

Sujet de révision

Transport de charges — solution

1 — Électrolytes

1. Une épaisseur dx de membrane contient $c^+(x)Sdx$ cations de charge $ec^+(x)Sdx$ et $c^-(x)Sdx$ anions de charge $-ec^-(x)Sdx$. La charge totale de la tranche étant nulle par neutralité, on a

$$ec^+(x)Sdx - ec^-(x)Sdx = 0$$

d'où $c^-(x) = c^+(x)$.

2. Un cation est soumis à la force électrique $\vec{F}_c = e\vec{E}$. Il se met donc en mouvement dans le même sens que $\vec{E}$: sa vitesse a le même sens que le champ électrique. On a donc $\mu^+ > 0$.

Un anion est soumis à la force électrique $\vec{F}_a = -e\vec{E}$, opposée à $\vec{E}$. Sa vitesse est donc opposée au champ électrique, d'où $\mu^- > 0$.

3. La densité volumique de charge des cations de vitesse $\vec{v}^+$ étant $ec(x)$, le vecteur densité de courant associé à ce mouvement de migration est

$$\vec{j}_m^+ = ec(x)\vec{v}^+.$$

Avec $\vec{v}^+ = \mu^+ E \vec{u}_x$, on en déduit

$$\vec{j}_m^+ = e\mu^+ c(x)E \vec{u}_x.$$

De même le vecteur densité de courant associé à la migration des anions s'écrit

$$\vec{j}_m^- = -ec(x)\vec{v}^-.$$

Avec $\vec{v}^- = -\mu^- E \vec{u}_x$, on en déduit

$$\vec{j}_m^- = e\mu^- c(x)E \vec{u}_x.$$

4. La loi de Fick exprime le vecteur de densité de courant de particules $\vec{j}_{\text{part}}$ dû au gradient de concentration. Pour les cations, on a

$$\vec{j}_{\text{part}}^+ = -D^+ \frac{dc}{dx} \vec{u}_x.$$

Le vecteur densité de courant de charge associé est donné par $\vec{j}_d^+ = e\vec{j}_{\text{part}}^+$, soit

$$\vec{j}_d^+ = -eD^+ \frac{dc}{dx} \vec{u}_x.$$

De même pour les anions, le vecteur densité de courant de particules dû à la diffusion est

$$\vec{j}_{\text{part}}^- = -D^- \frac{dc}{dx} \vec{u}_x.$$

Le vecteur densité de courant de charge associé est donné par $\vec{j}_d^- = -e\vec{j}_{\text{part}}^-$, soit

$$\vec{j}_d^- = eD^- \frac{dc}{dx} \vec{u}_x.$$

5. Le vecteur densité de courant électrique $\vec{j}^+$ total dû à la migration et à la diffusion des cations dans la membrane est donné par

$$\vec{j}^+ = \vec{j}_m^+ + \vec{j}_d^+$$

soit

$$\vec{j}^+ = e\mu^+ c(x)E \vec{u}_x - eD^+ \frac{dc}{dx} \vec{u}_x.$$

De même pour les anions, on a

$$\vec{j}^- = \vec{j}_m^- + \vec{j}_d^-$$

soit

$$\vec{j}^- = e\mu^- c(x)E \vec{u}_x + eD^- \frac{dc}{dx} \vec{u}_x.$$

En posant $D^+ = \lambda\mu^+$ et $D^- = \lambda\mu^-$, on en déduit l'expression du vecteur densité de courant électrique total dans la membrane $\vec{j} = \vec{j}^+ + \vec{j}^-$:

$$\vec{j} = e(\mu^+ + \mu^-)c(x)E \vec{u}_x + \lambda e(\mu^- - \mu^+) \frac{dc}{dx} \vec{u}_x.$$

