

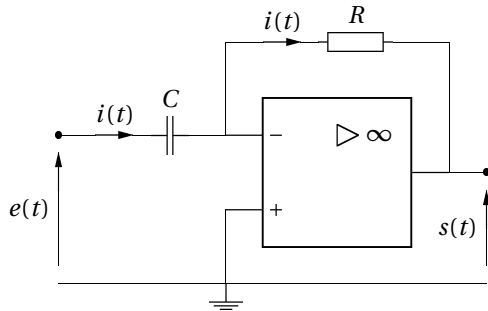
TD d'électronique n° 2

Solution

1 — Montages à ALI

L'ALI est supposé fonctionner en régime linéaire.

1. Le condensateur est la résistance sont traversées par le même courant (car $i_- = 0$).



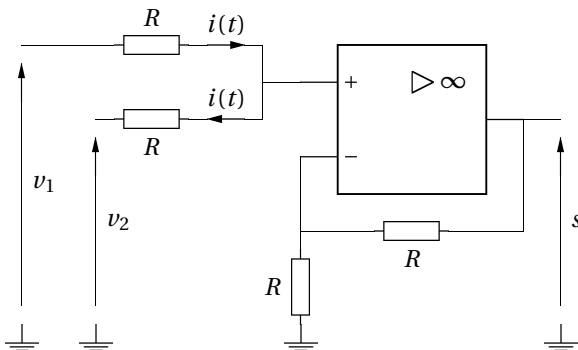
On a donc

$$\underline{e} = \frac{1}{jC\omega} \underline{i} \quad \text{et} \quad \underline{s} = -R \underline{i}$$

d'où $\underline{s} = -jRC\omega \underline{e}$.

Le circuit est un **dérivateur**.

2. Les deux résistances R en entrée sont traversées par le même courant ($i_+ = 0$).



On a donc (pont diviseur de tension)

$$V_+ - v_2 = \frac{v_1 - v_2}{2}$$

d'où

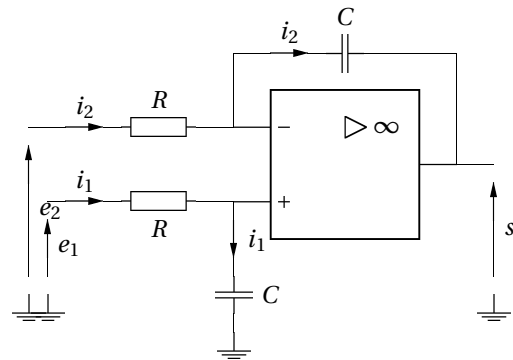
$$V_+ = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

On a par le même principe $V_- = \frac{s}{2}$.

L'ALI étant linéaire, $V_+ = V_-$, d'où $\underline{s} = \underline{v_1} + \underline{v_2}$.

Le montage est un **sommateur**.

3. On complète les intensités sachant que $i_+ = 0$ et $i_- = 0$.



Pont diviseur de tension :

$$\underline{V_-} - \underline{s} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} (\underline{e_2} - \underline{s}) = \frac{1}{1 + jRC\omega} (\underline{e_2} - \underline{s})$$

d'où

$$\begin{aligned} \underline{V_-} &= \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{e_2} + \left(1 - \frac{1}{1 + jRC\omega}\right) \underline{s} \\ &= \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{e_2} + \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \underline{s}. \end{aligned}$$

De même

$$\underline{V_+} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{e_1}.$$

L'ALI étant linéaire, on a $\underline{V_+} = \underline{V_-}$, d'où

$$\frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{e_2} + \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \underline{s} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{e_1}.$$

On en déduit

$$\underline{s} = \frac{1}{jRC\omega} (\underline{e_1} - \underline{e_2}).$$

Le signal de sortie est proportionnel à l'intégrale de la différence des deux tensions d'entrée, d'où le nom d'intégrateur différentiel.

2 — Le montage suiveur

1. Se reporter au cours. En régime linéaire, on a $s(t) = e(t)$.

2. L'ALI fonctionne en régime linéaire si $|e(t)| < V_{\text{sat}}$, sinon on aurait $|s(t)| = |e(t)| > V_{\text{sat}}$ qui est impossible.

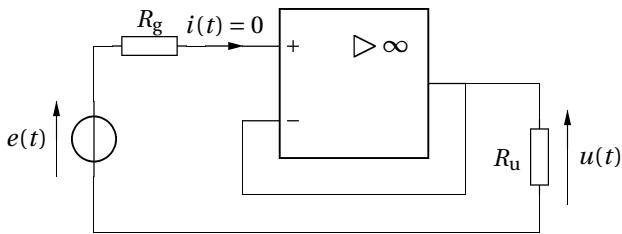
3.a) Quand la sortie est ouverte, on a $i(t) = 0$, d'où $\underline{u(t)} = \underline{e(t)}$.

3.b) Quand on branche une résistance R_u à la sortie du générateur, la structure pont diviseur de tension donne

$$\underline{u(t)} = \frac{R_u}{R_g + R_u} \underline{e(t)}.$$

On observe une chute de tension, due à la résistance interne R_g traversée par le courant $i(t)$.

3.c) Il suffit de placer un suiveur entre le GBF et la résistance de charge :



L'impédance d'entrée du suiveur étant infinie, on a $i(t) = 0$, d'où $u(t) = e(t)$.

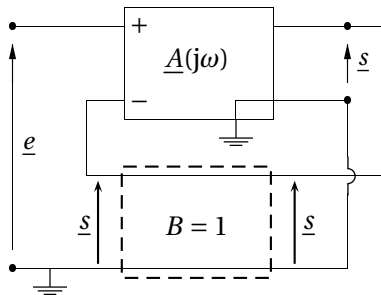
Les limitations sont celles du suiveur : saturation en tension, saturation en courant, vitesse de balayage.

Dans le cas où $e(t) = E \cos(\omega t)$:

- il faut $E < V_{\text{sat}}$ pour ne pas observer de saturation en tension ;
- il faut $\frac{E}{R_u} < i_{\text{sat}}$ pour ne pas observer de saturation en courant de sortie ;
- il faut $\left| \frac{du}{dt} \right|_{\text{max}} = E\omega < \sigma$ pour ne pas être limité par la vitesse de balayage en sortie.

4.a) Cours : $A_0 \approx 2 \times 10^5$ et $f_0 \approx 10$ Hz.

4.b) Schéma bloc du suiveur :



La chaîne directe a la transmittance de l'ALI; la chaîne directe est unitaire (de gain $B = 1$).

4.c) On a

$$\underline{V}_+ = \underline{e} \quad \text{et} \quad \underline{V}_- = \underline{s}.$$

On peut donc écrire

$$\underline{s} = \frac{A_0}{1 + j\omega\tau} \underline{e} = \frac{A_0}{1 + j\omega\tau} (\underline{e} - \underline{s}),$$

d'où

$$\underline{s} \left[1 + \frac{A_0}{1 + j\omega\tau} \right] = \frac{A_0}{1 + j\omega\tau} \underline{e}.$$

La fonction de transfert du suiveur est donc donnée par

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\frac{A_0}{1 + j\omega\tau}}{1 + \frac{A_0}{1 + j\omega\tau}} = \frac{A_0}{1 + j\omega\tau + A_0} = \frac{\frac{A_0}{1 + A_0}}{1 + j\omega \frac{\tau}{1 + A_0}}.$$

Elle est de la forme

$$\underline{H} = \frac{H'_0}{1 + j\omega\tau'} \quad \text{avec} \quad H'_0 = \frac{A_0}{1 + A_0} \quad \text{et} \quad \tau' = \frac{\tau}{1 + A_0}.$$

La bande passante de l'ALI est $[0, \omega_0]$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\tau'}$.

La bande passante du suiveur est $[0, (1 + A_0)\omega_0]$; la pulsation de coupure est $(1 + A_0)\omega_0 \approx A_0\omega_0$ car $A_0 \gg 1$.

La fréquence de coupure est donc $f'_0 \approx A_0 f_0 \approx 2$ MHz; la rétroaction a considérablement augmenté la bande passante.

Le gain dans la bande passante est

$$H'_0 = \frac{A_0}{1 + A_0} \approx 1,$$

Indépendant de la valeur de A_0 (qui est très élevée).

