

# Mathématiques et physique Traitement des incertitudes

On souhaite déterminer une évaluation expérimentale  $x_{\text{exp}}$  d'une grandeur  $x$ .

## 1 — Évaluation de type A de l'incertitude type (série de $N$ mesures)

On fait une approche statistique, à partir de  $N$  mesures  $x_i$  indépendantes. L'estimation de la grandeur mesurée est la moyenne des valeurs mesurées :

$$x_{\text{exp}} = \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i .$$

L'incertitude-type associée à la moyenne est donnée par

$$u(x) = \frac{\sigma(x)}{\sqrt{N}} \quad \text{avec} \quad \sigma(x) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} .$$

- $\sigma$  est l'écart-type de la distribution des  $N$  mesures.
- Plus on réalise de mesures ( $N$  grand), plus l'incertitude-type est réduite.

Avec python, si  $X$  est une série de mesures sous la forme d'un array :

- la moyenne est donnée par `X.mean()` ;
- l'écart-type est donné<sup>a</sup> par `X.std(ddof = 1)`.

<sup>a</sup>. L'instruction `ddof = 1` utilise  $N - 1$  au lieu de  $N$  dans le calcul de  $\sigma(X)$ .

## 2 — Évaluation de type B de l'incertitude type (mesure unique)

L'incertitude-type est donnée par

$$u(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} \quad \text{avec} \quad \Delta : \text{demi-largeur de l'intervalle de mesure.}$$

- La notice de l'appareil fournit une incertitude sous la forme  $\pm\Delta$  : on considère une loi de distribution uniforme avec un niveau de confiance égal à 100 %.
- Dans le cas d'une incertitude due à la lecture d'une valeur par l'expérimentateur, il s'agit d'estimer  $\Delta$  (plus petite graduation lisible, etc.).
- Les multimètres indiquent l'incertitude-type sous la forme  $n\%L + mUR$  (soit  $n\%$  de la valeur lue, ajoutée de  $m$  fois la puissance de 10 du dernier chiffre affiché).

## 3 — Présentation du résultat : niveau de confiance

L'incertitude type  $u(x)$  est donnée avec un **niveau de confiance de 68 %**.

- Ce résultat suppose une distribution des mesures qui suit la loi normale; 68 % des valeurs mesurées sont comprises dans l'intervalle  $[\bar{x} - u(x), \bar{x} + u(x)]$ . Le résultat est noté  $x = \bar{x} \pm u$ .
- Le niveau de confiance donne la probabilité que la valeur vraie (inconnue) de la grandeur mesurée se trouve dans l'intervalle défini par l'incertitude de mesure.
- Le **niveau de confiance à 95 %** est donné par l'**incertitude élargie** :  $U(x) = 2u(x)$  .

L'incertitude élargie est donnée avec **un seul chiffre significatif**, le résultat étant mis sous la forme  $x = x_{\text{exp}} \pm U(x)$ .  
 Le dernier chiffre significatif de  $x_{\text{exp}}$  doit avoir la même puissance de 10 que l'incertitude-type.  
 On arrondit toujours au chiffre supérieur.

Exemples :  $\lambda = 589 \pm 2 \text{ nm}$ ;  $T = 12,4 \pm 0,2 \text{ s}$ .

- Pour un calcul d'écart normalisé (cf. ci-après), on pourra garder 2 chiffres significatifs pour l'incertitude-type de façon à éviter des problèmes d'arrondi.

## 4 — Comparaison à une valeur de référence

On compare une valeur mesurée  $x_{\text{mes}}$ , d'incertitude-type  $u(x_{\text{mes}})$  à une valeur de référence  $x_{\text{réf}}$  d'incertitude-type  $u(x_{\text{réf}})$  en calculant l'écart normalisé (appelé aussi  $z$ -score)

$$z = \frac{|x_{\text{mes}} - x_{\text{réf}}|}{\sqrt{u^2(x_{\text{mes}}) + u^2(x_{\text{réf}})}}$$

$z \leq 2$  la mesure est jugée compatible avec la valeur de référence.  
 $z > 2$  la mesure est jugée incompatible avec la valeur de référence.

- Si l'incertitude-type de la valeur de référence est inconnue, on calcule  $z = \frac{|x_{\text{mes}} - x_{\text{réf}}|}{u(x_{\text{mes}})}$ .

