# TD d'électromagnétisme — Ondes électromagnétiques (vide et milieux)

## 1 — Onde électromagnétique guidée

On considère un guide d'onde à section rectangulaire de surface $ab$, où $a = 2{,}5$ cm et $b = \dfrac{a}{2}$, avec $0 \leqslant x \leqslant a$ et $0 \leqslant y \leqslant b$.
On s'intéresse à la propagation d'une onde ayant pour champ électrique

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)}\, \vec{u}_y.$$

**1.** La longueur d'onde de l'OPPH de même fréquence dans le vide est $\lambda_0 = 3{,}0$ cm. L'onde peut-elle se propager ?

**2.** On rappelle que la valeur maximale de $E$ avant d'observer des étincelles est $E_{\text{max}} = 3{,}0 \times 10^6\ \mathrm{V \cdot m^{-1}}$.

Calculer la puissance maximale transportée par le guide d'onde.

## 2 — Ondes à la surface de l'eau

On donne le champ électrique d'une onde électromagnétique à la surface de l'eau :

$$\vec{E} = E_0\, \mathrm{e}^{-k_2 y}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k_1 z)}\, \vec{e}_x,$$

où $k_1$ et $k_2$ sont des réels positifs.

**1.** Caractériser l'onde et donner une relation entre $k_1$ et $k_2$.

**2.** Calculer $\vec{B}$ et le caractériser.

**3.** Calculer le vecteur de Poynting, sa moyenne temporelle. Conclure.

## 3 — Fils de Litz

Un conducteur de conductivité électrique $\gamma$ réelle occupe le demi-espace $x > 0$. On se place dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS).

**1.** Rappeler la loi d'Ohm locale ainsi que les équations de Maxwell dans l'ARQS.

**2.** Établir l'équation différentielle dont est solution le champ électrique $\vec{E}(x,t)$ dans le conducteur. La mettre sous la forme

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2}$$

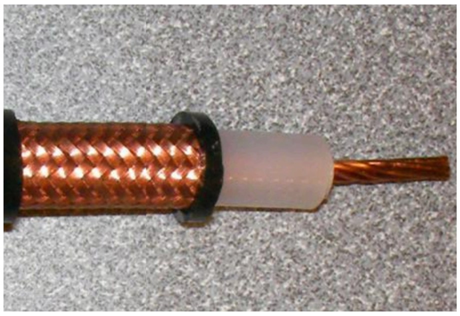
avec $D$ à exprimer. Commenter l'équation obtenue.

**3.** Soit une onde plane progressive harmonique (OPPH) se propageant dans le conducteur selon les $x$ croissants, de représentation complexe $\underline{\vec{E}}(x,t) = \underline{\vec{E}}_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \underline{k} x)}$. Établir la relation de dispersion de cette OPPH. On exprimera $\underline{k}^2$ en fonction des données.

**4.** Montrer que $\underline{\vec{E}}(x,t) = \underline{\vec{E}}_0\, \mathrm{e}^{-x/\delta}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - x/\delta)}$, avec $\delta$ à exprimer en fonction des données. Caractériser la forme de l'onde obtenue et donner la signification physique de $\delta$ ainsi que son ordre de grandeur à 50 Hz pour le cuivre.

**5.** Application.

Un fil de Litz permet de transporter des signaux à haute fréquence. À partir des résultats précédents, expliquer la constitution du fil de Litz présenté ci-dessous.



## 4 — Ça va couper, je plonge !

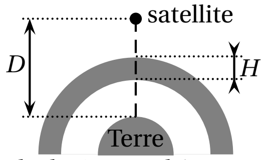
Un sous-marinier communique par ondes radio de fréquences $f = 100$ kHz alors que le sous-marin est à la surface. Il met fin à une discussion qui s'éternise en faisant appel à l'argument « on va plonger, ça va couper ». Son explication est-elle crédible ?
L'eau de mer est un milieu légèrement conducteur, de conductivité électrique $\gamma \approx 5\ \mathrm{S \cdot m^{-1}}$.
On considère la propagation d'une onde plane harmonique électromagnétique de pulsation $\omega$, de la forme $\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\vec{E}}_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \underline{k} z)}$ où $Oz$ est la verticale descendante, $z = 0$ étant à la surface de l'eau.
On admet que dans l'eau, on peut écrire les équations de Maxwell, en remplaçant $\varepsilon_0$ par $\varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r}$, où $\varepsilon_\mathrm{r}$ est un coefficient sans dimension (permittivité diélectrique). Pour l'eau $\varepsilon_\mathrm{r} \approx 80$.
On suppose la neutralité électrique locale réalisée, et on se place dans le cadre de l'ARQS magnétique.
On rappelle : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\,\vec{A}) - \Delta \vec{A}$.

**1.** Écrire les équations de Maxwell dans le contexte de l'étude.

**2.** Établir l'équation vérifiée par $\underline{\vec{E}}(M,t)$ et en déduire la relation de dispersion entre $\underline{k}$ et $\omega$.

**3.** En déduire que les ondes électromagnétiques sont atténuées dans l'eau sur une distance caractéristique $\delta$ que l'on exprimera en fonction de $\mu_0$, $\omega$ et $\gamma$.
Faire l'application numérique pour $f = 100\,\mathrm{kHz}$ et conclure.