3 — Filtre passe-tout déphaseur

1. Comme les deux résistances de la branche supérieure sont traversées par la même intensité, on obtient

$$\underline{V}_- = \frac{\underline{e} + \underline{s}}{2}.$$

Un pont diviseur de tension dans la branche inférieure permet d'écrire

$$\underline{V}_+ = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} \underline{e} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{e}.$$

L'ALI étant linéaire, on a $\underline{V}_+ = \underline{V}_-$, soit

$$\frac{\underline{e} + \underline{s}}{2} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{e},$$

d'où $(1 + jRC\omega)\underline{s} = (1 - jRC\omega)\underline{e}$. On en déduit la fonction de transfert

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}.$$

2. Le gain $G(\omega) = |\underline{H}|$ vaut ici $G(\omega) = 1$.

Le filtre se comporte comme un « passe-tout ».

Notons φ_1 la phase du numérateur $1 - jRC\omega$ et φ_2 la phase du dénominateur $1 + jRC\omega$. L'argument de $\underline{H}$ s'écrit

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2,$$

avec $\tan \varphi_1 = -RC\omega$ et $\tan \varphi_2 = RC\omega$. On a donc $\varphi = -2 \arctan(RC\omega)$.

En très basse fréquence, on a $\varphi \approx 0^\circ$.

En très haute fréquence, on a $\varphi \approx -180^\circ$.

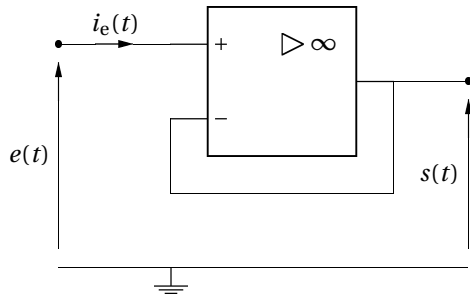
Pour $\omega = 1/RC$, on a $\varphi = -90^\circ$.

3. Le gain valant 1 pour toutes les fréquences, le filtre est qualifié de passe-tout.

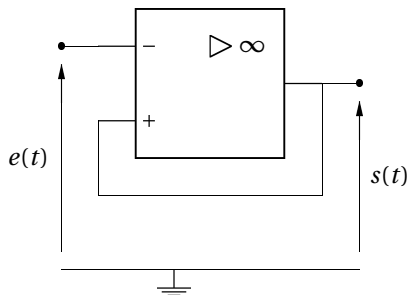
Il introduit un déphase variant de 0 (tensions en phase) à -180° (tensions en opposition de phase) selon la fréquence : le filtre est qualifié de déphaseur.

4 — Étude d'un suiveur

1. Schéma du suiveur :



2. La sortie étant saturée, l'expérimentateur a dû inverser les bornes d'entrée, et brancher la rétroaction sur l'entrée non inverseuse :



3. L'aspect triangulaire du signal de sortie est dû à la vitesse de balayage limite σ de l'ALI : la tension de sortie est constituée de segments de droite de pente $\pm\sigma$. Comme elle passe de $-S$ à $+S$, avec $S = 5\text{ V}$, en une demie-période, la pente est

$$\sigma = \frac{2S}{T/2} = 4fS = 4 \times 1,2 \times 10^6 \times 10 = 4,8 \times 10^7 \text{ V} \cdot \text{s}^{-1}$$

soit $\sigma = 48 \text{ V}/\mu\text{s}$.

Avec le signal d'entrée $e(t) = E \cos(2\pi f t)$, on a

$$\frac{de}{dt} = -2\pi f E \sin(2\pi f t)$$

d'où

$$\left. \frac{de}{dt} \right|_{\max} = 2\pi f E.$$

Le signal d'entrée sera correctement restitué si

$$\left. \frac{de}{dt} \right|_{\max} < \sigma, \text{ soit}$$

$$f < \frac{\sigma}{2\pi E}.$$

On calcule $f < 764 \text{ kHz}$.

4. La fréquence du signal d'entrée étant de 1 kHz, il n'y a pas de limitation due à la vitesse de balayage.

La saturation apparaissant est sortie est la saturation en courant de sortie (la résistance branchée en sortie est trop faible). Avec $s(t) = Ri_s(t)$, on a

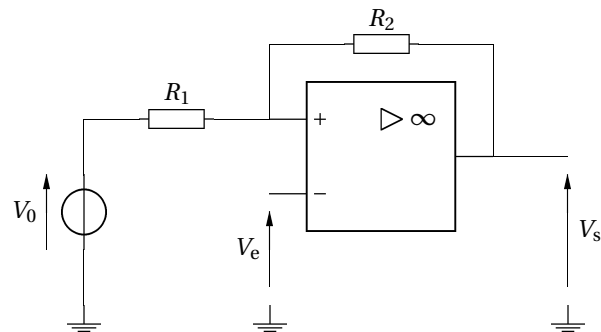
$$i_{\text{sat}} = \frac{s_{\max}}{R} = \frac{2,5}{100}$$

soit $i_{\text{sat}} = 25 \text{ mA}$.

Il faut brancher une résistance de valeur plus élevée, telle que $E = Ri_{\max} < Ri_{\text{sat}}$. Avec $E = 10 \text{ V}$, il faut $R > 400 \Omega$.

5 — Comparateur à hystérésis inverseur décalé

On considère le montage suivant, avec $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$ et $V_0 = 6 \text{ V}$.

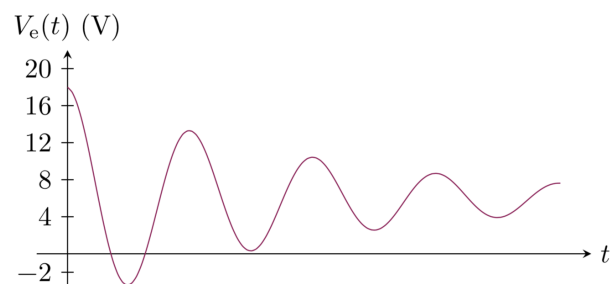


1. Exprimer le potentiel V_+ de l'entrée non inverseuse en fonction de V_0 , V_s et $\beta = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$.

2. Justifier que l'ALI fonctionne en saturation et déterminer les tensions de basculement entre les états de saturation haute et basse.

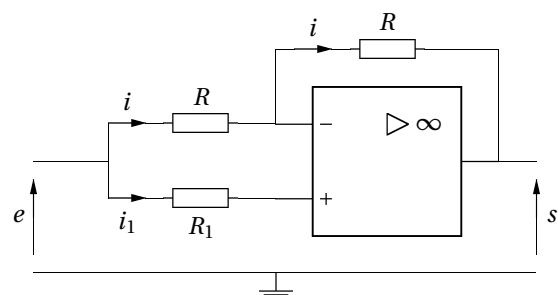
3. Représenter graphiquement V_s en fonction de V_e . Expliquer le nom donné au montage.

4. Le chronogramme de la tension d'entrée du montage est représentée ci-après. Tracer celui de la tension de sortie.



6 — Étude d'un filtre

1. Schéma équivalent en très basse fréquence :

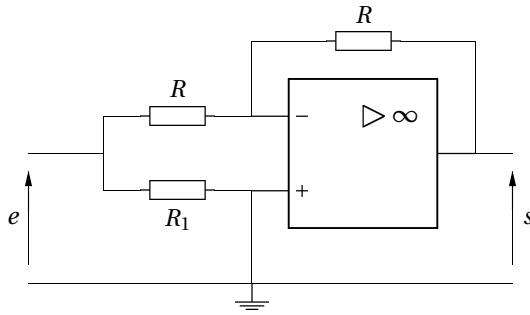


On a $i_1 = 0$ (ALI idéal).

Comme $\varepsilon = 0$, on a $R_1 i_1 = Ri$, d'où $i = 0$.

Avec $e - s = 2Ri$, on en déduit $s = e$ en très basse fréquence.

Schéma équivalent en très haute fréquence :



La loi des nœuds en terme de potentiel s'écrit

$$\frac{e - v_-}{R} + \frac{s - v_-}{R} = 0.$$

Or $v_+ = v_- = 0$, d'où $s = -e$ en très haute fréquence.