6. Avec $\vec{j} = \vec{0}$, on a

$$e(\mu^+ + \mu^-)c(x)E = \lambda e(\mu^+ - \mu^-) \frac{dc}{dx}$$

soit

$$E = \lambda \frac{\mu^+ - \mu^-}{\mu^+ + \mu^-} \frac{1}{c} \frac{dc}{dx} = \lambda \frac{\mu^+ - \mu^-}{\mu^+ + \mu^-} \frac{d(\ln c)}{dx}.$$

On a donc

$$\vec{E} = \lambda K \frac{d(\ln c)}{dx} \vec{u}_x \quad \text{avec} \quad K = \frac{\mu^+ - \mu^-}{\mu^+ + \mu^-}.$$

7. Avec $E = -\frac{dV}{dx}$, on a

$$\frac{dV}{dx} = -\lambda K \frac{d(\ln c)}{dx} \vec{u}_x,$$

soit

$$dV = -\lambda K d(\ln c).$$

La tension entre les faces de la membranes est donnée par

$$U = V_I - V_{II} = \int_{V_{II}}^{V_I} dV = -\lambda K \int_{\ln(c_{II})}^{\ln(c_I)} d(\ln c) = -\lambda K \ln \frac{c_I}{c_{II}}$$

soit

$$U = \lambda K \ln \frac{c_{II}}{c_I}.$$

8. On calcule

$$U = 26 \frac{5,2 - 8}{5,2 + 8} \ln \frac{1}{10}$$

soit $U = 12,7 \text{ mV}$.

9. Si les cations sont complètement arrêtés, cela revient à considérer que la mobilité des cations est nulle; on reprend le résultat précédent avec $\mu^+ = 0$, d'où $K = -1$ et

$$U_c = -\lambda \ln \frac{c_{II}}{c_I}$$

soit $U_c = -60 \text{ mV}$.

Les anions sont complètement arrêtés si $\mu^- = 0$, d'où $K = 1$ et

$$U_a = a\lambda \ln \frac{c_{II}}{c_I}$$

soit $U_a = 60 \text{ mV}$.

2 — Semi-conducteurs

1 Modèle de Drude de la conduction électrique (1900)

1. Comme $[f] = MLT^{-2}$, on a

$$\left[\frac{m}{\tau} v \right] = MLT^{-2} = \frac{M}{[\tau]} LT^{-1}$$

donc $[\tau] = T$: la constante τ s'exprime en **secondes**.

2. On applique le principe fondamental de la dynamique à un électron :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v}.$$

En régime permanent, la vitesse de l'électron est donc donnée par

$$\vec{0} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v}_{\text{lim}}$$

soit

$$\vec{v}_{\text{lim}} = -\frac{e\tau}{m} \vec{E}.$$

3. Le vecteur densité volumique de courant électrique est donné par

$$\vec{j}_{\text{el}} = -en_e \vec{v}_{\text{lim}}$$

soit

$$\vec{j}_{\text{el}} = \frac{e^2 \tau n_e}{m} \vec{E}.$$

On retrouve la loi d'Ohm locale $\vec{j}_{\text{el}} = \gamma \vec{E}$ avec la conductivité électrique

$$\gamma = \frac{e^2 \tau n_e}{m}.$$

4. La masse volumique du cuivre est

$$\rho_{\text{Cu}} = d\rho_{\text{eau}} = 1000d$$

avec $\rho_{\text{eau}} = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Un volume V a une masse $m = \rho_{\text{Cu}} V$ et contient $\frac{\rho_{\text{Cu}} V}{M_{\text{Cu}}}$ moles d'atomes de cuivre, soit $\frac{\rho_{\text{Cu}} N_A V}{M_{\text{Cu}}}$ atomes de cuivre, qui libèrent autant d'électrons.

La densité volumique d'électrons de conduction vaut donc

$$n_e = \frac{\rho_{\text{Cu}} N_A}{M_{\text{Cu}}}$$

soit

$$n_e = 1000 \frac{dN_A}{M_{\text{Cu}}}.$$

On calcule $n_e = 1000 \times \frac{8,9 \times 6,02 \times 10^{23}}{63,5 \times 10^{-3}}$, soit

$$n_e = 8,4 \times 10^{28} \text{ m}^{-3} = 8,4 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}.$$

Cette densité est 8000 fois plus élevée que pour le silicium : le cuivre est un bien meilleur conducteur.