## 5 — Atmosphère et GPS




Le système de localisation GPS (*global position system*) est si précis qu'il est nécessaire de prendre en compte la dispersion due à la traversée de la ionosphère. La ionosphère, d'épaisseur $H$ est un plasma localement neutre. Les électrons ont une masse $m$, une charge $e$ et une densité $n$. On envisage une onde électromagnétique plane progressive harmonique.

**1.** Appliquer le principe fondamental aux charges et établir la relation entre
$\vec{j}$ et $\vec{E}$.

**2.** Écrire les équations de Maxwell en complexe. Montrer que $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$. Exprimer $\omega_p$.

**3.** Pourquoi cette pulsation $\omega_p$ est-elle appelée pulsation de coupure ? Calculer la vitesse de groupe.

**4.** Une onde électromagnétique est envoyée par un satellite vers la Terre. Quel est le temps $\tau$ mis pour parcourir la distance $D$ ?
L'espace est assimilé à du vide en dehors de la ionosphère. La fréquence de l'onde est telle que $f \gg f_p$, où $f_p = \dfrac{\omega_p}{2\pi}$, ce qui permet un calcul approché avec un développement limité.

**5.** Pour prendre en compte la dispersion ionosphérique, on envoie deux trains d'onde de fréquences $f_1$ et $f_2$ et on mesure l'écart $\Delta t$ entre leurs temps de parcours. Exprimer $\Delta t$ avec $f_2 > f_1 \gg f_p$.

**6.** Montrer que $D = c\tau - d$, avec $d = \dfrac{f_1^2 f_2^2 c\Delta t}{f^2(f_2^2 - f_1^2)}$. On trouve que $d$ est de l'ordre de quelques mètres. Qu'en penser ?

## 6 — Transparence ultraviolette des métaux

On adopte le modèle de Drude dans un métal : la force exercée par le réseau sur les électrons de conduction est de la forme $-(m/\tau)\vec{v}$. On travaille en notation complexe. On note $n^*$ la densité volumique d'électrons libres.

**1.** Montrer que le métal possède une conductivité complexe

$$\underline{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1 + \mathrm{i}\omega\tau} \quad \text{avec} \quad \sigma_0 = \frac{n^* \mathrm{e}^2 \tau}{m}.$$

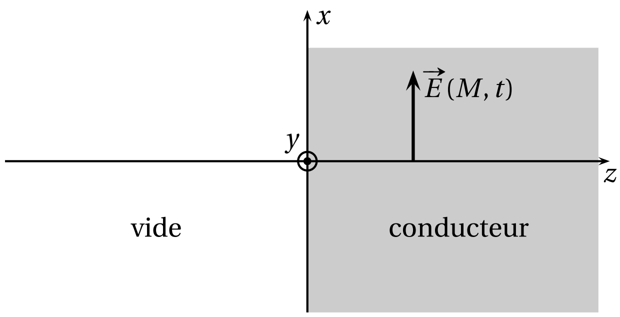
**2.** On rappelle que le métal est localement neutre. En déduire la relation de dispersion des OPPH :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \mu_0 \underline{\sigma} \mathrm{i}\omega.$$

**3.** Comment se simplifie la relation de dispersion pour $\omega\tau \gg 1$ ? Interpréter le fait que certains métaux sont transparents dans l'ultraviolet, avec $n^* \approx 10^{28}\,\mathrm{m^{-3}}$, $m = 9 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, $\mathrm{e} = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ et $\tau \approx 10^{-14}\,\mathrm{s}$.

## 7 — Étude énergétique de l'effet de peau

Un conducteur ohmique de conductivité réelle $\gamma$ occupe le demi-espace $z > 0$. Le système est invariant par translation selon $Ox$ et $Oy$.




On considère la propagation dans le conducteur d'une OPPH (quasi-progressive) incidente, polarisée rectilignement selon $\vec{u}_x$ :

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \underline{k}z)}\,\vec{u}_x \quad \text{pour } z \geqslant 0.$$

**1.** Établir l'équation vérifiée par $\vec{E}(M,t)$ dans le conducteur.

**2.** En déduire la relation de dispersion entre $\omega$ et $\underline{k}$.

**3.** Montrer que $\underline{k} = \pm\dfrac{1-\mathrm{i}}{\delta}$, où l'on exprimera $\delta$ en fonction de $\mu_0$, $\gamma$ et $\omega$.
En déduire l'expression de $\underline{E}(M,t)$ puis du champ réel $\vec{E}(M,t)$. Préciser le choix du signe dans l'expression de $\underline{k}$.

**4.** Déterminer le champ $\vec{B}(M,t)$ dans le conducteur.

**5.** Déterminer le vecteur de Poynting $\Pi(M,t)$ dans le conducteur, puis sa moyenne temporelle $\langle\Pi\rangle$. Dans quel sens se propage l'énergie ? Commenter qualitativement l'évolution de $\langle\Pi\rangle(M)$ avec $z$.

**6.** Déterminer la puissance volumique $p(M,t)$ cédée par le champ au conducteur, puis sa moyenne temporelle $\langle p\rangle$.

**7.** Effectuer un bilan d'énergie moyenne sur un tranche de conducteur de section $S$, comprise entre $z$ est $z + \mathrm{d}z$. Interpréter le résultat.