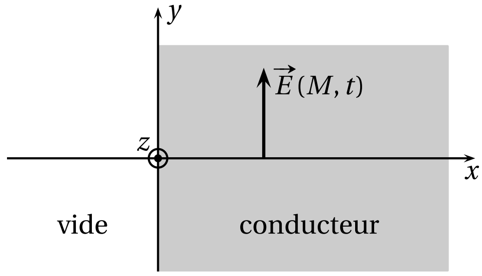
Ondes électromagnétique dans un conducteur ohmique de conductivité réelle

On considère un conducteur ohmique de conductivité réelle γ occupant le demi-espace $x > 0$.
Une onde électromagnétique incidente dans le sens des x croissants pénètre dans le conducteur, son amplitude étant E_0 en $x = 0$.
Le conducteur obéit à la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \gamma \vec{E}$.
L'onde dans le conducteur est plane, pseudo-progressive harmonique, polarisée rectilignement selon $\vec{u}_y$:

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{E}_0 \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \underline{k}x)} \, \vec{u}_y .$$



- ➤ Dans un conducteur, en régime harmonique [1] , on a $\rho(M,t) = 0$: un conducteur ne peut être chargé qu'en surface.
- ➤ Dans un conducteur, pour des fréquences assez basses (par rapport aux fréquences optiques !), peut négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction : $\left|\vec{j}_\mathrm{d}\right| \ll \left|\vec{j}\right|$.

Équation de Maxwell dans le conducteur

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = 0\,; \quad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0\,; \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,; \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \mathrm{j} = \mu_0 \gamma \vec{E} .$$

Équation de la diffusion

> Dans un conducteur ohmique, le champ électrique vérifie l'équation de la diffusion
>
> $$\Delta \vec{E} = \gamma \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} .$$

- ➤ La densité de courant $\vec{j}$ et le champ magnétique $\vec{B}$ vérifient la même équation.

Effet de peau

Le champ $\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{E}_0 \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \underline{k}x)} \, \vec{u}_y$ vérifiant l'équation de la diffusion, on a $\underline{k}^2 = -\mathrm{i}\omega\gamma\mu_0$, d'où $\underline{k} = \pm \frac{1-\mathrm{i}}{\delta}$ avec $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$. On conserve la solution qui n'entraîne pas de divergence pour $x \to +\infty$

> Lorsqu'une OPPH électromagnétique arrive sur un milieu conducteur ohmique sous incidence normale, on observe une onde électromagnétique harmonique atténuée dans le conducteur :
>
> $$\vec{E}(z,t) = \underbrace{E_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)}_{\text{amplitude atténuée}} \underbrace{\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)}_{\text{onde progressive}} \vec{u}_x .$$
>
> L'atténuation se fait sur une distance caractéristique $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$ d'autant plus courte que la pulsation ω est élevée ; le champ électromagnétique ne prend alors de valeur notable que sur une faible épaisseur δ au voisinage de la surface du conducteur : c'est l'**effet de peau**.

- ➤ Dans le cuivre, à $f = 50$ Hz, on a $\boxed{\delta \approx 1 \text{ cm}}$.
- ➤ La propagation dans le métal est dispersive : $v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \omega\delta = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0 \gamma}}$.

1. Dans le cas d'un conducteur soumis à une onde électrique transverse, la relation de Maxwell-Gauss donne directement $\rho = 0$.

Modèle du conducteur parfait

Le conducteur parfait correspond au cas limite $\gamma \to \infty$. L'épaisseur de peau tend alors vers zéro : $\delta \to 0$. On en déduit que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$, ainsi que la densité volumique de courant $\vec{j}$, tendent vers zéro dans le métal.

> Le modèle du conducteur parfait correspond à une épaisseur de peau nulle en présence d'un champ électromagnétique variable.
> On en déduit $\vec{E}(M,t) = \vec{0}$, $\vec{B}(M,t) = \vec{0}$ et $\vec{j}(M,t) = \vec{0}$ dans le conducteur parfait.
> Les charges ne peuvent être que surfaciques et les courants ne peuvent être que surfaciques.

Onde plane transverse électrique harmonique dans un plasma dilué

Un plasma est un gaz ionisé, comportant des cations et des électrons.

Modèle

— Cations de masse M, de charge $+\mathrm{e}$, de densité volumique n_c.

— Électrons de masse m, de charge $-\mathrm{e}$, de densité volumique n_e.

— Neutralité locale en l'absence d'onde : $n_\mathrm{c} = n_\mathrm{e} = n_0$.

— Interactions entre particules négligées (plasma peu dense) ; elles ne sont soumise qu'à l'onde électromagnétique régnant dans le plasma.

— Cations immobiles du fait de leur inertie, comme $M \gg m$ (plasma froid).

On considère une onde transverse électrique harmonique de la forme $\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\vec{E}}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \underline{k}x)}$ avec $\underline{\vec{E}}_0 \cdot \vec{u}_x = 0$ pour une onde transverse se propageant selon $\vec{u}_x$.

