Sujet de révision

Transport de charges

1 — Électrolytes

Un électrolyte est une substance conductrice du courant électrique, car elle contient des ions mobiles. Un électrolyte peut être liquide ou solide. Les électrolytes liquides sont des solutions aqueuses dans lesquelles les ions proviennent d'un sel soluble, qui n'est constitué que d'ions. Les électrolytes solides sont des cristaux dans lesquels certains ions sont mobiles, ou des polymères comme ceux utilisés dans les membranes échangeurs d'ions.

On considère un électrolyte aqueux dissocié sous forme d'ions A^- et C^+ , de charges respectives $-e$ et $+e$, et de concentrations respectives c^- et c^+ .

Deux compartiments (I) et (II) contiennent cet électrolyte à des concentrations ioniques c_I et c_{II} (en ions par m^3) avec $c_{II} < c_I$.

On suppose ces deux concentrations suffisamment grandes pour être supposées constantes.

Les compartiments sont séparés par une membrane d'épaisseur L , assimilable à un milieu liquide au sein duquel les ions peuvent migrer parallèlement à l'axe horizontal Ox de vecteur directeur $\vec{u}_x$.

Les deux faces de la membrane sont situées en $x = 0$ et $x = L$.

Dans la membrane existe un champ électrique horizontal $\vec{E} = E(x)\vec{u}_x$, dirigé dans le sens des x croissants (on a donc $E(x) > 0$).

On note $c^+(x)$ et $c^-(x)$ les concentrations respectives des cations et des anions dans la membrane. On considère le phénomène unidimensionnel selon Ox .

1. L'électrolyte étant neutre dans la membrane, montrer que $c^-(x) = c^+(x)$. Dans la suite, on notera $c(x)$ cette concentration commune.

Sous l'effet du champ électrique, les ions sont animés d'un mouvement de migration dû à la force électrique. On montre que la vitesse $\vec{v}^+$ de migration des cations, comme la vitesse $\vec{v}^-$ de migration des anions, est proportionnelle au champ électrique.

On définit la mobilité μ^+ d'un cation par $\vec{v}^+ = \mu^+ \vec{E}$, et la mobilité μ^- d'un anion par $\vec{v}^- = -\mu^- \vec{E}$.

2. Justifier qualitativement que $\mu^+ > 0$ et $\mu^- > 0$.

3. On note $\vec{j}_m^+$ le vecteur densité de courant électrique dû au mouvement de migration des cations.

Exprimer $\vec{j}_m^+$ en fonction de $\vec{v}^+$ et d'autres données, puis en fonction de E , $c(x)$, μ^+ et e .

Exprimer de même le vecteur densité de courant électrique $\vec{j}_m^-$ dû au mouvement de migration des anions en fonction de $\vec{v}^-$ et d'autres données, puis en fonction de E , $c(x)$, μ^- et e .

4. Du fait de la non uniformité de la concentration en ions dans la membrane, il apparaît aussi un courant de diffusion, régi par la loi de Fick.

En notant D^+ le coefficient de diffusion des cations dans la membrane, exprimer le vecteur densité de **courant électrique** $\vec{j}_d^+$ dû à la diffusion des cations dans la membrane en fonction de D^+ , e et $c(x)$.

Exprimer de même le vecteur densité de courant électrique $\vec{j}_d^-$ dû à la diffusion des anions dans la membrane en fonction de D^- , e et $c(x)$.

5. Exprimer le vecteur densité de courant électrique $\vec{j}^+$ total dû à la migration et à la diffusion des cations dans la membrane.

Exprimer de même le vecteur densité de courant électrique $\vec{j}^-$ total dû à la migration et à la diffusion des anions dans la membrane.

En déduire l'expression du vecteur densité de courant électrique total dans la membrane en fonction de e , μ^+ , μ^- , $c(x)$, E et λ , où λ est une constante définie en posant $D^+ = \lambda\mu^+$ et $D^- = \lambda\mu^-$.