## 5 — Incertitudes-type composées

### 5.1 Calcul direct à partir des valeurs mesurées

On souhaite déterminer l'incertitude-type sur une variable  $y_{\text{calc}}$ , calculée à partir d'une loi  $y_{\text{calc}} = f(x_1, x_2, \dots)$  faisant intervenir des grandeurs  $x_1, x_2, \dots$  dont on connaît les incertitudes-type.  
 Le principe de la propagation des incertitudes est basé sur la relation

$$u(y_{\text{calc}}) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 u^2(x_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 u^2(x_2) + \dots}$$

somme ou différence	$y_{\text{calc}} = x_1 \pm x_2$	$u(y_{\text{calc}}) = \sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2)}$
produit ou quotient	$y_{\text{calc}} = ax_1x_2$ ou $y_{\text{calc}} = a\frac{x_1}{x_2}$	$\frac{u(y_{\text{calc}})}{ y_{\text{calc}} } = \sqrt{\left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}$

## 5.2 Calcul à partir d'une mesure, par la méthode de Monte-Carlo

On souhaite évaluer une grandeur  $y = f(x_1, x_2)$  fonction des grandeurs mesurées  $x_1$  et  $x_2$ , à partir d'un jeu de valeurs mesurées  $x_{1,\text{mes}}, x_{2,\text{mes}}$ , dont on connaît les intervalles de précision :  $[x_{1,\text{mes}} - \Delta x_1, x_{1,\text{mes}} + \Delta x_1]$  et  $[x_{2,\text{mes}} - \Delta x_2, x_{2,\text{mes}} + \Delta x_2]$ .

On utilise l'outil informatique pour générer aléatoirement  $N \gg 1$  séries de grandeurs  $(x_1, x_2)$  à partir d'une loi de probabilité fournie. On utilise généralement une loi de probabilité uniforme pour générer les variables  $x_i$  dont la précision est estimée (graduations de lecture par exemple). Un tirage de la variable  $x$  sur l'intervalle  $[a, b]$  est réalisée par

```
np.random.uniform(a, b)
```

Dans le cas où l'incertitude-type  $\sigma$  sur la grandeur  $x$  est fournie, on peut utiliser une loi distribution normale (gaussienne) autour de la valeur moyenne  $x_m$  par

```
np.random.normal(x_m, sigma)
```

On calcule ensuite  $y = f(x_1, x_2)$  pour chaque couple de variables générés. On obtient alors une série de  $N$  valeurs de  $y$  (liste  $Y$ ), dont on peut calculer la moyenne et l'incertitude type :

```
Y_m = Y.mean()
u_Y = Y.std(ddof=1)
```

### Exemple

Considérons un filtre  $RC$  dont on veut mesurer la fréquence de coupure  $f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$ .

On mesure les valeurs de  $R$  et de  $C$  avec un multimètre, dont la notice précise les incertitudes  $u(R)$  et  $u(C)$ .

On mesure  $R_{\text{mes}} = 10,47 \text{ k}\Omega$  avec  $u(R) = 10 \text{ }\Omega$  et  $C_{\text{mes}} = 95,8 \text{ nF}$  avec  $u(C) = 0,4 \text{ nF}$ .

Le principe de la méthode de Monte-Carlo pour estimer  $\omega_0$  et son incertitude-type consiste à :

1. tirer un grand nombre  $N$  de valeurs aléatoires de  $R$  à partir d'une loi normale de moyenne  $R_{\text{mes}}$  et d'écart-type  $u(R)$ ;
2. tirer  $N$  valeurs aléatoires de  $C$  à partir d'une loi normale de moyenne  $C_{\text{mes}}$  et d'écart-type  $u(C)$ ;
3. pour chaque tirage, calculer la valeur  $f = \frac{1}{2\pi RC}$ . On obtient donc une série de  $N$  valeurs de  $f$  prenant en compte les variabilités de  $R$  et  $C$ ;
4. la valeur moyenne donne l'estimation de la fréquence  $f_0 = \langle f \rangle$ ; l'écart-type donne l'estimation de l'incertitude-type sur la fréquence.

```
import numpy as np

# Nombre de tirages aléatoires
N = int(1e6)

# valeurs de R et C avec leur incertitude-type
R = 10.47e3
u_R = 20
Delta_R = u_R/2
C = 95.8e-9
u_C = 0.4e-9
Delta_C = u_C/2

# tirage des valeurs de R et C
```

```

dist_R = np.random.uniform(R-Delta_R,R+Delta_R,N)
dist_C = np.random.uniform(C-Delta_C,C+Delta_C,N)

# génération de la liste des fréquences calculées pour chaque tirage
dist_F = 1/(2*np.pi*dist_R*dist_C)

# estimation de f_0 et de l'incertitude sur la fréquence

f_0 = dist_F.mean()
u_F = dist_F.std(ddof = 1)

print("f_0 = ",f_0,"u_F = ",u_F)

```

On obtient

$f_0 = 158.67512119317848$   $u_F = 0.21045864243814957$

On conserve le résultat  $f_0 = 158,7 \pm 0,3$  Hz.

Affichons l'histogramme des valeurs de la fréquence obtenues, en indiquant la moyenne  $f_0$  et les valeurs  $f_0 \pm u(f)$  :

```

plt.hist(dist_F,bins= 'rice',color='blue',alpha = .5)
plt.axvline(f_0, color='blue')
plt.axvline(f_0-uF,linestyle='--', color='blue')
plt.axvline(f_0+uF,linestyle='--', color='blue')
plt.title( "f_0 = (m:.4 ± u:.1) Hz".format(m=f_0,u=uF))
plt.show()

```

