TD d'électromagnétisme — Ondes électromagnétiques (vide et milieux)

1 — Onde électromagnétique guidée

1. Discussion préliminaire

L'onde est :

— harmonique (dépendance temporelle en $e^{i\omega t}$) ;
— progressive dans le sens des z croissants (terme $\omega t - kz$) ;
— non plane (amplitude dépendant de x dans les plans $z = \text{cet}$) ;
— transverse pour le champ électrique (normal à la direction de propagation $\vec{u}_z$) ;
— polarisée rectilignement selon Oy.

La relation de dispersion $k = \dfrac{\omega}{c}$ n'est pas valable ici : elle est caractéristique des OPPH, mais cette onde n'est pas plane.

Dans le guide, le milieu est le vide ; le champ $\vec{E}$ vérifie donc l'équation de d'Alembert (établir à partir des équations de Maxwell dans le vide) :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \Delta \vec{E} = \vec{0}\,.$$

➤ Nous passons en notation réelle, d'autant que la question suivante traite de la puissance, qui nécessite de passer en notation réelle.

Le champ électrique est

$$\vec{E}(x,z,t) = E(x,z,t)\,\vec{u}_y$$

et

$$E(x,z,t) = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\,.$$

L'équation de d'Alembert en projection selon $\vec{u}_y$ s'écrit alors

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t} - \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = 0$$

soit après simplification par E_0 et les termes en sin et cos présents après une double dérivation

$$-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2 + \frac{\pi^2}{a^2} = 0\,,$$

d'où

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}\,.$$

Cette relation de dispersion ne peut être vérifier que si $\dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{\pi^2}{a^2} > 0$, c'est-à-dire si $\omega > \omega_c = \dfrac{c\pi}{a}$: le guide se comporte comme un filtre passe-haut.

La longueur d'onde dans le vide de l'OPPH de même fréquence est reliée à la pulsation selon

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi c}{\lambda_0}\,.$$

On peut donc écrire et calculer

$$\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2} = \frac{4\pi^2}{\lambda_0^2} - \frac{\pi^2}{a^2} = \frac{4\pi^2}{0{,}03^2} - \frac{\pi^2}{0{,}025^2} = 2{,}8 \times 10^4\ \text{m}^{-2} > 0\,.$$

Le terme étant positif, **l'onde considérée peut se propager**.

2. La puissance véhiculée à travers le guide d'onde (selon Oz) est donnée par le flux du vecteur de Poynting à travers un section du guide. Dans le cadre d'onde électromagnétique, on considère la moyenne temporelle de la puissance véhiculée.

Le vecteur de Poynting est défini par $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$; il faut donc déterminer el champ $\vec{B}$.

➤ La relation de structure $\vec{B} = \dfrac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}}{\mu_0}$ ne peut pas être utilisée ici car elle est relative aux OPPH ; or l'onde étudiée n'est pas plane.

Il faut déterminer $\vec{B}$ à partir des équations de Maxwell. Comme il est bien plus simple de le déterminer à partir de $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ qu'à partir de $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}$, nous allons utiliser la relation de Maxwell-Farady :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,.$$

On calcule

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ E(x,z,t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial E}{\partial z} \\ 0 \\ \dfrac{\partial E}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

On a

$$\frac{\partial E}{\partial z} = kE_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin(\omega t - kz)$$

et

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\pi E_0}{a}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\,,$$

d'où

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = kE_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin(\omega t - kz)\,\vec{u}_x - \frac{\pi E_0}{a}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\,\vec{u}_z\,.$$

On intègre par rapport au temps (constante d'intégration nulle car un terme constant n'est pas caractéristique d'une onde) :

$$\vec{B} = -\frac{kE_0}{\omega}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\,\vec{u}_x - \frac{\pi E_0}{\omega a}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin(\omega t - kz)\,\vec{u}_z\,.$$

➤ On remarque que le champ $\vec{B}$ n'est pas transverse : il possède une composante selon la direction de propagation $\vec{u}_z$. Encore une propriété des ondes planes qui n'est pas vérifiée ici.