2. On a établi précédemment

$$v_- = \frac{e + s}{2}.$$

La résistance R_1 et le condensateur C étant parcourus par le même courant (car $i_+ = 0$), on a un pont diviseur de tension qui donne

$$v_+ = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} e = \frac{1}{1 + jRC\omega} e$$

On a donc comme $v_- = v_+$

$$\frac{e + s}{2} = \frac{1}{1 + jRC\omega} e$$

soit

$$(1 + jRC\omega)s = (1 - jRC\omega)e.$$

La fonction de transfert est donc

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}.$$

On a $G(\omega) = 1$ (compatible avec les cas limites étudiés à la première question).

Le déphasage introduit par le filtre est

$$\varphi = \arctan(-RC\omega) - \arctan(RC\omega) = -2 \arctan(RC\omega).$$

Il varie de $\varphi = 0$ (très basses fréquences) à $\varphi = -\pi$, soit une sortie opposée à l'entrée en très hautes fréquences, comme prévu à la première question.

3. La relation $(1 + jRC\omega)s = (1 - jRC\omega)e$ conduit à l'équation différentielle

$$s(t) + RC \frac{ds}{dt} = e(t) - RC \frac{de}{dt}.$$

À $t \geq 0$, elle s'écrit

$$s(t) + RC \frac{ds}{dt} = E.$$

La solution générale est

$$s(t) = E + Ae^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = RC.$$

Attention : c'est la tension aux bornes du condensateur qui est continue. On ne peut rien prévoir *a priori* quant à la continuité de $s(t)$.

On peut dire par continuité que $v_+(0^+) = 0$, soit l'ALI étant linéaire

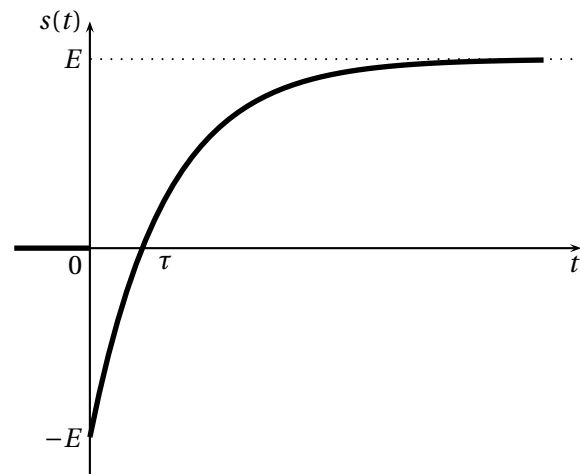
$$v_-(0^+) = 0 = \frac{E + s(0^+)}{2}.$$

On a donc

$$s(0^+) = -E = E + A$$

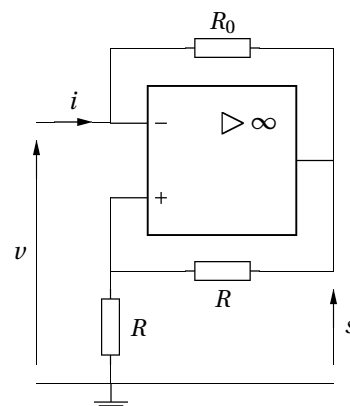
d'où $A = -2E$ et

$$s(t) = E(1 - 2e^{-t/\tau}).$$



7 — Un dipôle particulier

On considère le montage suivant :



On considère l'ALI comme idéal.

1. On a $v - s = R_0 i$, soit

$$v = s + R_0 i.$$

Les deux résistances étant traversées par le même courant ($i_+ = 0$), on a

$$v_+ = \frac{R}{2R} s = \frac{s}{2}$$

soit

$$s = 2v_+.$$

2. On remarque que $v_- = v$. Quand l'ALI fonctionne en régime linéaire, on a $v_+ = v_-$, soit $s = 2v$. On a donc

$$v = 2v + R_0 i$$

d'où

$$v = -R_0 i.$$

Vu des deux bornes d'entrée, le montage se comporte comme une **résistance négative** $-R_0 < 0$.

3. L'ALI fonctionne en régime linéaire si $|s| < V_{\text{sat}}$, soit

$$|v| < \frac{V_{\text{sat}}}{2} \quad \text{et} \quad |i| < \frac{V_{\text{sat}}}{2R_0}.$$

Cas $s = +V_{\text{sat}}$

Ce cas correspond à $\varepsilon > 0$, soit

$$\frac{V_{\text{sat}}}{2} - v > 0.$$

On a donc

$$v = V_{\text{sat}} + R_0 i \quad \text{pour } v < \frac{V_{\text{sat}}}{2}.$$

Cas $s = -V_{\text{sat}}$

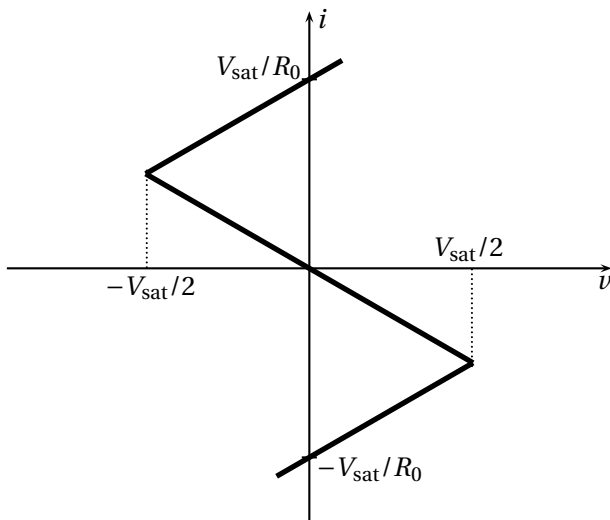
Ce cas correspond à $\varepsilon < 0$, soit

$$-\frac{V_{\text{sat}}}{2} - v < 0.$$

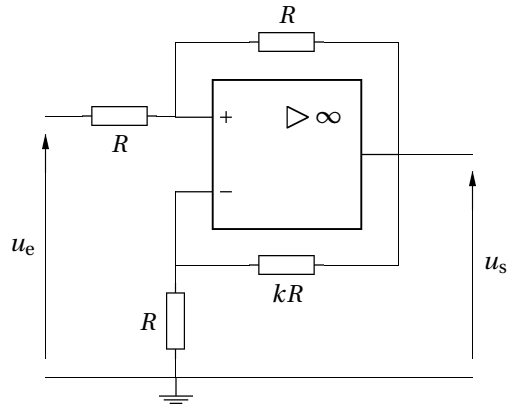
On a donc

$$v = -V_{\text{sat}} + R_0 i \quad \text{pour } v > -\frac{V_{\text{sat}}}{2}.$$

4. On en déduit la caractéristique $v = f(i)$ de ce montage :



8 — Compétition de rétroaction et stabilité



1. On ne peut pas prévoir sans analyse approfondie la stabilité ou l'instabilité du montage car on a une rétroaction sur chacune des entrées de l'ALI.

2. Les résistances R et kR reliées à l'entrée inverseuse sont traversées par le même courant (car $i_- = 0$) ; la formule du pont diviseur de tension conduit donc à

$$\underline{V}_- = \frac{R}{R + kR} \underline{u}_s = \frac{1}{k+1} \underline{u}_s.$$

Les résistances reliées à l'entrée non inverseuse sont traversées par le même courant (car $i_+ = 0$) ; la formule du pont diviseur de tension s'écrit alors

$$\underline{V}_+ - \underline{u}_s = \frac{R}{R + R} (\underline{u}_e - \underline{u}_s) = \frac{\underline{u}_e - \underline{u}_s}{2}$$

d'où

$$\underline{V}_+ = \frac{\underline{u}_e + \underline{u}_s}{2}.$$

La tension différentielle d'entrée s'écrit

$$\underline{\varepsilon} = \underline{V}_+ - \underline{V}_- = \frac{\underline{u}_e + \underline{u}_s}{2} - \frac{1}{k+1} \underline{u}_s$$

soit

$$\underline{\varepsilon} = \frac{\underline{u}_e}{2} + \frac{k-1}{2(k+1)} \underline{u}_s.$$

L'ALI vérifiant

$$\underline{u}_s = \frac{\mu_0}{1 + j\omega\tau} \underline{\varepsilon}$$

avec $\tau = 1/\omega_0$, on élimine $\underline{\varepsilon}$ d'où

$$\underline{u}_s = \frac{\mu_0}{1 + j\omega\tau} \left[\frac{\underline{u}_e}{2} + \frac{k-1}{2(k+1)} \underline{u}_s \right]$$

soit

$$\underline{u}_s \left[1 - \frac{\mu_0}{1 + j\omega\tau} \frac{k-1}{2(k+1)} \right] = \frac{\mu_0}{1 + j\omega\tau} \frac{\underline{u}_e}{2}. \quad (1)$$

La fonction de transfert s'écrit alors

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= \frac{\mu_0}{2(1 + j\omega\tau)} \frac{1}{1 - \frac{\mu_0}{1 + j\omega\tau} \frac{k-1}{2(k+1)}} \\ &= \frac{\mu_0}{2 + 2j\omega\tau - \frac{\mu_0(k-1)}{k+1}}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\mu_0/2}{1 - \frac{\mu_0(k-1)}{2(k+1)} + j\omega\tau}.$$

Le système est stable si tous les coefficients du dénominateur (en tant que polynôme en $j\omega$) sont de même signe.

