DM nº 1 Solution

1 — Lampe au néon (exercice d'oral)

1. Loi des mailles :

$$u + Ri_{\text{géné}} - E = 0$$

d'où

$$\boxed{i_{\text{géné}} = \frac{E-u}{R}}.$$

Le courant traversant le condensateur, orienté en convention générateur avec u, est

$$i = i_{\text{géné}} - i_{\text{néon}} = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

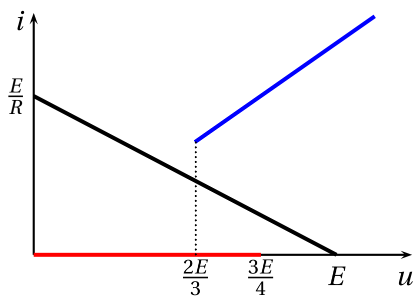
d'où

$$\boxed{i_{\text{géné}} = i_{\text{néon}} + C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}.$$

2. D'après le résultat précédent, on a $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} > 0$ si $\boxed{i_{\text{géné}} > i_{\text{néon}}}$.

La tension u est alors une fonction croissante du temps.

On place la droite $i(u) = \dfrac{E-u}{R}$ sur la caractéristique de la lampe :



On voit alors que quand la lampe est éteinte, on a $i_{\text{géné}} > i_{\text{néon}} = 0$ et $u(t)$ croît, tandis que quand la lampe est allumée, $i_{\text{géné}} < i_{\text{néon}}$ et $u(t)$ décroît.

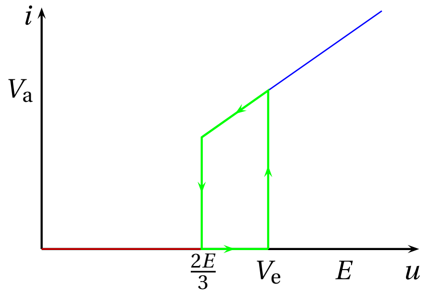
3. Initialement, le point représentatif est à l'origine, soit $i = 0$ et $u = 0$.

La lampe étant éteinte et d'après le graphe précédent $i_{\text{géné}} < i_{\text{néon}}$, donc $u(t)$ croît jusqu'à atteindre la valeur V_a, où le point de fonctionnement « saute » sur la courbe rouge.

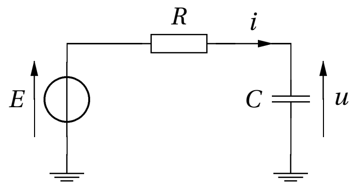
On est alors dans le domaine où $i_{\text{géné}} > i_{\text{néon}}$, donc $u(t)$ décroît : elle diminue jusqu'à la valeur V_e, où le point de fonctionnement redescend sur la courbe rouge.

La tension $u(t)$ est alors croissante, et le cycle précédent se répète.

Le fonctionnement est bien périodique, représenté par le cycle en vert sur la figure suivante.



4. Quand on ferme l'interrupteur, la lampe est d'abord éteinte, et le circuit se ramène à



On a donc

$$E - u = Ri = RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t},$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{\tau} = \frac{E}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = RC.$$

La solution de cette équation différentielle est de la forme

$$u(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau} + E.$$

Posons $t = 0$ l'instant du début du fonctionnement périodique [1] : $u(0) = \dfrac{2E}{3}$.

On a alors $A + E = \dfrac{2}{3}E$, d'où $A = -E/3$ et

$$u(t) = E\left(1 - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t/\tau}\right).$$

La lampe reste éteinte jusqu'à l'instant t_1 où

$$u(t_1) = \frac{3}{4}E = E\left(1 - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t_1/\tau}\right),$$

soit

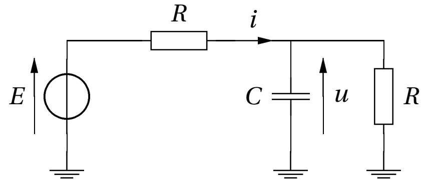
$$\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t_1/\tau} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

On a donc

$$t_1 = \tau \ln\frac{4}{3} = RC\ln\frac{4}{3}.$$

Quand la lampe est allumée, elle équivaut à une résistance R et le circuit devient

1. On change donc l'origine des temps par rapport à l'énoncé, pour simplifier les calculs.



La loi des nœuds s'écrit

$$\frac{E-u}{R} = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{R}$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{\tau'} = \frac{E}{2\tau'} \quad \text{avec} \quad \tau' = \frac{RC}{2}.$$

La solution est de la forme

$$u(t) = B\,\mathrm{e}^{-t/\tau'} + \frac{E}{2}.$$

Pour simplifier les calculs, nous allons calculer la durée de la phase où la lampe est allumée, en prenant comme nouvelle origine des temps l'instant où la lampe vient s'allumer.

