

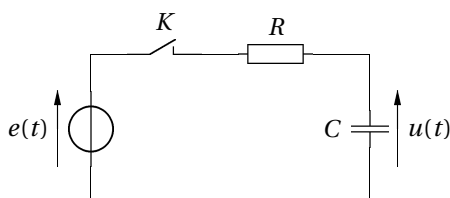
Électronique

Exercice corrigé

Il s'agit ici d'étudier le régime transitoire préalable à l'établissement du régime harmonique pour un circuit du premier ordre.

Énoncé

On considère le circuit suivant :



La source de tension délivre $e(t) = E \sin(\omega t)$.

Le condensateur étant initialement déchargé, on ferme l'interrupteur K .

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ et déterminer sa solution. On notera τ la constante de temps du circuit.

2. Tracer¹ l'évolution de $u(t)$ dans les cas :

2.a) $\omega = 0,1/\tau$;

2.b) $\omega = 1/\tau$;

2.c) $\omega = 10/\tau$.

Pour chaque cas, on interprétera le graphe obtenu.

3. Retrouver la solution en régime établi en utilisant la notation complexe.

1. On pourra utiliser python.

Solution

1. On a

$$e(t) = u + Ri = u + RC \frac{du}{dt}$$

soit

$$\tau \frac{du}{dt} + u(t) = E \sin(\omega t) \quad \text{avec} \quad \tau = RC.$$

La solution générale s'écrit

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t)$$

où $u_h(t)$ est la solution générale de l'équation générale, et $u_p(t)$ une solution particulière de l'équation complète.

On a

$$u_h(t) = A e^{-t/\tau}.$$

On cherche la solution particulière de la même forme que le second membre, c'est-à-dire sinusoïdale de la même pulsation :

$$u_p(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t).$$

On a alors

$$\frac{du}{dt} = -\alpha \omega \sin(\omega t) + \beta \omega \cos(\omega t)$$

et l'équation différentielle donne

$$\begin{aligned} \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t) - \alpha \omega \tau \sin(\omega t) + \beta \omega \tau \cos(\omega t) \\ = E \sin(\omega t), \end{aligned}$$

soit

$$(\alpha + \beta \omega \tau) \cos(\omega t) + (\beta - \alpha \omega \tau - E) \sin(\omega t) = 0, \quad \forall t$$

On en déduit

$$\alpha + \beta \omega \tau = 0 \quad \text{et} \quad \beta - \alpha \omega \tau - E = 0$$

d'où

$$\beta = \frac{E}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad \text{et} \quad \alpha = -\frac{\omega^2 E}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

soit

$$u_p(t) = \frac{E}{1 + \omega^2 \tau^2} [-\omega t \cos(\omega t) + \sin(\omega t)].$$

► La solution particulière ne dépend pas des conditions initiales, ce qui est une propriété du régime établi.

La solution générale de l'équation complète est alors

$$u(t) = A e^{-t/\tau} + \frac{E}{1 + \omega^2 \tau^2} [-\omega t \cos(\omega t) + \sin(\omega t)].$$

La constante est déterminée par la condition initiale $u(0) = 0$, soit

$$A - \omega \tau \frac{E}{1 + \omega^2 \tau^2} = 0.$$

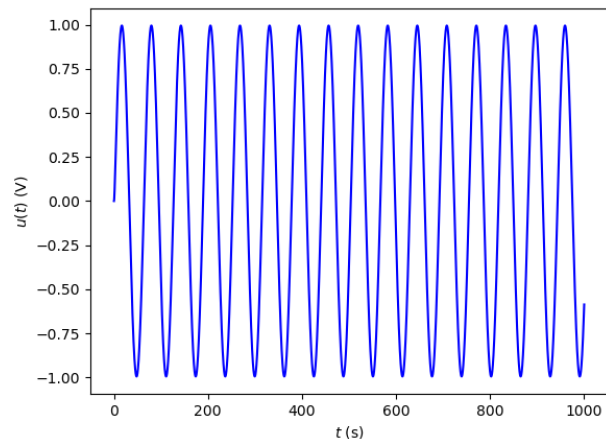
On a alors

$$u(t) = \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} E e^{-t/\tau} + \frac{E}{1 + \omega^2 \tau^2} [-\omega t \cos(\omega t) + \sin(\omega t)].$$

► Attention : la condition initiale s'applique à la solution générale de l'équation *complète*, et non à la solution générale de l'équation homogène.