Le terme en $j\omega$ a pour coefficient $\tau > 0$.

Le coefficient constant est $1 - \frac{\mu_0(k-1)}{2(k+1)}$. Le système est donc stable si

$$1 - \frac{\mu_0(k-1)}{2(k+1)} > 0$$

soit $2(k+1) > k\mu_0 - 1$, c'est-à-dire pour

$$k < \frac{\mu_0 + 2}{\mu_0 - 2}.$$

Comme $\mu_0 \gg 1$, on a $\frac{\mu_0+2}{\mu_0-2} \approx 1$, ce qui permet de conclure que le système est

- stable si $k < 1$;
- instable si $k > 1$.

On peut dire qualitativement que si k est « assez faible » la tension V_- envoyée sur l'entrée inverseuse (rétroaction négative) est plus grande que celle envoyée sur l'entrée non inverseuse : la rétroaction négative « l'emporte » sur la rétroaction positive et le système reste stable.

3. On a $V_- = \frac{u_s}{k+1}$ et $V_+ = \frac{u_e + u_s}{2}$. En régime linéaire, on a

$$\varepsilon = 0 = V_+ - V_- = \frac{u_e + u_s}{2} - \frac{u_s}{k+1}$$

d'où $\underline{u}_e + \underline{u}_s = \frac{2}{k+1} \underline{u}_s$. On a donc $\underline{u}_e = \underline{u}_s \frac{1-k}{1+k}$, et le

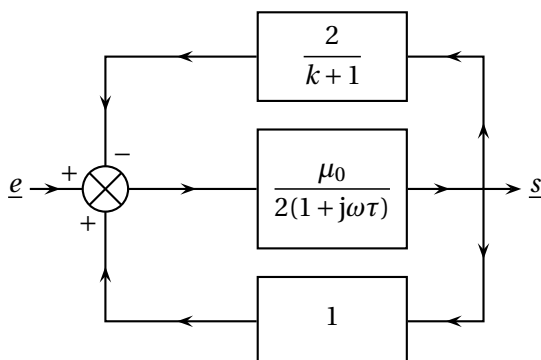
gain vaut $G = \frac{1+k}{1-k}$.

Quand $k \rightarrow 1$, on a $G \rightarrow \infty$. Dans la pratique, on observe une saturation de la tension de sortie.

4. L'équation (1) s'écrit

$$\underline{u}_s = \frac{\mu_0}{1+j\omega\tau} \left[\frac{\underline{u}_e}{2} + \frac{\underline{u}_s}{2} - \frac{\underline{u}_s}{k+1} \right].$$

On en déduit la structure en schéma bloc.



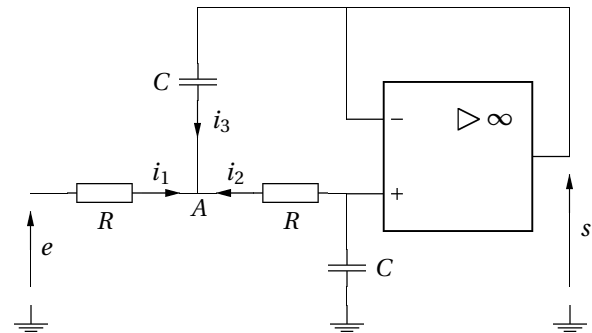
On peut considérer que le système est stable si la rétroaction négative est plus importante que la rétroaction positive, c'est-à-dire si

$$\frac{2}{k+1} > 1$$

ce qui conduit à $k < 1$. On retrouve la condition obtenue précédemment en considérant $A_0 \gg 1$.

5. Si on permute les entrées inverseuse et non inverseuse de l'ALI, on change le sens de l'inégalité pour la condition de stabilité (car on change ε en $-\varepsilon$).

9 — Filtre de Sallen-Key



1. On remarque que $\underline{s} = \underline{V_-}$. L'ALI étant linéaire, on a $\underline{V_+} = \underline{V_-}$ donc on a aussi $\underline{s} = \underline{V_+}$.

À très haute fréquence, les condensateurs se comportent comme des court-circuits. On a donc $\underline{V_+} = 0$, d'où $\underline{s} = 0$.

À très basse fréquence, les condensateurs se comportent comme des interrupteurs ouverts; le courant est donc nul dans les résistances, et la tension aux bornes des deux résistances est nulle. On a donc $\underline{V_+} = \underline{e}$, d'où $\underline{s} = \underline{e}$.

On en conclut que la structure est un **filtre passe-bas**.

2. On a un pont diviseur de tension entre A et l'entrée + car $i_+ = 0$, d'où

$$\underline{V_+} = \frac{1}{1+jRC\omega} \underline{V_A}.$$

Nous allons écrire la loi des nœuds en A, mais en l'exprimant en terme de potentiels. Les trois courants s'écrivent

$$\underline{i}_1 = \frac{\underline{e} - \underline{V_A}}{R}; \quad \underline{i}_2 = \frac{\underline{V_+} - \underline{V_A}}{R} \quad \text{et} \quad \underline{i}_3 = jC\omega(\underline{s} - \underline{V_A}).$$

On a donc

$$\frac{\underline{e} - \underline{V_A}}{R} + \frac{\underline{V_+} - \underline{V_A}}{R} + jC\omega(\underline{s} - \underline{V_A}) = 0,$$

d'où comme $\underline{V_+} = \underline{s}$,

$$\underline{e} - \underline{V_A} + \underline{s} - \underline{V_A} + jRC\omega(\underline{s} - \underline{V_A}) = 0,$$

soit

$$\underline{e} - (2+jRC\omega)\underline{V_A} + (1+jRC\omega)\underline{s} = 0.$$

On a montré $\underline{V}_A = (1 + jRC\omega)\underline{V}_+ : (1 + jRC\omega)\underline{s}$, d'où

$$\underline{e} - (2 + jRC\omega)(1 + jRC\omega)\underline{s} + (1 + jRC\omega)\underline{s} = 0$$

soit

$$[2 + 3jRC\omega + (jRC\omega)^2 - 1 - jRC\omega]\underline{s} = \underline{e}.$$

On a donc

$$[1 + 2jRC\omega + (jRC\omega)^2]\underline{s} = \underline{ule}$$

d'où la fonction de transfert

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + 2jRC\omega - R^2C^2\omega^2}.$$

On a bien un filtre passe-bas d'ordre 2.

► On peut écrire $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{(1 + jRC\omega)^2}$.

La pulsation caractéristique de ce filtre est $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.

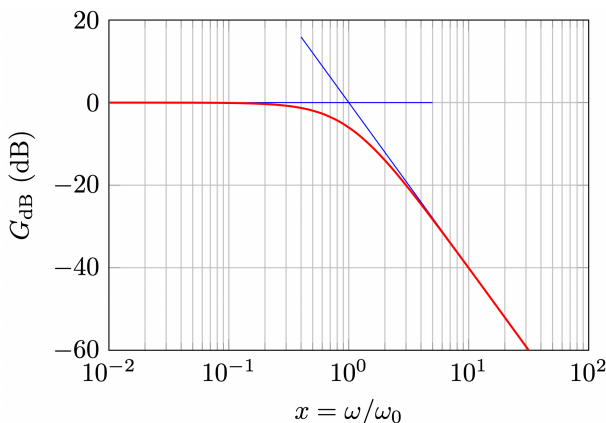
3. Dans la limite des très basses fréquences ($\omega \ll \omega_0$), on a $\underline{H} \sim 1$, d'où $G_{dB} \sim 0$.