Formons le vecteur de Poynting $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$:

$$\vec{\Pi} = \frac{kE_0^2}{\mu_0\omega}\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos^2(\omega t - kz)\,\vec{u}_z$$
$$-\frac{\pi E_0^2}{\mu_0\omega a}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin(\omega t - kz)\cos(\omega t - kz)\,\vec{u}_x\,.$$

➤ On remarque que le vecteur de Poynting possède une composante selon la direction $\vec{u}_z$ de propagation de l'onde, mais aussi une composante transverse selon $\vec{e}_x$.

Comme en moyenne dans temps

$$\langle\cos(\omega t - kz)\sin(\omega t - kz)\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle\cos^2(\omega t - kz)\rangle = \frac{1}{2}\,,$$

on a

$$\boxed{\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{kE_0^2}{2\mu_0\omega}\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\vec{u}_z}\,.$$

➤ En moyenne, l'énergie se propage bien dans la direction de propagation de l'onde.

La puissance (moyenne) transportée par le guide d'onde est donnée par le flux de $\langle\Pi\rangle$ à travers une section droite Σ du guide d'onde (rectangle $a \times \frac{a}{2}$). En notant $\langle\vec{\Pi}\rangle = \Pi_{\text{moy}}(x)\,\vec{u}_z$, on a donc

$$P = \iint_\Sigma \Pi_{\text{moy}}(x)\,\mathrm{d}S = \int_0^a \Pi_{\text{moy}}(x)\frac{a}{2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{a}{2}\frac{kE_0^2}{2\mu_0\omega}\int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{a}{2}\frac{kE_0^2}{2\mu_0\omega}\int_0^a \frac{1-\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2}\frac{kE_0^2}{2\mu_0\omega}\frac{a}{2} = \frac{ka^2E_0^2}{8\mu_0\omega}\,.$$

La puissance maximale est donnée par

$$P_{\max} = \frac{ka^2E_{\max}^2}{8\mu_0\omega}$$

avec

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{\lambda_0^2} - \frac{\pi^2}{a^2}} \quad \text{et} \quad \omega = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$$

soit

$$P_{\max} = \frac{a^2E_{\max}^2}{8\mu_0}\frac{\lambda_0}{2\pi c}\sqrt{\frac{4\pi^2}{\lambda_0^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}\,.$$

Après simplification on obtient

$$\boxed{P_{\max} = \frac{a^2}{8}\sqrt{1 - \frac{\lambda_0^2}{4a^2}}\,\frac{E_{\max}^2}{\mu_0 c}}\,.$$

On calcule

$$P_{\max} = \frac{(2{,}5\times10^{-2})^2}{8}\sqrt{1 - \left(\frac{3{,}0}{2\times2{,}5}\right)^2}\,\frac{(3{,}0\times10^6)^2}{4\pi10^{-7}\times3\times10^8}\,,$$

soit $\boxed{P_{\max} = 1{,}5\ \text{MW}}$.

---

2 — Ondes à la surface de l'eau

1. L'onde est
— harmonique (dépendance sinusoïdale en temps) ;
— progressive dans le sens des z croissants ;
— transverse ;
— polarisée rectilignement selon $\vec{e}_x$;
— elle n'est pas plane du fait du terme $e^{-k_2 y}$.