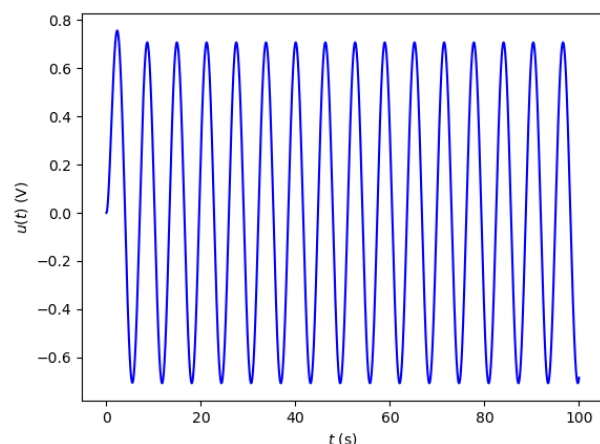
2. Les graphes sont tracés en prenant $E = 1$ et $\tau = 1$.

2.a) Cas $\omega = 0,1/\tau$.



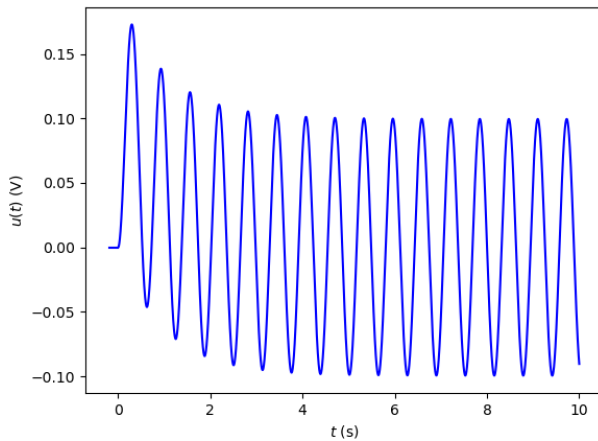
On a $\tau \approx 0,02T$: la durée du régime transitoire est faible devant la période; ce régime est imperceptible sur la figure. De plus l'amplitude de la tension de sortie est quasiment égale à E : la tension est intégralement transmise à « basse fréquence », le circuit étant un filtre passe-bas.

2.b) Cas $\omega = 1/\tau$.



On a $\tau \approx 0,2T$: le régime transitoire devient perceptible. On remarque de plus une atténuation sensible de l'amplitude de la tension de sortie (on est à la limite de la bande passante du filtre).

2.c) Cas $\omega = 10/\tau$.



On a $\tau \approx 2Tl$ le régime transitoire est visible sur plusieurs périodes. On est nettement hors de la bande passante du filtre, et la tension est nettement atténuée.

3. La solution du régime établi harmonique peut se déterminer directement en utilisant la notation complexe.

L'équation différentielle s'écrit alors avec les amplitudes complexes.

► Attention, il faut écrire $e(t)$ sous la forme d'un cosinus pour déterminer l'amplitude complexe associée. On a

$$e(t) = E \sin(\omega t) = E \cos(\omega t - \pi/2)$$

d'où

$$\underline{E} = E e^{-j\pi/2} = -jE.$$

On a

$$\underline{U} + jRC\omega \underline{U} = -jE$$

d'où

$$\underline{U} = \frac{-j}{1 + j\omega\tau} E.$$

Le signal complexe (dépendant du temps) s'écrit

$$\underline{u}(t) = \frac{-j}{1 + j\omega\tau} E e^{j\omega t}.$$

Il faut faire apparaître la partie réelle pour en déduire $u(t)$:

$$\begin{aligned} \underline{u}(t) &= \frac{-j(1 - j\omega\tau)}{1 + \omega^2\tau^2} E e^{j\omega t} \\ &= -\frac{j + \omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} [\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)] E. \end{aligned}$$

En développant et en prenant la partie réelle, on obtient

$$u(t) = \left[-\frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \cos(\omega t) + \frac{1}{1 + \omega^2\tau^2} \sin(\omega t) \right] E.$$

On retrouve bien l'expression du régime établi précédemment.