Dans la limite des très hautes fréquences ($\omega \gg \omega_0$), on a $\underline{H} \sim \frac{1}{-R^2C^2\omega^2}$, d'où

$$G_{dB} \sim -20 \log(R^2C^2\omega^2) = -40 \log(\omega RC),$$

soit une asymptote de pente -40 dB/décade.

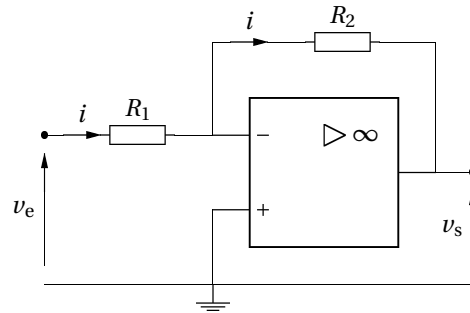
On calcule enfin $\underline{H}(j\omega_0) = \frac{1}{2j}$ soit $|\underline{H}| = 1/2$, d'où $G_{dB} = -20 \log 2 = -6$ dB.



4. Le signal créneau a un spectre étendu en fréquences (les amplitudes des harmoniques décroissent inversement proportionnellement à leur fréquence). Soit f la fréquence du signal.

- Si $f \ll f_0$, la partie du spectre du signal comportant les harmoniques les plus importantes est transmise. Le signal de sortie sera proche du signal créneau (le filtrage des harmoniques de rang élevé sera visible au niveau des sauts du signal créneau).
- Si $f \approx f_0$, le signal sera très sensiblement déformé, mais peu atténué.
- Si $f \gg f_0$, le signal est modifié et surtout très atténué.

10 — Amplificateur inverseur, modèle du premier ordre



5. En considérant un fonctionnement linéaire de l'ALI (rétroaction sur l'entrée inverseuse), on a $v_- = v_+ = 0$, d'où

$$v_e = R_1 i \quad \text{et} \quad v_s = -\frac{R_2}{i}.$$

On en déduit

$$\underline{H} = -\frac{R_2}{R_1}.$$

Son impédance d'entrée est donnée par

$$\underline{Z}_e = \frac{v_e}{i}$$

soit $\underline{Z}_e = R_1$.

6. On a $\mu_0 \approx 2 \times 10^5$.

La fréquence de coupure de l'ALI est $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} \approx 3$ Hz. Cette valeur très faible le rend *a priori* inadapté à un usage en électronique.

7. La loi des nœuds en terme de potentiel appliquée à l'entrée inverseuse donne

$$\frac{v_e - v_-}{R_1} + \frac{v_s - v_-}{R_2} = 0$$

d'où

$$v_- = \frac{R_2 v_e + R_1 v_s}{R_1 + R_2}.$$

On a

$$\frac{v_s}{\underline{\varepsilon}} = \frac{v_s}{v_+ - v_-} = \frac{\mu_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \quad \text{avec} \quad \underline{\varepsilon} = v_+ - v_- = -v_-$$

d'où

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} v_e + \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_s = -\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_c}\right) \frac{v_s}{\mu_0}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \underline{H}' = \frac{v_s}{v_e} &= \frac{-\frac{R_2}{R_1 + R_2}}{\frac{R_1}{R_1 + R_2} + \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_c}\right) \frac{1}{\mu_0}} \\ &= \frac{-R_2}{R_1 + \frac{R_1 + R_2}{\mu_0} + j\frac{R_1 + R_2}{\mu_0 \omega_c} \omega} \end{aligned}$$

soit

$$\underline{H} = \frac{-\frac{R_2}{R_1 + \frac{R_1 + R_2}{\mu_0}}}{1 + j \frac{R_1 + R_2}{\left(R_1 + \frac{R_1 + R_2}{\mu_0}\right) \mu_0 \omega_c} \omega}.$$

L'expression est de la forme

$$\underline{H}' = \frac{\underline{H}_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega'_c}}$$

avec

$$\underline{H}_0 = -\frac{R_2}{R_1 + \frac{R_1 + R_2}{\mu_0}} \quad \text{et} \quad \omega'_c = \left(R_1 + \frac{R_1 + R_2}{\mu_0}\right) \frac{\mu_0 \omega_c}{R_1 + R_2}.$$

8. Avec $\mu_0 \gg 1$, on a

$$\underline{H}_0 \approx -\frac{R_2}{R_1},$$

soit un gain $G_0 = \frac{R_2}{R_1} \ll \mu_0$: le gain est considérablement réduit du fait de la rétroaction.

On a de même

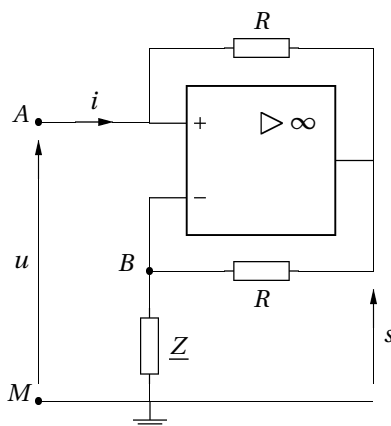
$$\omega'_c = \left(\mu_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2} + 1\right) \omega_c \approx \mu_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2} \omega_c \gg \omega_c$$

La rétroaction a considérablement augmenté la bande passante.

11 — Gyrateur

1. Il y a une rétroaction sur l'entrée inverseuse et une rétroaction sur l'entrée non inverseuse de l'ALI : il n'est donc pas *a priori* possible de prévoir si l'ALI va fonctionner en régime linéaire.

2. L'ALI fonctionne en régime linéaire.



L'ALI étant linéaire, on a $V_- = V_+ = u$.

On a $\underline{V}_- = \frac{\underline{Z}}{R + \underline{Z}} \underline{s}$, d'où

$$\underline{s} = \left(1 + \frac{R}{\underline{Z}}\right) \underline{u}.$$

On a de plus

$$\underline{u} - \underline{s} = R \underline{i}$$

d'où

$$\underline{u} - \left(1 + \frac{R}{\underline{Z}}\right) \underline{u} = -\frac{R}{\underline{Z}} \underline{u} = R \underline{i}.$$

On a donc $\underline{u} = -\underline{Z} \underline{i}$. Le montage vu des bornes A et M possède l'impédance d'entrée $\underline{Z}_e = -\underline{Z}$.

3. Le CIN2 branché sur R_0 est équivalent à une impédance $-R_0$.

On a donc $-R_0$ en parallèle avec l'association série de R_0 et $\underline{Z}$, soit une impédance équivalente

$$\frac{-R_0(R_0 + \underline{Z})}{-R_0 + R_0 + \underline{Z}} = -\frac{R_0}{\underline{Z}}(R_0 + \underline{Z}) = -\frac{R_0^2}{\underline{Z}} - R_0.$$

L'impédance de la charge du CIN1 est donc

$$R_0 - \frac{R_0^2}{\underline{Z}} - R_0 = -\frac{R_0^2}{\underline{Z}}.$$

L'impédance d'entrée globale est l'opposé de cette valeur soit

$$\underline{Z}_e = \frac{R_0^2}{\underline{Z}}.$$

4. L'impédance d'entrée vaut ici

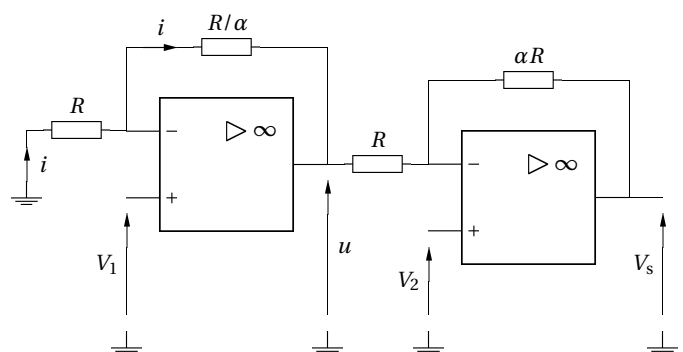
$$\underline{Z}_e = jC\omega R_0^2 = j(50 \times 10^3)^2 \times 10^{-6} \omega$$

soit $\underline{Z}_e = j2500\omega$.

Cette impédance est de la forme $\underline{Z}_e = jL\omega$: le montage permet de simuler une bobine d'inductance $L = 2500$ H, ce qui est énorme (et inaccessible directement avec les composants usuels).