L'onde étant transverse, la relation de Maxwell-Gauss n'apporte rien (on obtient $0 = 0$).
L'équation de d'Alembert s'écrit

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0\,,$$

d'où après simplification

$$\boxed{k_2^2 - k_1^2 = \frac{\omega^2}{c^2}}\,.$$

2. On a ici

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial z}\vec{e}_y - \frac{\partial E_x}{\partial y}\vec{e}_z = -\mathrm{i}k_1E_0\,e^{-k_2y}\,e^{\mathrm{i}(\omega t - k_1 z)}\,\vec{e}_y$$
$$+ k_2E_0\,e^{-k_2y}\,e^{\mathrm{i}(\omega t - k_1 z)}\,\vec{e}_z = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

d'où

$$\boxed{\vec{B} = \frac{k_1}{\omega}E_0\,e^{-k_2y}\,e^{\mathrm{i}(\omega t - k_1 z)}\,\vec{e}_y + \frac{\mathrm{i}k_2}{\omega}E_0\,e^{-k_2y}\,e^{\mathrm{i}(\omega t - k_1 z)}\,\vec{e}_z}\,.$$

Par rapport au champ $\vec{E}$, le champ $\vec{B}$ n'est pas transverse : il a une composante selon la direction de propagation $\vec{e}_z$.

3. Le vecteur de Poynting se calcule avec les champs réels :

$$\vec{E} = E_0\,e^{-k_2y}\cos(\omega t - k_1 z)\,\vec{e}_x$$

et

$$\vec{B} = \frac{k_1}{\omega}E_0\,e^{-k_2y}\cos(\omega t - k_1 z)\,\vec{e}_y - \frac{k_2}{\omega}E_0\,e^{-k_2y}\sin(\omega t - k_1 z)\,\vec{e}_z\,.$$

On calcule

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \frac{k_1}{\mu_0\omega}E_0^2\,e^{-2k_2y}\cos^2(\omega t - k_1 z)\,\vec{e}_z$$
$$+ \frac{k_2}{\mu_0\omega}E_0^2\,e^{-2k_2y}\cos(\omega t - k_1 z)\sin(\omega t - k_1 z)\,\vec{e}_y\,.$$

En moyenne temporelle :

$$\boxed{\langle\Pi\rangle = \frac{k_1}{2\mu_0\omega} E_0^2\, \mathrm{e}^{-2k_2 y}\, \vec{e}_z}\,.$$

Le vecteur de Poynting instantané n'est pas dans le sens de propagation de l'onde, mais en moyenne temporelle, l'énergie se propage bien selon la direction de propagation de l'onde.

4 — Ça va couper, je plonge !

1. Équations de Maxwell :

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = 0 \quad \text{neutralité locale}; \quad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,; \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} = \mu_0\gamma\vec{E}\,.$$

2.

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\frac{\partial\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}}{\partial t} = -\mu_0\gamma\frac{\partial E}{\partial t}\,,$$

d'où $\boxed{\Delta\vec{E} = \mu_0\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$.

Relation de dispersion $\boxed{\underline{k}^2 = -\mathrm{i}\omega\mu_0\gamma}$.

3. On a $\underline{k}^2 = \omega\mu_\gamma\,\mathrm{e}^{-ic\pi/2}$, d'où $\underline{k} = \sqrt{\omega\mu_0\gamma}\,\dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}} = \dfrac{1-\mathrm{i}}{\delta}$

avec $\boxed{\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0\omega\gamma}}}$.

On a une onde atténuée avec le signe « + » pris pour la racine de $\underline{k}^2$:

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\vec{E}}_0\,\mathrm{e}^{-z/\delta}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - z/\delta)}\,.$$

On calcule $\delta = \sqrt{\frac{2}{4\pi 10^{-7}\times 2\pi 100\times 10^3\times 5}}$ soit $\boxed{\delta \approx 1\ \mathrm{m}}$.
Les ondes seront bien atténuées lorsque le sous-marin plonge.