Un régime permanent s'établit pour lequel $\vec{j} = \vec{0}$.

6. Exprimer alors le champ électrique sous la forme

$$\vec{E} = \lambda K \frac{d(\ln c)}{dx} \vec{u}_x$$

où K est une constante que l'on exprimera en fonction des mobilités μ^+ et μ^- .

7. On rappelle la relation $\vec{E} = -\text{grad } V$.

En déduire l'expression de la tension $U = V_I - V_{II}$ entre les faces de la membrane de potentiels V_I et V_{II} en fonction de λ , K , c_I et c_{II} .

8. L'électrolyte considéré est une solution de chlorure de sodium $\text{Na}^+ + \text{Cl}^-$.

Calculer U si $\lambda = 26 \text{ mV}$, $\frac{c_I}{c_{II}} = 10$, $\mu^+ = 5,2 \times 10^{-8} \text{ SI}$ et $\mu^- = 8 \times 10^{-8} \text{ SI}$.

9. Calculer la tension U_c pour une membrane semi-perméable, qui arrête complètement les cations.

Calculer la tension U_a pour une membrane semi-perméable, qui arrête complètement les anions.

2 — Semi-conducteurs

Dans tout le problème :

$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ représente la constante de Boltzmann

$N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ représente la constante d'Avogadro

$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ représente la charge élémentaire

1 Modèle de Drude de la conduction électrique (1900)

On considère un matériau conducteur dans lequel les électrons libres sont uniformément répartis dans le volume du matériau. On note n_e le nombre par unité de volume de ces électrons. Les interactions entre les électrons sont négligées et celles entre les électrons et le réseau cristallin sont modélisées par une force de type frottement visqueux subie par chaque électron de masse m selon la relation vectorielle $\vec{f} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$ où τ est une constante propre au matériau et $\vec{v}$ la vitesse d'un électron dans le référentiel lié au matériau conducteur. Un champ électrique $\vec{E}$ est appliqué dans le matériau. On négligera le poids de l'électron devant les autres forces.

1. Quelle est l'unité de τ dans le système international? Justifier.

2. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à un électron dans le référentiel lié au matériau et supposé galiléen, montrer que la vitesse d'un électron tend, en régime permanent, vers une constante que l'on précisera en fonction de $\vec{E}$, m , τ et e la charge élémentaire (positive).

3. En déduire l'expression du vecteur densité volumique de courant électrique $\vec{j}_{el}$ en fonction de $\vec{E}$, m , n_e , e et τ . Donner alors l'expression de la conductivité électrique du matériau en fonction des paramètres précédents.

4. Dans le cas du cuivre, chaque atome libère un seul électron qui participera à la conduction électrique.

La densité du cuivre par rapport à l'eau est $d = 8,9$ et la masse molaire du cuivre est $M_{Cu} = 63,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Donner l'expression littérale du nombre d'électrons de conduction par unité de volume n_e en fonction de d , M_{Cu} et de la constante d'Avogadro N_A .

Effectuer l'application numérique.

Comparer avec la densité électronique du silicium, semi-conducteur très répandu, qui est de l'ordre de 10^{19} cm^{-3} à température ambiante.

2 Résistivité du silicium en fonction de la température

On réalise une pastille cylindrique de silicium comportant n_e électrons de conduction par unité de volume. On mesure la résistance de cette pastille en fonction de la température et on en déduit la résistivité du silicium.

5. Rappeler la relation existant entre la résistance R d'une pastille cylindrique de longueur ℓ et de section S et la résistivité ρ du matériau.

6. Un dispositif permet d'abaisser la température du silicium. On mesure la résistivité du silicium entre 4,2 K (température de liquéfaction de l'hélium) et 12 K. On relève le tableau de mesures suivant :

$T \text{ (K)}$	4,2	4,6	5,0	5,4	6,2	7,0	8,0	10,0	12,0
$\rho \text{ (}\Omega \cdot \text{m)}$	$5,9 \times 10^5$	$6,0 \times 10^4$	9000	1750	125	16,5	2,35	0,15	0,024

Montrer à l'aide d'une représentation graphique **ou** d'une régression linéaire, en utilisant la calculatrice, que la résistivité suit une loi du type $\rho(T) = Ae^{B/T}$.