12 — Amplificateur différentiel

Introduisons la tension u .



On a

$$V_1 = -Ri \quad \text{et} \quad u = -\left(R + \frac{R}{\alpha}\right) i$$

d'où

$$u = \frac{1 + \alpha}{\alpha} V_1.$$

La loi des nœuds en terme de potentiel appliquée à l'entrée inverseuse de second ALI donne

$$\frac{u - V_2}{R} + \frac{V_s - V_2}{\alpha R} = 0$$

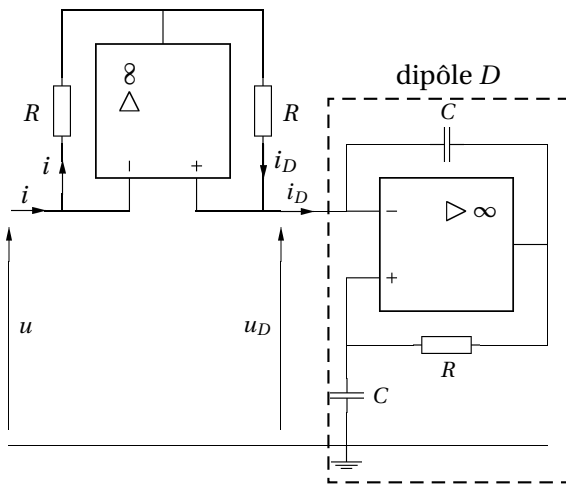
d'où

$$\alpha V_s = (1 + \alpha) V_2 - \alpha u (1 + \alpha) V_2 - (1 + \alpha) V_1.$$

On a donc

$$V_s = A(V_2 - V_1) \quad \text{avec} \quad A = \frac{1 + \alpha}{\alpha}.$$

13 — Modélisation d'un système



1. On peut s'inspirer de la méthode de l'exercice 40, en notant $\underline{s}$ la tension de sortie de l'ALI.

On a d'une part

$$\underline{u}_D - \underline{s} = \frac{1}{jC\omega} \underline{i}_D$$

d'où

$$\underline{V}_- = \underline{u}_D = \underline{s} + \frac{1}{jC\omega} \underline{i}_D.$$

D'autre part

$$\underline{V}_+ = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} \underline{s} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{s}.$$

L'ALI étant linéaire, on a $\underline{V}_+ = \underline{V}_-$, soit

$$\underline{s} = (1 + jRC\omega) \underline{u}_D$$

d'où

$$\underline{u}_D = (1 + jRC\omega) \underline{u}_D + \frac{1}{jC\omega} \underline{i}_D$$

soit

$$-jRC\omega \underline{u}_D = \frac{1}{jC\omega} \underline{i}_D.$$

On a donc

$$\underline{u}_D = \underline{Z}_D \underline{i}_D \quad \text{avec} \quad \underline{Z}_D = \frac{1}{RC^2\omega^2}.$$

2. L'ALI « de gauche » étant linéaire, on a $\underline{u} = \underline{u}_D$.

Une maille autour de l'ALI donne

$$0 = R \underline{i}_D + R \underline{i}$$

d'où $\underline{i}_D = -\underline{i}$.

3. Des deux relations précédentes, la relation entre $\underline{u}$ et $\underline{i}_D$ permet d'écrire

$$\underline{u} = -\frac{1}{RC^2\omega^2} \underline{i}.$$

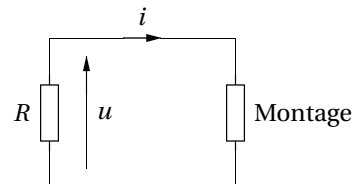
On a donc

$$\underline{i} = -RC^2\omega^2 \underline{u} = RC^2(j\omega)^2 \underline{u}$$

d'où dans le domaine temporel

$$i(t) = A \frac{d^2 u}{dt^2} \quad \text{avec} \quad A = RC^2.$$

4. On considère le montage branché sur une résistance R :



On a donc

$$u(t) = -Ri(t) = -R^2 C^2 \frac{d^2 u}{dt^2}.$$

La tension vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{1}{R^2 C^2} u(t) = 0$$

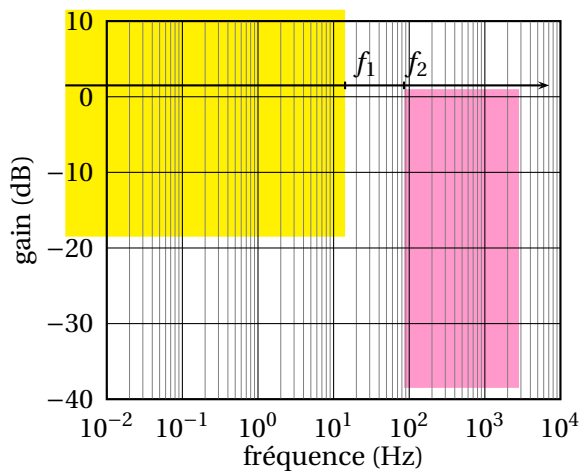
On modélise un oscillateur harmonique, comme une masse accrochée à un ressort mobile sans frottement.

La solution est de la forme

$$u(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}.$$

14 — Filtres passe-haut

1. Dans le gabarit du filtre, la condition sur la basse fréquence ($f < f_1$) permet d'éliminer la zone jaune. La condition sur la haute fréquence ($f > f_2$) permet d'éliminer la zone rose.



On veut $G_{dB}(f_1) \leq -20$ dB et $G_{dB}(f_2) \geq -0,5$ dB.

Le rapport des deux fréquences est $\frac{f_2}{f_1} = \frac{300}{50} = 6$, c'est-à-dire inférieure à une décade (rapport 10).

La pente minimale entre ces deux fréquences du gain est donc de $\frac{19,5}{6} \times 10 = 32,5$ dB/décade.

Un filtre du premier ordre présente une pente de 20 dB/décade en deçà de sa fréquence de coupure : il est donc impossible d'avoir une atténuation de 19,5 dB sur moins d'une décade avec un tel filtre.

Un filtre passe-haut du premier ordre ne peut convenir.

2. La fonction de transfert est

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jL\omega}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{-LC\omega^2}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}.$$

En identifiant le terme quadratique avec la forme proposée, on obtient $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

En identifiant le terme en ω , on a alors $\frac{1}{Q\omega_0} = RC$, d'où

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

3. Avec $Q = 1/\sqrt{2}$, le gain du montage vaut

$$G(x) = \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2 + x^2/Q^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2 + 2x^2}}$$

soit

$$G(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}.$$

Le gain en décibel vaut donc

$$G_{dB} = 20 \log G = -10 \log \left(1 + \frac{1}{x^4} \right) = -20g(x).$$

où $g(x) = \log \left(1 + \frac{1}{x^4} \right)$ est la fonction dont le graphe est donnée.

Les conditions que doivent vérifier le filtre sont

$$G_{dB}(f_1) = -10 \log \left(1 + \frac{1}{x_1^4} \right) \leq -20$$

et

$$G_{dB}(f_2) = -10 \log \left(1 + \frac{1}{x_2^4} \right) \geq -0,5,$$

soit

$$\log \left(1 + \frac{1}{x_1^4} \right) \geq 2 \quad \text{et} \quad \log \left(1 + \frac{1}{x_2^4} \right) \leq 0,05$$

On lit sur le graphe que $\log \left(1 + \frac{1}{x_1^4} \right) \geq 2$ correspond

à $x_1 \leq 0,32$, soit $\frac{f_1}{f_0} \geq 0,32$ avec $f_1 = 50$ Hz, soit $f_0 > \frac{50}{0,32} = 156$ Hz.

De même $\log \left(1 + \frac{1}{x_2^4} \right) \leq 0,05$ correspond à $x_2 \geq 1,8$,

soit $\frac{f_2}{f_0} \leq 1,8$ avec $f_2 = 300$ Hz, soit $f_0 < \frac{300}{1,8} = 167$ Hz.