5 — Atmosphère et GPS

1. Un électron étant soumis à la force $\vec{F} = -e\vec{E}$, le PFD s'écrit $m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -e\vec{E}$.
En régime harmonique, on peut utiliser la notation complexe, les champs variant comme $\exp\left(\mathrm{i}(\omega t - \underline{\vec{k}}\cdot\vec{r})\right)$, le PFD s'écrit

$$\mathrm{i}\omega m\,\underline{\vec{v}} = -e\underline{\vec{E}}\,.$$

Le vecteur densité de courant est relié à la vitesse des charges par $\underline{\vec{j}} = -ne\underline{\vec{v}}$. On en déduit son expression :

$$\boxed{\underline{\vec{j}} = -\mathrm{i}\frac{ne^2}{m\omega}\underline{\vec{E}}}\,.$$

2. On peut écrire les équations de Maxwell en complexe, dans le cas d'un plasma neutre ($\rho = 0$) :
Équation de Maxwell-Gauss : $-\mathrm{i}\,\underline{\vec{k}}\cdot\underline{\vec{E}} = 0$, soit

$$\boxed{\underline{\vec{k}}\cdot\underline{\vec{E}} = 0}$$

Équation de Maxwell-Thomson : $-\mathrm{i}\,\underline{\vec{k}}\cdot\underline{\vec{B}} = 0$, soit

$$\boxed{\underline{\vec{k}}\cdot\underline{\vec{B}} = 0}$$

Équation de Maxwell-Faraday : $-\mathrm{i}\,\underline{\vec{k}}\wedge\underline{\vec{E}} = -\mathrm{i}\omega\underline{\vec{B}}$, soit

$$\boxed{\underline{\vec{B}} = \frac{\underline{\vec{k}}\wedge\underline{\vec{E}}}{\omega}}$$

Équation de Maxwell-Ampère :

$$-\mathrm{i}\,\underline{\vec{k}}\wedge\underline{\vec{B}} = \mu_0\,\underline{\vec{j}} + \mathrm{i}\omega\mu_0\varepsilon_0\underline{\vec{E}} = -\mathrm{i}\frac{\mu_0 ne^2}{m\omega}\underline{\vec{E}} + \mathrm{i}\omega\mu_0\varepsilon_0\underline{\vec{E}}$$

soit avec l'expression de $\underline{\vec{j}}$ obtenue :

$$\boxed{\underline{\vec{k}}\wedge\underline{\vec{B}} = \left(\frac{\mu_0 ne^2}{m\omega} - \frac{\omega}{\mathrm{c}^2}\right)\underline{\vec{E}}}$$

À partir des équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère, on obtient

$$\underline{\vec{k}}\wedge(\underline{\vec{k}}\wedge\underline{\vec{E}}) = \left(\frac{\mu_0 ne^2}{m} - \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2}\right)\underline{\vec{E}}$$

soit en développant le double produit vectoriel :

$$(\underline{\vec{k}}\cdot\underline{\vec{E}})\,\underline{\vec{k}} - \underline{k}^2\underline{\vec{E}} = \left(\frac{\mu_0 ne^2}{m} - \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2}\right)\underline{\vec{E}}$$

Comme $\underline{\vec{k}}\cdot\underline{\vec{E}} = 0$, il vient

$$\left(\underline{k}^2 + \frac{\mu_0 ne^2}{m} - \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2}\right)\underline{\vec{E}} = \vec{0}\,.$$

On en déduit la relation de dispersion

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 ne^2}{m} = \frac{\omega^2 - \dfrac{\mu_0\mathrm{c}^2 ne^2}{m}}{c^2}$$

Elle est de la forme

$$\boxed{\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_\mathrm{p}^2}{\mathrm{c}^2}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{ne^2}{\varepsilon_0 m}}}\,.$$

3. Si $\omega < \omega_p$, on a $\underline{k}^2 < 0$ et $\underline{k} = ik''$ est imaginaire pur. Il n'y a alors pas de propagation possible ; on observe une onde évanescente. **L'onde électromagnétique ne peut se propager dans le plasma que si $\omega > \omega_p$.**

La vitesse de groupe se calcule facilement en différenciant la relation de dispersion : $k\mathrm{d}k = \dfrac{\omega \mathrm{d}\omega}{c^2}$, d'où :

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{kc^2}{\omega} = \frac{c\sqrt{\omega^2-\omega_p^2}}{\omega}$$

soit $\boxed{v_g = c\sqrt{1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$.

