi les pertes cuivre au primaire représentent seulement un centième de leur valeur nominale. En les négligeant, le bilan de puissance se réduit aux pertes fer ($P_{10} = P_f$) pour cette expérience.

Il reste à montrer que ces pertes fer ont leur valeur nominale.

La loi des tensions appliquée au primaire s'écrit $u_1'(t) = R_1 i_1(t) + u_1(t)$.

Dans l'expérience considérée, $I_{1\,\text{eff}} \simeq \frac{1}{10} I_{1\,n}$, donc $R_1 I_{1\,\text{eff}} \simeq \frac{1}{10} R_1 I_{1\,n}$. Or, pour un transformateur bien construit, $R_1 I_{1\,n} \ll U_{1\,n}$.

Par conséquent, $R_1 I_{1\,\text{eff}} \ll U_{1\,n}$ et la loi des mailles au primaire se réduit [1] à $u_1'(t) \simeq u_1(t)$.

Par ailleurs, en notant N_1 et N_2 les nombres de spires au primaire et au secondaire, les fem induites e_1 et e_2 sont données, en convention générateur, par la loi de Faraday,

$$e_1(t) = -N_1\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -u_1(t) \quad \text{et} \quad e_2(t) = -N_2\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = +u_2(t)\,,$$

où $\phi(t) = B(t)S$ est le flux magnétique à travers une section du tore ferromagnétique (flux commun).

Comme $U_{1\,\text{eff}}$ a sa valeur nominale $U_{1\,n}$ dans l'expérience, la relation entre Φ et u_1 impose que ϕ ait sa valeur nominale.

Le champ magnétique B dans le tore est donc aussi à sa valeur nominale. Or, ce sont ses variations temporelles qui sont responsables des pertes fer, par conséquent, $\boxed{P_{10} = 80\text{ W représente les pertes fer nominales}}$.

➤ Si le transformateur était idéal, les courants devraient vérifier la relation $\frac{i_2(t)}{i_1(t)} = \frac{u_1(t)}{u_2(t)} = -\frac{N_1}{N_2}$, soit $\frac{I_{2\,\text{eff}}}{I_{1\,\text{eff}}} = \frac{N_1}{N_2}$. Cela devrait imposer $I_{1\,\text{eff}} = 0$ lors d'un essai en secondaire ouvert. La valeur de $I_{1\,\text{eff}}$ non nulle est l'intensité efficace du courant magnétisant.

3.a) Lorsqu'une charge (résistive, par exemple) est branchée sur le secondaire, la loi des mailles au secondaire s'écrit $u_2(t) = R_2 i_2(t) + u_2'(t)$. En multipliant par $i_2(t)$, on obtient le bilan de puissance

$$u_2(t)i_2(t) = R_2 i_2^2(t) + u_2'(t)i_2(t)\,.$$

En régime nominal, et en supposant que la charge n'introduit pas de déphasage, cette relation s'écrit

$$U_{2\,n}I_{2\,n} = R_2 I_{2\,n}^2 + U_{2\,n}' I_{2\,n}\,,$$

ou encore

$$U_{2\,n}I_{2\,n} = R_2 I_{2\,n}^2 + P_{2\,n}\,,$$

la grandeur $P_{2\,n}$ représentant la puissance (nominale) consommée par la charge.

Dans l'expérience présente, le secondaire est court-circuité (la charge est un simple fil, $P_2 = 0$) et l'intensité efficace au secondaire vaut $I_{2\,n}$. Le bilan de puissance (exprimé en grandeurs efficaces) au secondaire s'écrit

$$U_{2\,\text{eff}}I_{2\,n} = R_2 I_{2\,n}^2\,.$$

En effectuant le rapport membre à membre de ces deux bilans de puissance,

$$\frac{U_{2\,\text{eff}}}{U_{2\,n}} = \frac{R_2 I_{2\,n}^2}{R_2 I_{2\,n}^2 + P_{2\,n}} \ll 1\,.$$

Pour un transformateur bien construit, ce rapport est très petit devant 1 (le contraire signifierait que les pertes par effet Joule dans le secondaire ne sont pas négligeables devant la puissance donnée à la charge).

La relation précédente montre donc que, lorsque le secondaire est en court-circuit, $U_{2\,\text{eff}} \ll U_{2\,n}$.

En combinant cela à la relation établie à la question 2 on déduit que le flux commun ϕ est très inférieur à sa valeur en fonctionnement nominal, donc le champ magnétique B également. Les pertes fer, qui croissent avec l'intensité du champ magnétique, sont donc très inférieures à leur valeur nominale.