On a donc

$$u(0) = \frac{3}{4}E = B + \frac{E}{2},$$

d'où $B = E/4$ et

$$u(t) = E\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t/\tau'}\right).$$

La lampe s'éteint alors au bout d'une durée t_2 telle que

$$u(t_2) = \frac{2}{3}E = E\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t_2/\tau'}\right),$$

soit

$$\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t_2/\tau'} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

On a donc

$$t_2 = \tau' \ln\frac{3}{2} = \frac{RC}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

La période est oscillations est

$$T = t_1 + t_2 = RC\ln\frac{4}{3} + \frac{RC}{2}\ln\frac{3}{2} = \frac{RC}{2}\left(\ln\frac{3}{2} + \ln\frac{16}{9}\right) = \frac{RC}{2}\ln\left(\frac{3\times 16}{2\times 9}\right)$$

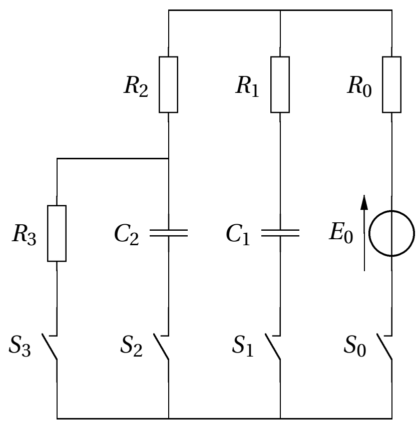
soit

$$\boxed{T = \frac{RC}{2}\ln\frac{8}{3}}.$$

---

2 — Circuit avec condensateurs (exercice d'oral)

Dans le circuit suivant, les interrupteurs sont initialement ouverts et les condensateurs déchargés.



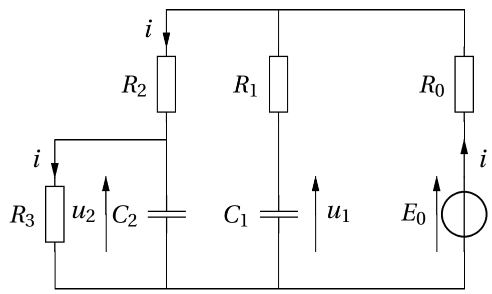
On donne $R_0 = 50\ \Omega$; $R_1 = R_2 = R_3 = 25\ \Omega$; $E_0 = 10$ V ; $C_1 = 1$ µF et $C_2 = 4$ µF.

1. Au bout d'un temps très long, on est en régime continu établi et les condensateurs se comportent comme des interrupteurs ouverts. Aucun courant ne traverse les résistances et la tension aux bornes de chaque résistance est nulle.

On a donc $u_{C_1} = u_{C_2} = E$, et les condensateurs portent les charges $\boxed{Q_1 = C_1 E}$ et $\boxed{Q_2 = C_2 E}$, soit

$$\boxed{Q_1 = 10\ \mu\mathrm{C}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q_2 = 40\ \mu\mathrm{C}}.$$

2. Les interrupteurs étant fermés, au bout d'un temps très long (pas de courant dans les condensateurs), on a



Le courant $i = \dfrac{E_0}{R_0 + R_2 + R_3}$ circule dans les résistances R_0, R_2 et R_3.

2. On peut écrire directement cette expression à partir du pont diviseur de tension.

On a donc[2]

$$u_2 = \frac{R_3}{R_0 + R_2 + R_3} E_0 \, .$$

Comme $Q_2 = C_2 u$, on en déduit

$$\boxed{Q_2 = \frac{C_2 R_3}{R_0 + R_2 + R_3} E_0} \, .$$

On calcule $\boxed{Q_2 = 10\ \mu\mathrm{C}}$.

Dans la maille « de droite », on a $E_0 - R_0 i - u_1 = 0$, d'où

$$u_1 = \frac{R_2 + R_3}{R_0 + R_2 + R_3} E_0 \, .$$

On a alors

$$\boxed{Q_1 = \frac{R_2 + R_3}{R_0 + R_2 + R_3} C_1 E_0} \, .$$

On calcule $\boxed{Q_1 = 5\ \mu\mathrm{C}}$.

3. Les interrupteurs S_0 et S_3 étant ouverts, le courant est nul dans toutes les branches du circuit au bout d'un temps très long. On a alors

$$u_1 = u_2$$

soit

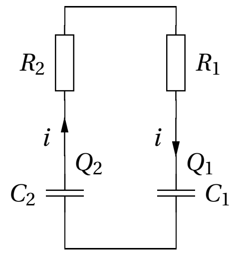
$$\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} \, .$$

La charge totale portée par les condensateurs est conservée, égale à la charge totale accumulée avant l'ouverture de S_0 et S_3 :

$$Q_1 + Q_2 = Q_0 \quad \text{avec} \quad Q_0 = \frac{C_1 (R_2 + R_3) + C_2 R_3}{R_0 + R_2 + R_3} E_0 \, .$$

On calcule $Q_0 = 15\ \mu\mathrm{F}$.

➤ On peut retrouver ce dernier résultat en considérant le circuit équivalent :



Compte tenu des orientations, on a

$$i = \frac{\mathrm{d}Q_1}{\mathrm{d}t} \quad \text{et} \quad i = -\frac{\mathrm{d}Q_2}{\mathrm{d}t}$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}(Q_1 + Q_2)}{\mathrm{d}t} = 0 \, .$$

On a donc $Q_1 + Q_2 = \text{cte} = Q_0$.

Des relations

$$Q_1 + Q_2 = Q_0 \quad \text{et} \quad \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}$$

on déduit

$$Q_1 + \frac{C_2}{C_1} Q_1 = Q_0$$

d'où

$$\boxed{Q_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} Q_0} \, .$$

On calcule $\boxed{Q_1 = 3\ \mu\mathrm{C}}$.

On a alors

$$\boxed{Q_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} Q_0} \, .$$

On calcule $\boxed{Q_2 = 12\ \mu\mathrm{C}}$.