



CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC

Physique–Chimie 1

PSI

2016

4 heures

Calculatrices autorisées

Certaines questions, repérées par une barre en marge, ne sont pas guidées et demandent de l'initiative de la part du candidat. Elles sont très significativement valorisées dans le barème. Même si elles n'ont pas abouti, les pistes de recherche doivent être consignées par le candidat et seront valorisées si elles sont pertinentes. Le barème tient compte du temps nécessaire pour explorer ces pistes et élaborer un raisonnement.

Fin 2012, une société gérant la production et la distribution d'eau de l'agglomération du Grand Angoulême (110 000 habitants sur 16 communes) a décidé de substituer les deux moteurs asynchrones entraînant la pompe alimentant le château d'eau de Ruelle sur Touvre par un seul moteur synchrone à aimants permanents de puissance 350 W à $1500 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$ commandé par un variateur spécifique. Même s'il s'agit le plus souvent de régime continu, ce dernier participe à réduire la facture énergétique lors de variations de débit imposées. Les pertes rotoriques d'un moteur asynchrone (liées à la différence de vitesse entre le rotor et le champ statorique tournant (glissement)) représentent près du tiers des pertes totales. Les pertes dans un rotor à aimants permanents sont négligeables en comparaison et le variateur n'augmente la consommation énergétique que de 3%. La consommation énergétique de l'installation est réduite de 10% par mètre cube transféré et l'installation peut assurer un débit de 115% de son régime nominal pendant les 8 h de tarif de nuit de consommation électrique. Une étude a montré que le surcoût lié à la vitesse variable serait amorti en 14 mois.

Dans ce sujet, nous nous intéresserons à une autre installation de même type. Après avoir évalué les pertes de charge dans les 8400 m de conduit reliant la pompe au château d'eau, nous proposerons une pompe centrifuge au point de fonctionnement convenable compte tenu du débit et de la hauteur manométrique totale. Une troisième partie sera consacrée à l'étude de principe d'un moteur synchrone à aimants permanents censé entraîner chacune des pompes.

III Remplacement des moteurs asynchrones par des moteurs synchrones à aimants permanents. Évaluation du couple

Les moteurs synchrones à aimants permanents d'assez forte puissance (comme le modèle choisi précédemment) sont en général alimentés par des variateurs produisant un signal de tension et donc des courants sinusoïdaux triphasés. Par souci de simplification, nous étudierons ici un système de courants statoriques diphasés.

III.A – Champ magnétique rotorique

Le rotor sera assimilé à un bloc cylindrique homogène d'axe $z'z$, d'aimantation permanente uniforme d'axe $y'y$. L'axe $x'x$ est un axe fixe dans le référentiel du stator permettant de repérer les angles dans le plan perpendiculaire à $z'z$ (figure 4) :

- α repère la direction de l'axe $y'y$;
- θ repère la position angulaire d'un point M quelconque.

Dans la suite, on s'intéressera surtout aux points M situés dans l'entrefer entre la culasse statorique (de rayon intérieur a) et le rotor (de rayon extérieur $a - e$), soit tels que $a - e < r < a$.

III.A.1) Rappeler la relation entre $\vec{B}_r$, $\vec{H}_r$ et $\vec{M}_r$ représentant respectivement le vecteur champ magnétique, le vecteur excitation magnétique et le vecteur aimantation du milieu magnétique constitutif du rotor.

III.A.2) Au sein des aimants permanents, la relation peut s'écrire $\vec{B} = \mu_0 \mu_p \vec{H} + \vec{J}$, où μ_p est la perméabilité relative de « recul » de l'aimant (légèrement supérieure à l'unité pour les aimants performants) et $\vec{J}$ le champ magnétique rémanent de l'aimant. Au passage du milieu aimanté constituant le rotor à l'entrefer, les continuités aboutissent à l'expression suivante des composantes du champ magnétique rotorique

$$\begin{cases} B_r(r, \theta) = \frac{1}{2}(1 - x_e)^2 \left(1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2\right) J \cos(\theta - \alpha) \\ B_\theta(r, \theta) = -\frac{1}{2}(1 - x_e)^2 \left(1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2\right) J \sin(\theta - \alpha) \end{cases}$$

pour $a - e < r < a$ et $x_e = \frac{e}{a}$.