2 Résistivité du silicium en fonction de la température

5. La résistance de la pastille s'écrit

$$R = \frac{\rho \ell}{S}.$$

6. La loi proposée s'écrit

$$\ln \rho(T) = \frac{B}{T} + \ln A.$$

La représentation de $\ln \rho$ en fonction de $\frac{1}{T}$ doit donner une droite de pente B et d'ordonnée à l'origine $\ln A$.

Une régression linéaire à la calculatrice donne

$$\ln \rho = \frac{110}{T} - 12,89$$

d'où

$$A = 2,5 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{m} \quad \text{et} \quad B = 110 \text{ K}.$$

Avec $\rho = Ae^{B/T}$, on déduit que A a la dimension d'une résistivité électrique, et B a la dimension d'une température (l'argument d'une exponentielle est sans dimension).

7. Avec la loi proposée, on calcule

$$\ln \rho(300 \text{ K}) = \frac{110}{300} - 12,89 = -12,52$$

d'où

$$\rho(300 \text{ K}) = 3,6 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}.$$

La résistivité du silicium est 300 fois plus importante que celle du cuivre à température ambiante.

8. Dans le modèle de Drude, le temps caractéristique τ peut s'interpréter comme le temps moyen entre deux collision d'un électron de conduction avec les impuretés du réseau. Quand on augmente la température, la vitesse d'agitation thermique des électrons augmente, donc la durée τ entre deux chocs diminue. D'après l'expression établie à la question 3, la conductivité diminue. On en déduit que **la résistivité d'un métal augmente quand on augmente la température.**

D'après les données, le silicium présente un comportement inverse : sa résistivité diminue lorsque la température augmente.

9. La résistivité est $\rho = 1/\gamma$, soit d'après l'expression établie à la question 3

$$\rho = \frac{m}{e^2 \tau n_e} = A e^{B/T}.$$

On en déduit

$$n_e = \frac{m}{e^2 \tau A} e^{-B/T}.$$

En identifiant avec la loi de Boltzmann, on obtient

$$E_s = k_B B.$$

On calcule $E_s = 1,52 \times 10^{-21} \text{ J}$; avec $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$ on en déduit $E_s = 9,5 \times 10^{-3} \text{ eV}$.

3 — Mesure du champ magnétique à l'aide d'une magnétorésistance (Mines PSI)

1. La distribution étant invariante par translation selon Oz (effets de bord négligés), $V(M)$ est indépendant de z ; de même l'invariance par rotation autour de Oz permet de conclure que $V(M)$ ne dépend pas de θ . L'hypothèse $V = V(r)$ est donc la seule possible.

Le conducteur n'étant pas chargé, le potentiel vérifie l'équation de Laplace

$$\Delta V = 0 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right),$$

d'où

$$r \frac{dV}{dr} = A_1 \quad \text{et} \quad V(r) = \frac{A_1}{r} + A_2.$$

On détermine les constantes avec les conditions aux limites

$$\begin{aligned} V_1 &= A_1 \ln r_1 + A_2 \\ V_2 &= A_1 \ln r_2 + A_2. \end{aligned}$$

On en déduit

$$A_1 = \frac{V_2 - V_1}{\ln(r_2/r_1)} \quad \text{et} \quad A_2 = V_1 - \frac{V_2 - V_1}{\ln(r_2/r_1)},$$

d'où

$$V(r) = V_1 + (V_2 - V_1) \frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}. \quad (1)$$