Neutralité locale du plasma

> En présence d'une onde électromagnétique transverse, le plasma reste localement neutre : $\rho = 0$. Les ions et les électrons ont la même densité volumique n_0 qu'en l'absence d'onde.

➤ Résultat obtenu avec Maxwell-Gauss, car $\operatorname{div}\underline{\vec{E}} = -\mathrm{i}\underline{k}\,\vec{u}_x \cdot \underline{\vec{E}} = 0$.

Conductivité complexe du plasma

> La conductivité électrique d'un plasma dilué est représentée en notation complexe par un imaginaire pur :
>
> $$\underline{\gamma} = -\mathrm{i}\frac{n_0 e^2}{m\omega}.$$
>
> ➤ Le vecteur densité de courant et le champ électrique sont en quadrature (déphasage de $\pi/2$).
>
> ➤ La puissance moyenne cédée par l'onde au plasma est nulle : $\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = 0$.

➤ On établit ce résultat en appliquant le PFD à un électron en négligeant la force magnétique devant la force électrique (électron non relativiste de vitesse $v \ll \mathrm{c}$ et en considérant le champ électrique uniforme sur la trajectoire de l'électron.

Relation de dispersion

> La relation de dispersion dans un plasma peu dense s'écrit
>
> $$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_\mathrm{p}^2}{c^2} \quad \text{avec} \quad \omega_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m\varepsilon_0}}, \quad \text{pulsation plasma.}$$

➤ Cette relation se déduit des équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère, avec $\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma}\,\underline{\vec{E}}$.

Propagation dispersive dans le domaine de transparence

Le domaine de transparence correspond à $\omega > \omega_{\rm p}$. Le module d'onde k est réel, et

$$\vec{E}(M,t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx)\,.$$

L'onde est progressive et se propage à la **vitesse de phase** $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{\mathrm{c}}{\sqrt{1-\frac{\omega_{\rm p}^2}{\omega^2}}}$.

La vitesse de phase dépend de la pulsation : le phénomène de propagation est alors dit **dispersif**.

La vitesse de groupe est $v_{\rm g} = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \mathrm{c}\sqrt{1-\dfrac{\omega_{\rm p}^2}{\omega^2}}$.

Onde évanescente dans le domaine réactif

Le domaine réactif correspond à $\omega < \omega_{\rm p}$.

Le module d'onde $\underline{k}$ est imaginaire pur : $\underline{k} = \mathrm{i}k''$ avec $k'' = -\dfrac{\sqrt{\omega_{\rm p}^2 - \omega^2}}{c} < 0$. On a alors

$$\vec{E}(M,t) = \vec{E}_0\,\mathrm{e}^{-x/\delta}\cos(\omega t) \quad \text{avec} \quad \delta = -\frac{1}{k''} > 0\,.$$

Il n'y a plus de propagation; on observe une onde stationnaire atténuée, dont l'amplitude décroît sur la distance caractéristique δ : c'est une **onde évanescente**.

- Une onde électrique transverse ne peut se propager dans un plasma que pour $\omega > \omega_{\rm p}$: le plasma se comporte comme un filtre passe-haut.
- Une onde arrivant sur un plasma avec $\omega < \omega_{\rm p}$ ne peut s'y propager : elle se réfléchit à la surface de plasma qui se comporte comme un « miroir ». Il n'y pas d'absorption par le plasma, la puissance moyenne cédée par l'onde au plasma étant nulle.
- La fréquence de coupure $f_{\rm p} = \omega_{\rm p}/(2\pi)$ est reliée à la densité de charges n_0.
  Pour l'ionosphère où $n_0 \approx 10^{-12}\ \mathrm{m}^{-3}$, on a [2] $\boxed{f_{\rm p} \approx 9\ \mathrm{MHz}}$.

Aspect énergétique de l'onde évanescente

Considérons une onde évanescente de champ électrique $\vec{E} = E_0\,\mathrm{e}^{-x/\delta}\cos(\omega t)\,\vec{u}_y$.
Le champ magnétique se déduit de Maxwell-Faraday : $\vec{B} = \dfrac{1}{\delta\omega}E_0\,\mathrm{e}^{-z/\delta}\sin(\omega t - \varphi)\,\vec{u}_z$.
Le vecteur de Poynting vaut

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\delta\mu_0\omega}\,\mathrm{e}^{-2z/\delta}\cos(\omega t - \varphi)\sin(\omega t - \varphi)\,\vec{e}_z\,.$$

Pour $\omega < \omega_{\rm p}$, on observe une onde évanescente caractérisée par une absence de propagation de l'énergie en moyenne temporelle : $\langle\vec{\Pi}\rangle = \vec{0}$.
Toute l'énergie incidente est réfléchie à l'interface du plasma vers le milieu d'où vient l'onde incidente.
Aucune énergie n'est cédée au plasma en moyenne.

- Il ne faut pas confondre l'onde évanescente avec l'effet de peau : dans ce dernier cas, on a un vecteur de Poynting moyen non nul, dont l'intensité diminue au cours de la propagation : l'énergie est cédée au milieu au cours de sa propagation.

2. Numériquement, $f_{\rm p} \approx 9\sqrt{n_0}$.