4. L'onde se propage dans le vide à la vitesse c et dans l'ionosphère à la vitesse v_g (on envoie un train d'onde ; il faut donc considérer la vitesse de groupe).

Elle met le temps $\tau' = \dfrac{H}{v_g}$ à traverser l'ionosphère, et le temps $\tau'' = \dfrac{D-H}{c}$ à traverser le vide.

La vitesse de groupe ayant pour expression $v_g = c\sqrt{1-\dfrac{f_p^2}{f^2}}$ en fonction des fréquences, le temps total mis pour parcourir la distance D vaut :

$$\tau = \frac{H}{v_g} + \frac{D-H}{c} = \frac{H}{c}\left(1-\frac{f_p^2}{f^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{D-H}{c}$$
$$\approx \frac{H}{c}\left(1+\frac{f_p^2}{2f^2}\right) + \frac{D-H}{c} = \frac{H}{2c}\frac{f_p^2}{f^2} + \frac{D}{c}$$

comme $f \gg f_p$. On a donc $\boxed{\tau = \dfrac{D}{c}\left(1+\dfrac{H}{2D}\dfrac{f_p^2}{f^2}\right)}$.

5. Comme $f_2 > f_1$, les temps de parcours correspondants sont tels que $\tau_1 > \tau_2$. On a :

$$\tau_1 = \frac{D}{c}\left(1+\frac{H}{2D}\frac{f_p^2}{f_1^2}\right) \quad \text{et} \quad \tau_2 = \frac{D}{c}\left(1+\frac{H}{2D}\frac{f_p^2}{f_2^2}\right).$$

L'écart entre les temps de parcours vaut donc $\Delta t = \tau_1 - \tau_2$, soit

$$\boxed{\Delta t = \frac{Hf_p^2}{2cD}\frac{f_2^2-f_1^2}{f_1^2 f_2^2}}.$$

6. D'après l'expression de τ établie à la question 4, on a $c\tau = D + \dfrac{H}{2}\dfrac{f_p^2}{f^2}$. D'après la question 5, on peut écrire

$$\frac{Hf_p^2}{2} = D\frac{f_1^2 f_2^2}{f_2^2-f_1^2}c\Delta t$$

On a donc $D = c\tau - D\dfrac{f_1^2 f_2^2}{f_2^2-f_1^2}c\Delta t\dfrac{f_p^2}{f^2}$, de la forme $D = c\tau - d$ avec

$$\boxed{d = \frac{f_1^2 f_2^2 c\Delta t}{f^2(f_2^2-f_1^2)}}.$$

Si l'on ne tient pas compte de la dispersion dans l'ionosphère, on trouve $D = c\tau$. Le terme d représente donc l'erreur sur la position que l'on fait en négligeant la dispersion. Son ordre de grandeur est bien supérieur à la précision voulue pour la localisation par GPS. Il faut donc tenir compte de la propagation dispersive dans l'ionosphère.

6 — Transparence ultraviolette des métaux

1. On applique le PFD à un électron :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v}$$

soit en notation complexe (régime harmonique)

$$i\omega m\underline{\vec{v}} = -e\underline{\vec{E}} - \frac{m}{\tau}\underline{\vec{v}}$$

d'où

$$\underline{\vec{v}} = -\frac{\tau e}{m(1+i\omega\tau)}\underline{\vec{E}}$$

Le vecteur densité de courant s'écrit

$$\underline{\vec{j}} = -n^* e\underline{\vec{v}} = \frac{\frac{n^* e^2 \tau}{m}}{1+i\omega\tau}\underline{\vec{E}}$$