Le champ électrique est donné par

$$\vec{E} = -\text{grad} V \vec{e}_r = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r,$$

soit

$$\vec{E} = \frac{V_1 - V_2}{\ln(r_2/r_1)} \frac{\vec{e}_r}{r}. \quad (2)$$

2. Appliquons le PFD à un électron dans le référentiel galiléen lié au matériau. En régime permanent, on obtient

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} = -e\vec{E} - e\vec{v} \wedge \vec{B} - \lambda \vec{v},$$

d'où

$$\lambda \vec{v} = -e\vec{E} - e\vec{v} \wedge \vec{B}. \quad (3)$$

Les champs sont de la forme

$$\vec{E} = E \vec{e}_r \quad \text{et} \quad \vec{B} = B \vec{e}_z.$$

L'équation (3) conduit alors à

$$\vec{v} \cdot \vec{e}_z = 0,$$

soit $v_z = 0$: la vitesse n'a pas de composante selon $\vec{e}_z$ et s'écrit alors

$$\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta.$$

En remplaçant dans (3) on obtient

$$\begin{aligned} \lambda(v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta) &= -eE \vec{e}_r - e(v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta) \wedge B \vec{e}_z \\ &= -eE \vec{e}_r + e v_r B \vec{e}_\theta - e v_\theta B \vec{e}_r. \end{aligned}$$

En identifiant les composantes radiale puis orthoradiale de cette équation, on obtient

$$\begin{cases} \lambda v_r &= -eE - e v_\theta B \\ \lambda v_\theta &= e v_r B \end{cases}$$

On a donc

$$\lambda v_r = -eE - eB \frac{eB}{\lambda} v_r$$

d'où

$$v_r = -\frac{\lambda e}{\lambda^2 + e^2 B^2} E \quad \text{et} \quad v_\theta = -\frac{e^2 B}{\lambda^2 + e^2 B^2} E.$$

Le vecteur densité volumique de courant est donné par $\vec{j} = -ne\vec{v}$, soit

$$\vec{j} = ne^2 \left[\frac{\lambda}{\lambda^2 + e^2 B^2} \vec{e}_r + \frac{eB}{\lambda^2 + e^2 B^2} \vec{e}_\theta \right] E. \quad (4)$$

3. Le potentiel ne dépendant que de r , les surfaces équipotentielles sont les cylindres d'axe Oz et de rayon r . L'intensité du courant électrique traversant un cylindre de rayon r et de hauteur h est donnée par

$$I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint j_r(r) dS$$

comme $dS = dS \vec{e}_r$, soit

$$I = 2\pi r h j_r(r) \quad \text{avec} \quad j_r(r) = \frac{\lambda n e^2}{\lambda^2 + e^2 B^2} E.$$

On en déduit

$$I = 2\pi r h n e^2 \frac{\lambda}{\lambda^2 + e^2 B^2} E.$$

La résistance de la couronne est donnée par la loi d'Ohm.

$$V_1 - V_2 = RI.$$

Avec l'équation (2), on obtient

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= R 2\pi r h n e^2 \frac{\lambda}{\lambda^2 + e^2 B^2} \frac{V_1 - V_2}{r \ln(r_2/r_1)} \\ &= R \frac{2\pi n e^2 \lambda h}{\lambda^2 + e^2 B^2} \frac{1}{\ln(r_2/r_1)}, \end{aligned}$$

$$R = \frac{\lambda^2 + e^2 B^2}{2\pi n e^2 \lambda h} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right).$$

En l'absence de champ magnétique, la résistance vaut

$$R_0 = \frac{\lambda^2}{2\pi n e^2 \lambda h} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right).$$

On en déduit

$$\varepsilon = \frac{R - R_0}{R_0} = \left(\frac{eB}{\lambda}\right)^2.$$

On calcule $R_0 = \frac{1,8 \times 10^{-17} \times \ln(3)}{2\pi \times 1,1 \times 10^{21} \times (1,6 \times 10^{-19})^2 \times 1,0 \times 10^{-3}}$, soit

$$R_0 = 112 \, \Omega,$$

et

$$\varepsilon = 7,9 \times 10^{-11}.$$

La variation relative de la résistance est très faible, ce qui rend ce dispositif très délicat d'utilisation pour mesurer un champ magnétique.