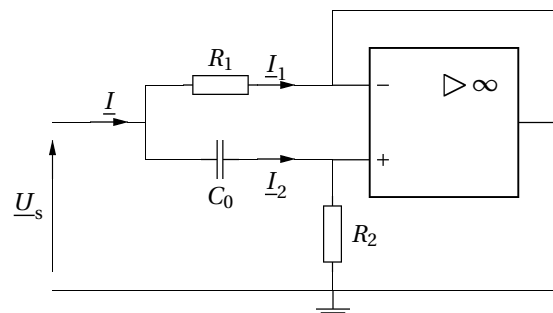
On doit donc avoir $156 \text{ Hz} \leq f_0 \leq 167 \text{ Hz}$. Compte tenu de la précision des données, le résultat sera exprimé avec deux chiffres significatifs. On prendra donc $f_0 = 0,16 \text{ kHz}$.

Avec $\omega_0^2 = 4\pi^2 f_0^2 = \frac{1}{LC}$, on a $L = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C}$.

On calcule $L \geq 1,0 \text{ H}$.

Cette valeur est élevée (l'inductance d'une bobine de 1000 spires est de l'ordre de 50 mH).

4. Indiquons les intensités utiles :



On a d'une part

$$\underline{U}_s = \left(R_2 + \frac{1}{jC_0\omega} \right) I_2 = \frac{1 + jR_2C_0\omega}{jC_0\omega} I_2$$

d'où

$$I_2 = \frac{jC_0\omega}{1 + jR_2C_0\omega} \underline{U}_s.$$

D'autre part comme $\underline{V}_+ = \underline{V}_-$, on a

$$R_1 \underline{I}_1 = \frac{1}{jC_0 \omega} \underline{I}_2$$

d'où

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_s}{R_1} \frac{1}{1 + jR_2 C_0 \omega}.$$

On a donc

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_s}{R_1} \left(\frac{1}{R_1} + jC_0 \omega \right) = \frac{\underline{U}_s}{R_1} \frac{1 + jR_2 C_0 \omega}{1 + jR_1 C_0 \omega}.$$

L'impédance $\underline{Z} = \underline{U}_s / \underline{I}$ équivalente est donc

$$\underline{Z} = R_1 \frac{1 + jR_2 C_0 \omega}{1 + jR_1 C_0 \omega}.$$

L'impédance d'une bobine est de la forme $\underline{Z} = jL\omega$.

Il faut donc que $1 + jR_1 C_0 \omega \approx 1$, ce qui implique la condition $R_1 C_0 \omega \ll 1$.

On a alors

$$\underline{Z} \approx R_1 (1 + jR_2 C_0 \omega).$$

Pour que l'impédance soit imaginaire pure, il faut que $1 + jR_2 C_0 \omega \approx jR_2 C_0 \omega$, ce qui implique la condition $R_2 C_0 \omega \gg 1$.

On a alors $\underline{Z} = jR_1 R_2 C_0 \omega$ qui est équivalent à une bobine d'inductance $L = R_1 R_2 C_0$.

On utilise le filtre sur la bande de pulsation $[\omega_1, \omega_2]$. La condition $R_1 C_0 \omega \ll 1$ est donc vérifiée si

$$R_1 \ll \frac{1}{C_0 \omega_2}.$$

Avec $C_0 \leq 10^{-6}$ F, il faut donc $R_1 \ll 530 \Omega$. On peut prendre $R_1 = 20 \Omega$.

La condition $R_2 C_0 \omega \gg 1$ est vérifiée si

$$R_2 \gg \frac{1}{C_0 \omega_1} \approx 3 \times 10^3 \Omega.$$

On peut prendre $R_2 = 100 \text{ k}\Omega$.

On veut $L = R_1 R_2 C_0 = 1$ H, ce qui conduit à $C_0 = 0,6 \times 10^{-6}$ F, valeur compatible avec la condition $C_0 \leq 10^{-6}$ F.

15 — Filtre en peigne de fréquence

1. La tension en sortie de ligne est reliée à la tension en entrée de ligne par

$$\underline{U}_B = e^{-j\omega\tau} \underline{U}_S.$$

En notant $u_S(t) = S \cos(\omega t)$, on a pour la tension réelle

$$u_E(t) = S \cos[\omega(t - \tau)].$$

Cette fonction de transfert prend en compte le retard de phase dû à la **propagation** du signal le long de la ligne : la constante τ représente le temps mis par le signal pour parcourir la ligne.

2. Les deux résistances R_0 étant parcourues par le même courant ($i_+ = 0$ pour le second ALI), on a

$$\underline{V}_+ = \frac{R_0}{2R_0} \underline{U}_B = \frac{\underline{U}_B}{2}.$$

De même pour les deux autres résistances :

$$\underline{V}_- = \frac{R}{R + \beta R} \underline{U}_D = \frac{\underline{U}_D}{1 + \beta}.$$

L'ALI ayant un fonctionnement linéaire, on a $\underline{V}_+ = \underline{V}_-$, soit

$$\frac{\underline{U}_B}{2} = \frac{\underline{U}_D}{1 + \beta}$$

On a donc

$$\underline{H}_B(j\omega) = \alpha \quad \text{avec} \quad \alpha = (1 + \beta)/2.$$

3. Pour le 1^{er} ALI, on a

$$\underline{V}_- = \frac{R}{2R} \underline{U}_S = \frac{\underline{U}_S}{2}.$$

La loi des nœuds en terme de potentiel à l'entrée non inverseuse s'écrit

$$\frac{\underline{U}_E - \underline{V}_+}{R} + \frac{\underline{U}_D - \underline{V}_+}{R} = 0$$

d'où

$$\underline{V}_+ = \frac{\underline{U}_E + \underline{U}_D}{2}.$$

D'après les questions précédentes, on a

$$\underline{U}_D = \alpha \underline{U}_B = \alpha e^{-j\omega\tau} \underline{U}_S.$$

La relation $\underline{V}_+ = \underline{V}_-$ donne alors

$$\underline{U}_E + \alpha e^{-j\omega\tau} \underline{U}_S = \underline{U}_S.$$

On en déduit la fonction de transfert

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega\tau}}.$$

4. La fonction de transfert peut s'écrire

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - \alpha \cos(\omega\tau) + j\alpha \sin(\omega\tau)}.$$

On a donc

$$|\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \alpha \cos(\omega\tau))^2 + (\alpha \sin(\omega\tau))^2}}$$

soit

$$|\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\omega\tau)}}.$$

Le gain est maximum quand le dénominateur est minimum, c'est-à-dire quand $\cos(\omega\tau) = 1$. On a alors

$$H_{\max} = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \alpha)^2}}$$

d'où

$$H_{\max} = \frac{1}{1 - \alpha}.$$

Le gain est minimum quand le dénominateur est maximum, c'est-à-dire quand $\cos(\omega\tau) = -1$. On a alors

$$H_{\min} = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 + 2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{(1 + \alpha)^2}}$$

d'où

$$H_{\min} = \frac{1}{1 + \alpha}.$$

Les maxima vérifiant $\cos(\omega\tau) = 1$, ils se produisent pour les pulsations telles que

$$\omega_n \tau = 2\pi n \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}.$$

L'écart $\omega_{n+1} - \omega_n$ entre deux pulsations successives est donc

$$\Omega = \frac{1}{\tau}.$$

La bande passe est donnée par $\Delta\omega = \omega_{c,2} - \omega_{c,1}$, où

$$|H(j\omega_{c,1,2})| = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}.$$

On peut utiliser la symétrie de la courbe par rapport aux maxima pour chercher la plus petite pulsation ω_c telle que

$$|H(j\omega_c)| = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}.$$

La largeur de bande passante sera alors donnée par $\Delta\omega = 2\omega_c$.

On cherche ω_c telle que

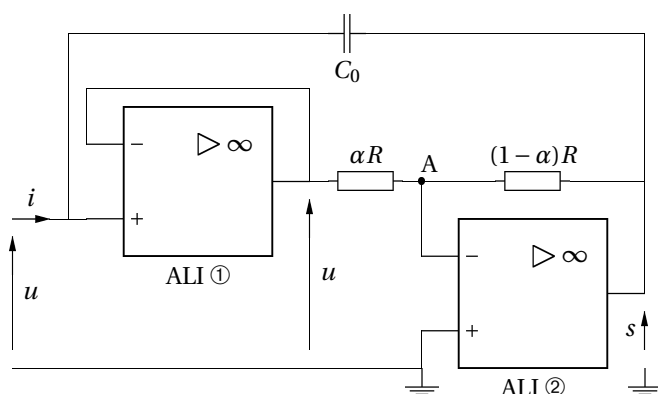
$$\frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\omega_c \tau)}} = \frac{1}{\sqrt{2}(1 - \alpha)^2}$$

soit

$$1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\omega\tau) = 2(1 - \alpha^2).$$

16 — Capacité réglable

On montre que le montage se comporte comme un condensateur, il faut établir la relation entre $\underline{u}$ et $\underline{i}$.