Calculer B et A . Ne pas oublier les unités!

7. Évaluer la résistivité du silicium à 300 K. La comparer à celle du cuivre qui est de l'ordre de $\rho_{Cu} = 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$.

8. D'après vos connaissances, quand on augmente la température d'un métal comme le cuivre, comment varie la résistivité? En est-il de même pour le silicium?

9. En utilisant la formule de la question 3, montrer que la densité électronique n_e suit une loi dite de Boltzmann de la forme $n_e = n_e^0 \exp\left(-\frac{E_s}{k_B T}\right)$, où l'on ne cherchera pas à déterminer n_e^0 et où k_B représente la constante de Boltzmann. On donnera la valeur numérique de la grandeur E_s en électron-volt.

3 — Mesure du champ magnétique à l'aide d'une magnétorésistance (Mines PSI)

On se propose d'étudier une méthode de mesure du champ magnétique basée sur la magnétorésistance.

On considère un conducteur électrique se présentant sous la forme d'une couronne cylindrique d'axe Oz , de hauteur h , délimitée par un cylindre intérieur de rayon r_1 et par un cylindre extérieur de rayon r_2 . À l'aide d'une source de tension on impose les potentiels $V(r_1) = V_1$ et $V(r_2) = V_2$. On se place en régime permanent et on néglige les effets de bord, ce qui revient à supposer que le comportement de cette couronne est le même que si elle était infiniment haute. L'existence de deux équipotentielles cylindriques permet d'émettre l'hypothèse que le potentiel ne dépend que de r , ainsi

$$V = V(r), \quad \Delta V(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) \quad \text{et} \quad \vec{\text{grad}} V = \frac{dV}{dr} \vec{e}_r.$$

1. Le conducteur étant globalement non chargé, vérifier que l'hypothèse $V = V(r)$ est la seule possible. Déterminer le potentiel électrique en un point M de ce conducteur. En déduire l'intensité E du champ électrique $\vec{E}$ en ce même point en fonction de V_1 , V_2 , r_1 , r_2 et r .

La couronne cylindrique est placée dans un champ magnétique $\vec{B} = B \vec{e}_z$, avec $B > 0$. Le conducteur contient n électrons libres par m^3 . On considère de plus le modèle de Drude dans lequel chaque électron de vitesse $\vec{v}$ est soumis, en plus des forces électromagnétiques, à une force de frottement s'exprimant sous la forme $\vec{F} = -\lambda \vec{v}$ avec $\lambda > 0$.

2. Pour chaque électron, établir, en régime permanent, la relation entre $\vec{v}$, $\vec{B}$ et $\vec{E}$ paramétrée par λ et la charge élémentaire e . En déduire l'expression, dans la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, des coordonnées de $\vec{v}$ en fonction de e , λ , E et B puis celles du vecteur densité volumique de courant $\vec{j}$.

3. Exprimer l'intensité du courant électrique traversant une surface équipotentielle de rayon r . En déduire la résistance électrique R de la couronne en fonction de e , n , λ , B , h , r_1 et r_2 . On note R_0 la résistance en l'absence de champ magnétique. Exprimer l'écart relatif $\varepsilon = \frac{R - R_0}{R_0}$ en fonction de e , B et λ . Calculer la valeur numérique de R_0 ainsi que celle de ε pour $B = 1,0 \text{ mT}$, $r_1 = 1,0 \text{ mm}$, $r_2 = 3,0 \text{ mm}$, $h = 1,0 \text{ mm}$, $n = 1,1 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$ et $\lambda = 1,8 \times 10^{-17} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

Commenter l'utilisation du phénomène pour la mesure de champs magnétiques.