Il est proportionnel au champ électrique, ce qui permet de définir une conductivité complexe par $\underline{\vec{j}} = \underline{\sigma}\,\underline{\vec{E}}$:

$$\boxed{\underline{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1+i\omega\tau}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\sigma_0 = \frac{n^* e^2\tau}{m}}.$$

2. L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

soit en notation complexe

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\underline{\vec{B}} = \left(\mu_0\underline{\sigma} + \frac{i\omega}{c^2}\right)\underline{\vec{E}}$$

L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ d'où

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) = -\frac{\partial\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}}{\partial t}$$

Le milieu étant neutre, l'équation de Maxwell-Gauss donne $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$. Donc

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\,\vec{E}\right) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E}$$

On a donc

$$-\Delta\underline{\vec{E}} = -\left(\mu_0\underline{\sigma} + \frac{i\omega}{c^2}\right)i\omega\underline{\vec{E}} = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \mu_0\underline{\sigma}i\omega\right)\underline{\vec{E}}$$

Pour une OPPH de la forme $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$, on a $\Delta\underline{\vec{E}} = -k^2\underline{\vec{E}}$; on obtient alors la relation de dispersion

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \mu_0\underline{\sigma}i\omega}$$

3. Si $\omega\tau \gg 1$, on a $\underline{\sigma} \simeq \dfrac{\sigma_0}{\mathrm{i}\omega\tau}$. La relation de dispersion s'écrit alors

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \mu_0 \frac{\sigma_0 \mathrm{i}\omega}{\mathrm{i}\omega\tau} = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0\sigma_0}{\tau}$$

soit

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 n^* e^2}{m}}$$

Le milieu est transparent si $k^2 > 0$ (on a alors $k'' = 0$ en notant $\underline{k} = k' + \mathrm{i}k''$), soit pour

$$\omega^2 > \frac{\mu_0 c^2 n^* e^2}{m} = \frac{n^* e^2}{m\varepsilon_0}$$

c'est-à-dire pour

$$\omega > \omega_c = \sqrt{\frac{n^* e^2}{m\varepsilon_0}} = 5{,}7 \cdot 10^{15}\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$$

ce qui correspond au domaine de longueur d'onde

$$\lambda < \frac{2\pi c}{\omega_c} = 330\ \mathrm{nm}$$

qui inclut le domaine de l'ultraviolet.
Avec la valeur de τ donnée, on vérifie $\omega\tau \simeq 57 \gg 1$.

---

7 — Étude énergétique de l'effet de peau

1. Se reporter au cours :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{\underline{E}}}{\partial z^2} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{\underline{E}}}{\partial t}}.$$

2. On remplace l'expression de $\vec{\underline{E}}$ proposée dans l'équation précédente. Après simplification on obtient

$$\boxed{\underline{k}^2 = -\mathrm{i}\omega\mu_0\gamma}.$$

3. On a

$$\underline{k}^2 = \mu_0\gamma\omega\, e^{-\mathrm{i}\pi/2}$$

d'où

$$\underline{k} = \pm\sqrt{\mu_0\gamma\omega}\, e^{-\mathrm{i}\pi/4} = \pm\sqrt{\frac{\mu_0\gamma\omega}{2}}(1-\mathrm{i})$$

soit

$$\boxed{\underline{k} = \pm\frac{1-\mathrm{i}}{\delta}} \quad \text{et} \quad \boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}}.$$

On a donc

$$\underline{E}(M,t) = E_0\, e^{\mp z/\delta}\, e^{\mathrm{i}(\omega t \mp z/\delta)}\, \vec{u}_x.$$

On choisit le signe qui ne conduit pas à une divergence de l'amplitude [1], d'où

$$\boxed{\underline{E}(M,t) = E_0 \exp e^{-z\delta}\, e^{\mathrm{i}(\omega t - z/\delta)}\, \vec{u}_x}.$$

Prenons la partie réelle :

$$\boxed{\vec{E}(M,t) = E_0\, e^{-z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{u}_x}.$$