1. Le passage de l'inégalité $R_1 I_{1\,\text{eff}} \ll U_{1\,\text{eff}}$ sur les grandeurs efficaces à l'inégalité $|R_1 i_1(t)| \ll |u_1(t)|$ sur les grandeurs instantanées n'est pas toujours vrai, car les grandeurs $u_1(t)$ et $i_1(t)$ ne sont pas nécessairement en phase. Cependant, ce sont les effets moyens qui comptent : dans un « bon » transformateur, la chute ohmique due à la résistance d'un enroulement est négligeable devant la fem induite dans cet enroulement.

3.b) Les pertes fer étant réduites dans cette expérience, le transfert de puissance dans le noyau de fer se fait avec un rendement proche de 1, soit $u_1(t)i_1(t) \simeq u_2(t)i_2(t)$, donc

$$\frac{i_1(t)}{i_2(t)} \simeq \frac{u_2}{u_1} = -\frac{N_2}{N_1}$$

(loi de transformation en courant du transformateur idéal).

En grandeurs efficaces, cela implique

$$\frac{I_{1\,\text{eff}}}{I_{2\,\text{eff}}} = \frac{N_2}{N_1}$$

Comme $I_{2\,\text{eff}}$ est à sa valeur nominale $I_{2\,\text{n}}$, ce rapport impose que $I_{1\,\text{eff}}$ soit aussi à sa valeur nominale $I_{1\,\text{n}}$.

Finalement, le bilan de puissance devient

$$P_{1\,\text{cc}} = R_1 I_{1\,\text{n}}^2 + R_2 I_{2\,\text{n}}^2 = P_{\text{cuivre n}} = 75\ \text{W}$$

L'expérience permet de mesurer les pertes cuivre nominales.

➤ On peut confirmer numériquement l'inégalité établie en 3.a.

En prenant, par exemple, $\frac{N_2}{N_1} = 1$, les deux enroulements sont identiques et ont la même résistance, notée R. Les deux courants efficaces sont égaux ($I_{1\,\text{eff}} = I_{2\,\text{eff}} = I_{2\,\text{n}}$) et les fem efficaces aussi ($U_{1\,\text{eff}} = U_{2\,\text{eff}}$). C'est le cas d'un simple transformateur d'isolement. Ainsi, pour l'expérience envisagée, $P_{1\,\text{cc}} = 2RI_{1\,\text{n}}^2$, soit

$$RI_{1\,\text{n}} = \frac{P_{1\,\text{cc}}}{2I_{1\,\text{n}}} = \frac{75}{2 \times 9,5} = 3{,}9\ \text{V}.$$

Pour ce transformateur d'isolement,

$$U_{2\,\text{eff}} = RI_{2\,\text{eff}} = 3{,}9\ \text{V}.$$

Cette fem est bien négligeable devant $U_{2\,\text{n}} = U_{1\,\text{n}} = 230$ V, ce qui est en accord avec la relation établie

4. On repart du bilan de puissance initial. Dans l'essai proposé, la charge est résistive, donc courant et tension sont en phase au secondaire et le facteur de puissance $\cos\varphi$ est égal à 1. La puissance moyenne au secondaire

$$P_2 = U_{2\,\text{eff}} I_{2\,\text{eff}} \cos\varphi = 2{,}0\ \text{kW}$$

s'identifie donc à la puissance apparente $P_{2\,\text{app}} = U_{2\,\text{eff}} I_{2\,\text{eff}}$.

Le transformateur fonctionne alors dans des conditions très proches de la normale (fonctionnement nominal, car la puissance apparente a une valeur proche de la puissance nominale apparente).

Ainsi les pertes ont les valeurs nominales calculées dans les questions précédentes, $P_{\text{fer}} = 80$ W et $P_{\text{cuivre}} = 75$ W.

Le rendement en puissance du transformateur est

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2}{P_2 + P_{\text{fer}} + P_{\text{cuivre}}} = \frac{2{,}0 \times 10^3}{2{,}0 \times 10^3 + 80 + 75} \simeq 0{,}93\,.$$

Le rendement énergétique est de 93 %.

Les pertes représentent 7 % de la puissance fournie au primaire

Ce résultat est cohérent avec un calcul direct du rendement,

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2{,}0}{2,2} = 0{,}91\,.$$

La petite différence entre 0,91 et 0,93 vient des chiffres significatifs sur les puissances données. En effet, les pertes calculées (75 et 80 W) affectent des chiffres significatifs qui ne sont pas présents dans les données de $P_1 = 2{,}2$ kW et $P_2 = 2{,}0$ kW.