Sachant que l'entrefer avoisine $e = 3$ mm et l'alésage $a = 15$ cm, on considère un champ magnétique d'entrefer indépendant de r . En déduire l'expression approchée du champ magnétique rotorique.

III.A.3) On note Ω la vitesse angulaire constante du rotor dans le référentiel fixe du stator et on prend $\alpha = \alpha_{rs}$ nul à l'instant initial. Réécrire l'expression simplifiée du champ magnétique rotorique à un instant t en un point M de position angulaire θ dans l'entrefer.

Donner l'allure de la composante radiale du champ rotorique ressenti à l'instant t dans l'entrefer dans la direction $\theta = \pi/2$.

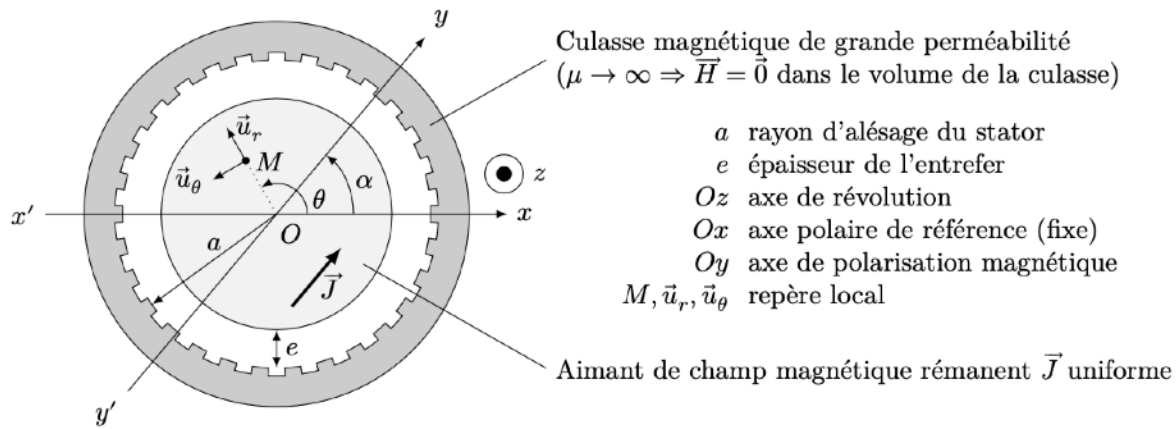


Figure 4

III.B – Champ magnétique statorique

On cherche alors à réaliser un champ magnétique statorique $\vec{B}_s$ tournant à vitesse angulaire constante $\omega_s > 0$ (donc dans le sens direct) grâce à une implantation particulière de spires dans les encoches du stator. Pour cela, nous utiliserons deux enroulements porteurs de courants déphasés de $\pi/2$:

$$\begin{cases} i_1(t) = I \cos(\omega_s t + \beta_s) \\ i_2(t) = I \cos(\omega_s t + \beta_s + \pi/2) \end{cases}$$

Dans un premier temps, une seule paire d'encoches, située sur l'axe perpendiculaire à $x'x$ (figure 5) est bobinée et parcourue par le courant d'intensité $i_1(t)$. On cherche à déterminer le champ $\vec{B}_{s1}$ en tout point M de l'entrefer.