4. On peut déterminer le champ magnétique en écrivant Maxwell-Faraday en complexes :

$$-\mathrm{i}\,\vec{\underline{k}} \wedge \vec{\underline{E}} = -\mathrm{i}\omega \vec{\underline{B}}$$

d'où

$$\vec{\underline{B}} = \frac{\vec{\underline{k}} \wedge \vec{\underline{E}}}{\omega} = \frac{1-\mathrm{i}}{\delta\omega} E_0\, e^{-z/\delta}\, e^{\mathrm{i}\omega t - z/\delta)}\, \vec{u}_y.$$

On prend la partie réelle :

$$\boxed{\vec{B}(M,t) = \frac{E_0}{\delta\omega} e^{-z/\delta} \left[\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) + \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right] \vec{u}_y}.$$

5. On forme le vecteur de Poynting $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$, soit

$$\vec{\Pi} = \frac{E_0^2}{\mu_0\delta\omega} e^{-2z/\delta} \left[\cos^2\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) + \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right] \vec{u}_z.$$

Moyenne temporelle :

$$\boxed{\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0\delta\omega} e^{-2z/\delta}\, \vec{u}_z}.$$

L'énergie se propage selon $\vec{u}_z$, direction de propagation de l'onde.

L'amplitude du vecteur de Poynting moyen décroît exponentiellement dans le conducteur, du fait de la dissipation d'énergie par effet Joule dans le conducteur.

6. Les courants volumiques dans le conducteur sont donnés par la loi d'Ohm locale

$$\vec{j} = \gamma E_0\, e^{-z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{u}_x.$$

La puissance volumique cédée par le champ au conducteur est $p(M,t) = \vec{j} \cdot \vec{E}$, soit

$$\boxed{p(M,t) = \gamma E_0^2\, e^{-2z/\delta} \cos^2\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)}.$$

Sa moyenne temporelle vaut

$$\boxed{\langle p \rangle = \frac{\gamma E_0^2}{2} e^{-2z/\delta}}.$$

1. Ce signe donne une partie réelle de $\underline{k}$ positive, soit une propagation dans le sens des z croissants comme attendu.

7. Notons $\langle\overrightarrow{\Pi}\rangle = \Pi_\mathrm{m}(z)\vec{u}_z$ le vecteur de Poynting moyen.
Considérons la tranche de section S, comprise entre z et $z + \mathrm{d}z$.
La puissance moyenne reçue vaut

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\mathcal{P}_\text{reçu} = \Pi_\mathrm{m}(z,t)S - \Pi_\mathrm{m}(z+\mathrm{d}z,t)S = -\frac{\mathrm{d}\Pi_\mathrm{m}}{\mathrm{d}z}S\,\mathrm{d}z \\ = \frac{E_0^2}{\mu_0\delta^2\omega}\,\mathrm{e}^{-2z/\delta}\,S\,\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

soit, comme $\delta^2\mu_0\omega = 2/\gamma$,

$$\mathrm{d}\mathcal{P}_\text{reçu} = \frac{\gamma_0^2}{2}\,\mathrm{e}^{-2z/\delta}\,S\,\mathrm{d}z.$$

La puissance moyenne cédée par effet Joule à cette tranche, de volume $\mathrm{d}\tau = S\,\mathrm{d}z$, vaut

$$\mathrm{d}\mathcal{P}_\mathrm{J} = \langle p\rangle\,\mathrm{d}\tau = \frac{\gamma E_0^2}{2}\,\mathrm{e}^{-2z/\delta}\,S\,\mathrm{d}z.$$

On a donc $\mathrm{d}\mathcal{P}_\mathrm{J} = \mathrm{d}\mathcal{P}_\text{reçu}$: la puissance rayonnée par l'onde diminue au cours de sa propagation ; l'énergie perdue est cédée au conducteur et dissipée par effet Joule.