On reconnaît le montage suiveur de l'ALI n° 1; on retrouve donc la tension u à sa sortie.

Pour l'ALI n° 2, on a $V_- = V_+ = 0$. La loi des nœuds en terme de potentiel au point A s'écrit alors

$$\frac{u}{\alpha R} + \frac{s}{(1 - \alpha)R} = 0$$

soit

$$s = -\frac{1 - \alpha}{\alpha} u.$$

La relation courant-tension pour C_0 s'écrit

$$\underline{u} - \underline{s} = \frac{\underline{i}}{jC_0\omega}$$

d'où en remplaçant $\underline{s}$ par son expression

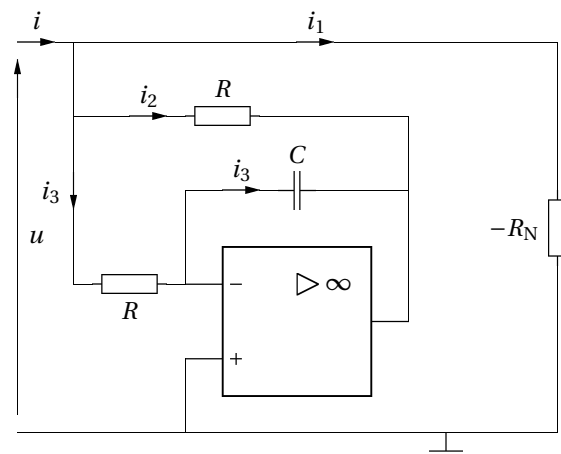
$$\underline{u} = \frac{\alpha}{jC_0\omega} \underline{i}.$$

On retrouve la relation caractéristique d'un condensateur de capacité $C = \frac{C_0}{\alpha}$.

Un condensateur variable est un composant encombrant. Les deux résistances αR et $(1 - \alpha)R$ sont réalisées à l'aide d'un simple potentiomètre, composant courant et peu encombrant. De plus, prendre une faible valeur de α permet de réaliser une capacité élevée (attention toutefois à ce que $|s|$ ne dépasse pas V_{sat} pour que l'ALI n° 2 garde un fonctionnement linéaire).

17 — Simulateur d'inductance

Représentons le circuit :



1. La loi des nœuds s'écrit

$$\underline{i} = \underline{i}_1 + \underline{i}_2 + \underline{i}_3.$$

On a

$$\underline{u} = -R_N \underline{i} \quad \text{et} \quad \underline{u} = R \underline{i}$$

car $\varepsilon = 0$.

Une maille permet d'écrire

$$\left(R + \frac{1}{jC\omega}\right) \underline{i}_3 = R \underline{i}_2$$

soit

$$\underline{i}_2 = \left(1 + \frac{1}{jRC\omega}\right) \underline{i}_3.$$

On a donc

$$\underline{i} = \left[-\frac{1}{R_N} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \left(1 + \frac{1}{jRC\omega}\right)\right] \underline{u}$$

soit

$$\underline{i} = \underline{Y} \underline{u} \quad \text{avec} \quad \underline{Y} = \frac{2}{R} - \frac{1}{R_N} + \frac{1}{jR^2C\omega}.$$

2. Pour $R = 2R_N$, on a

$$\underline{Y} = \frac{1}{jR^2C\omega}$$

soit

$$\underline{Z} = jR^2C\omega.$$

L'impédance d'entrée est de la forme

$$\underline{Z} = jL_{\text{eq}}\omega \quad \text{avec} \quad L_{\text{eq}} = R^2C.$$

L'intérêt est de pouvoir simuler des inductances très élevées, inaccessibles avec de simples bobines.

18 — Réactance-mètre

1. Réactance X

1.a) On a

$$\underline{Z} = R + jX = Z e^{j\phi} = Z(\cos\phi + j\sin\phi).$$

On en déduit

$$X = Z \sin\phi.$$

1.b) On considère $\phi \in]-\Pi, \Pi]$.

Si $\phi > 0$, on a $X > 0$.

Si $\phi < 0$, on a $X < 0$.

1.c) Le **condensateur** est un dipôle de réactance négative : $X = -\frac{1}{C\omega}$.

2. Recherche de $v_{s1}(t)$

L'ALI du bloc 1 est idéal et fonctionne dans le domaine linéaire. La tension $v_{s1}(t)$ s'écrit

$$v_{s1}(t) = V_{s1m} \cos(\omega t + \psi).$$

La loi des nœuds en terme de potentiel appliquée à l'entrée non inverseuse du bloc s'écrit, sachant que $V_{-,1} = V_{+,1} = 0$,

$$\frac{V_e}{R} + \frac{V_{s1}}{\underline{Z}}$$

d'où comme $\underline{V}_e = V_{em}$,

$$\underline{V}_{s1} = -\frac{Z e^{j\phi}}{R} V_{em} = \frac{Z}{R} V_{em} e^{j(\phi+\pi)}.$$

En identifiant avec $\underline{V}_{s1} = V_{s1m} e^{j\psi}$, on obtient

$$V_{s1m} = \frac{Z}{R} V_{em} \quad \text{et} \quad \psi = \phi + \pi.$$

3. Mesure de X

3.a) Le déphasage introduit par le bloc 2 conduit à

$$\underline{V}_{s2} = \underline{V}_{s1} e^{-j\pi/2} = V_{s1m} e^{j(\psi-\pi/2)}$$

d'où

$$v_{s2}(t) = V_{s1m} \cos(\omega t + \psi - \pi/2) = V_{s1m} \sin(\omega t + \psi)$$

soit

$$v_{s2}(t) = \frac{Z}{R} V_{em} \sin(\omega t + \psi).$$

► Il est nécessaire de revenir à la notation réelle lorsque l'on utilise le multiplieur, qui n'est pas un composant linéaire.

En sortie du multiplieur, on a

$$v_{s3}(t) = K v_{s2}(t) v_{s3}(t) = \frac{KZ}{R} V_{em}^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t + \psi).$$

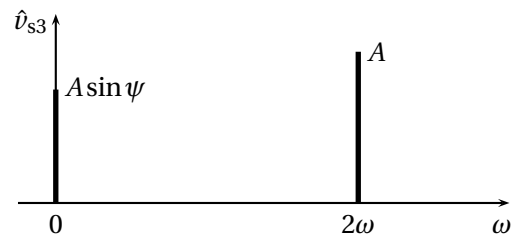
Avec $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$, on en déduit

$$v_{s3}(t) = \frac{KZ}{R} V_{em}^2 [\sin(2\omega t + \psi) + \sin\psi],$$

de la forme

$$v_{s3}(t) = A [\sin(2\omega t + \psi) + \sin\psi] \quad \text{avec} \quad A = \frac{KZ}{R} V_{em}^2.$$

3.b) Le spectre fréquentiel de $v_{s3}(t)$ comporte deux composantes :



3.c) La composante continue de $v_{s3}(t)$ s'écrit

$$U_3 = \frac{K}{R} V_{em}^2 Z \sin\psi = \frac{K}{R} V_{em}^2 Z \sin(\phi + \pi) = -\frac{K}{R} V_{em}^2 Z \sin\phi$$

soit

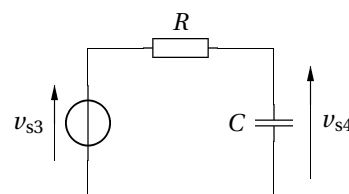
$$U_3 = -\frac{K}{R} V_{em}^2 X.$$

Connaissant K , R et V_{em} , on peut retrouver X .

4. Bloc 4

4.a) Le bloc 4 est un filtre passe-bas, dont la pulsation de coupure doit être petite devant 2ω .

4.b) Montage classique :



Il faut choisir R pour avoir $\omega_c = \frac{1}{RC} \ll 2\omega$.

4.c) La tension continue U_3 mesurée en sortie du dernier filtre permet de remonter à X d'après la question 3.c.