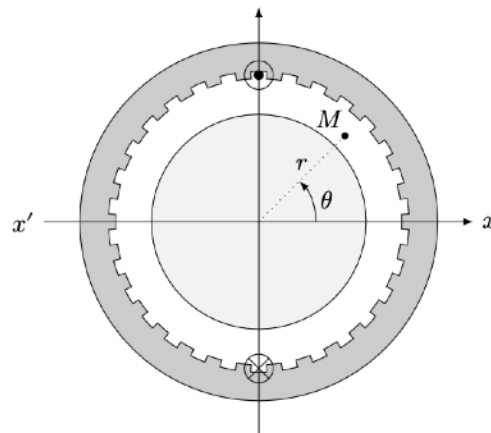


Figure 5

III.B.1) En utilisant le schéma de la figure 5, les symétries et la circulation du vecteur excitation magnétique, montrer que

$$\begin{cases} \vec{B}_{s1}(r, \theta, t) = \frac{\mu_0 i_1(t)}{2e} \vec{u}_r & \text{pour } \theta \in]-\pi/2, \pi/2[\\ \vec{B}_{s1}(r, \theta, t) = -\frac{\mu_0 i_1(t)}{2e} \vec{u}_r & \text{pour } \theta \in]\pi/2, 3\pi/2[\end{cases}$$

III.B.2) Justifier qu'une répartition judicieuse des brins dans des encoches régulièrement réparties autour du stator puisse fournir un champ dont l'allure théorique est de la forme donnée figure 6.

Combien d'encoches réparties correspondent à la courbe de la figure 6 ? Précisez les repères angulaires sur l'axe des abscisses.

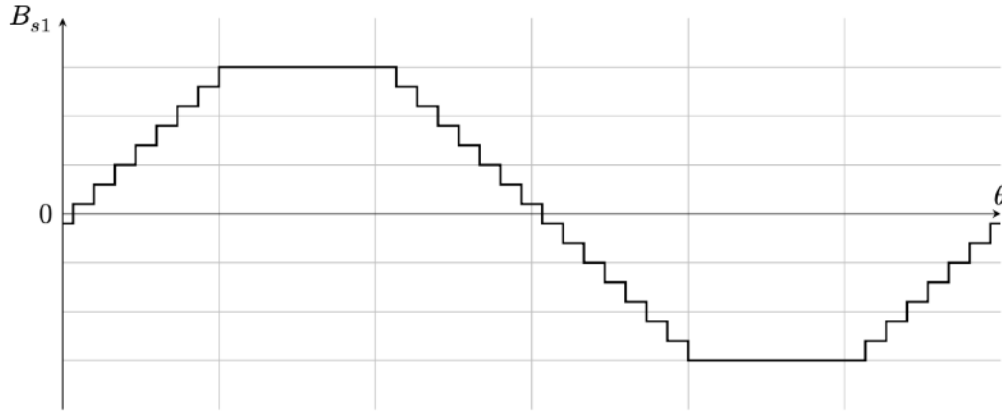


Figure 6

III.B.3) Le champ statorique radial B_{s1} s'approche d'une fonction sinusoïdale de la forme $B_{s1}(\theta, t) \approx K_s i_1(t) \cos \theta$ que l'on prendra désormais comme la contribution réelle du courant $i_1(t)$ dans l'enroulement.

De quoi dépend la constante K_s ?

III.B.4) On rajoute le second enroulement décalé spatialement de l'angle $+\pi/2$ (donc sur l'axe $x'x$). Le courant $i_2(t)$ de cet enroulement est en quadrature retard sur le courant $i_1(t)$.

Montrer que sa participation au champ radial statorique s'écrira $B_{s2}(\theta, t) = K_s I \sin(\omega_s t + \beta_s) \sin \theta$.

III.B.5) Montrer que le champ magnétique statorique résultant est un champ tournant dans le sens trigonométrique à la vitesse angulaire ω_s dont on donnera l'amplitude.

III.C – Énergie magnétique dans l'entrefer

III.C.1) Rappeler l'expression de la densité volumique d'énergie magnétique dans un milieu de perméabilité relative μ_r .

III.C.2) Calculer l'énergie magnétique dans l'entrefer (siège des champs rotorique et statorique) en négligeant les effets de bord et en notant l la longueur du rotor.

On pourra alléger l'expression finale en faisant apparaître le volume d'entrefer $V = 2\pi a e l$.

III.D – Moment électromagnétique s'exerçant sur le rotor

III.D.1) Rappeler l'expression du couple des forces électromagnétiques exercées sur le rotor, à partir de l'énergie magnétique.

En déduire l'expression de ce couple en utilisant le résultat de la question III.C.2.

III.D.2) Quelles conditions sont nécessaires à l'obtention d'un couple moteur moyen positif ?

III.D.3) Discuter le rôle de β_s (angle de « calage » des courants) et la stabilité de deux points de fonctionnement associés à deux valeurs de β_s .

Remplacement des moteurs asynchrones par des moteurs synchrones à aimants permanents - Évaluation du couple.

A - Champ magnétique rotorique

A.1. Dans le milieu magnétique du rotor: $\vec{B}_r = \mu_0 (\vec{H}_r + \vec{M}_r)$

A.2. on a $x_r = \frac{R}{a} \ll 1$ et $\frac{r}{a} \ll 1$.

Donc $B_r(r, \theta) \approx \frac{1}{2} (1)^2 (1+1^2) J \cos(\theta - \alpha) = J \cos(\theta - \alpha)$
 $B_\theta(r, \theta) \approx -\frac{1}{2} (1)^2 (1-1^2) J \sin(\theta - \alpha) = 0.$

$\vec{B} = J \cos(\theta - \alpha) \vec{u}_r.$
 $\alpha = "0_r".$

A.3. La position du rotor est donnée par $\alpha(t) = \Omega t + \alpha_{rs}$ avec $\alpha_{rs} = 0$,

donc $\alpha(t) = \Omega t$

On a donc

$\vec{B}(M, t) = J \cos(\theta - \Omega t) \vec{u}_r$: champ rotorique dans l'entrefer.

Dans la direction $\theta = \pi/2$, on a $B_r(t) = J \cos(\frac{\pi}{2} - \Omega t) = \underline{J \sin(\Omega t)}$.

B - Champ magnétique statorique

B.1 On considère $\mu \rightarrow \infty$: champ radial dans l'entrefer.

en $M(\theta)$ on a $\vec{B} = B(\theta) \vec{u}_r$.

en $M'(\pi - \theta)$ symétrique, on a $\vec{B}(M') = -B(\pi - \theta) \vec{u}_r$.

↪ Contour autour de la spire supérieure: $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_1(t)$.

$\vec{H} \approx \vec{0}$ dans le ferromagnétique, donc $2e H(M) = i_1(t) = 2e \frac{B(M)}{\mu_0}$.

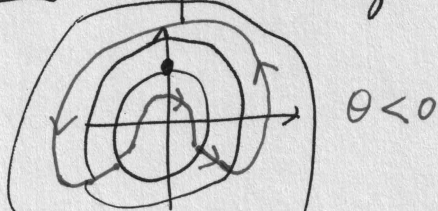
Pour $0 < \theta < \pi/2$ on a $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{2e} i_1(t) \vec{u}_r$.

$[\pi/2 < \theta < \pi]$ $\vec{B} = -\frac{\mu_0}{2e} i_1(t) \vec{u}_r$.

$x'Oxz$ plan antisymétrique $\Rightarrow \vec{B}(-\theta) = B(\theta)$ par la composante radiale.

↪ on complète par l'expression fournie.

⚠ On peut "élargir" la spire pour $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.



B.2. $B(\theta)$ fonction rectangulaire.

On considère des spires réparties symétriquement par rapport à $\theta = \pi/2$ (y'y).

→ Le maxi est en $\theta = 0$.

→ le champ est nul en $\pm \pi/2$ (on considère la contribution d'une paire de spires symétriques).

Chaque paire de spire entraîne un "décalage" π : on a 15 paires de spires.

B.3 K_s dépend $\swarrow$ du nombre de spires.
 $\searrow$ de l'entrefer e (cf B.1).

B.4 : $B_{s2}(\theta, t) = K_s \underset{\substack{\downarrow \\ \text{décalage}}}{i_2(t)} \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = K_s i_2(t) \sin \theta$.

⚠ Il faut $i_2(t) = I \cos(\omega_s t + \beta_s - \pi/2)$ pour obtenir le résultat donné.
 $= I \sin(\omega_s t + \beta_s)$

B.5 . $B_s(\theta, t) = B_{s1}(\theta, t) + B_{s2}(\theta, t) = K_s I [\cos(\omega_s t + \beta_s) \cos \theta + \sin(\omega_s t + \beta_s) \sin \theta]$

soit $B_s(\theta, t) = K_s I \cdot \cos(\omega_s t - \theta + \beta_s)$.

term $\omega_s t - \theta$: tourne dans le sens trigon (sens des "θ croissants") à ω_s .

C Énergie dans l'entrefer

C.1. $w_m = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu_r}$.

C.2. $\mathcal{E} = \iiint_{\text{entrefer}} \frac{B^2}{2\mu_0} dz = \frac{lea}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} [B_r(\theta) + B_s(\theta, t)]^2 d\theta$

$dz = le d\theta$

$$= \frac{lea}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} [J \cos(\theta - 2t) + K_s I \cos(\omega_s t - \theta + \beta_s)]^2 d\theta.$$

On développe le carré:

$$\frac{lea}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} J^2 \cos^2(\theta - 2t) d\theta = \frac{lea}{2\mu_0} \cdot J^2 \cdot \frac{2\pi}{2} = \frac{V}{4\mu_0} J^2.$$

$$\frac{lea}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} K_s^2 I^2 \cos^2(\omega_s t - \theta + \beta_s) d\theta = \frac{lea}{2\mu_0} \cdot K_s^2 I^2 \cdot \frac{2\pi}{2} = \frac{V}{4\mu_0} (K_s I)^2$$

$$\frac{l e a}{\mu_0} \int_0^{2\pi} \underbrace{J K_s I}_{\times J K_s I} \cos(\theta - \Omega t) \cos(\omega_s t - \theta + \beta_s) d\theta = \frac{l e a}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} \cos(\omega_s t - \Omega t + \beta_s) d\theta + \int_0^{2\pi} \cos(2\theta - \Omega t - \omega_s t - \beta_s) d\theta$$

$$= \frac{l e a}{2\mu_0} \cdot 2\pi \cdot \cos[(\omega_s - \Omega)t + \beta_s] = \frac{V}{2\mu_0} \cos[(\omega_s - \Omega)t + \beta_s] \times J K_s I$$

$D'ni$

$$\mathcal{E}_m = \frac{V}{4\mu_0} J^2 + \frac{V}{4\mu_0} (K_s I)^2 + \frac{V}{2\mu_0} J K_s I \cos[(\omega_s - \Omega)t + \beta_s]$$

D. Moment électromagnétique s'exerçant sur le rotor

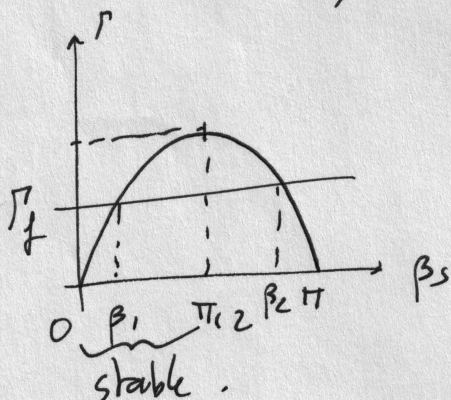
D.1 $\Gamma = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial \alpha} \right)$ on a $\alpha = \Omega t$

$$\rightarrow \mathcal{E}_m = cte + \frac{V}{2\mu_0} J K_s I \cdot \cos(\omega_s t - \alpha + \beta_s)$$

$$\Gamma = \frac{V}{2\mu_0} J K_s I \cdot \sin(\omega_s t - \alpha + \beta_s)$$

D.2 $\langle P \rangle \neq 0$ si $\omega_s t - \Omega t = cte$: condition de synchronisme.

D.3 on a alors $\Gamma = \frac{V}{2\mu_0} J K_s I \sin \beta_s$. il faut $\beta_s > 0$ ($\sin \beta_s > 0$).



Discussion classique sur la stabilité.