

TD d'électronique n° 3

Solutions

2 — Oscillateur

1. En très basses fréquences, les condensateurs se comportent comme des interrupteurs ouverts; celui en série avec R déconnecte donc la sortie de l'entrée, et $s(t) = 0$.

En très hautes fréquences, les condensateurs se comportent comme des court-circuits; celui en parallèle avec R court-circuite donc la sortie, et $s(t) = 0$.

On a donc un comportement passe-bande.

On remarque que

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} H(j\omega) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} H(j\omega) = 0.$$

C'est en accord avec l'étude qualitative.

2. Quand la tension de sortie est en phase avec la tension d'entrée, la fonction de transfert est réelle. C'est réalisé pour $\omega = \omega_0$. On a donc $\omega_0 = 2\pi f_0$ soit

$$\omega_0 = 1,0 \times 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

À cette fréquence, on a $H(j\omega_0) = H_0 = \frac{U_s}{U_e}$; comme

$$U_s = \frac{U_e}{3}, \text{ on en déduit } H_0 = \frac{1}{3}.$$

3. Le déphasage de la tension de sortie par rapport à la tension d'entrée est donné par

$$\tan \varphi = -Q \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right).$$

Il vaut $\pm 45^\circ$ quand $Q \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right) = \pm 1$. Le gain vaut alors

$G = \frac{H_0}{\sqrt{2}}$. Les fréquences correspondantes sont donc les

fréquences de coupure à -3 dB ; on a donc $\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{1}{Q}$,

$$\text{d'où } Q = \frac{f_0}{f_2 - f_1} = \frac{1,6}{5,3 - 0,48}, \text{ soit } Q = \frac{1}{3}.$$

4. On obtient quand l'ALI est en régime linéaire

$$\frac{v_s(t)}{v_e(t)} = G_0 \text{ avec } G_0 = 1 + \frac{R_2}{R_1}.$$

$$\text{Il faut } |v_s(t)| = G_0 |v_e(t)| < V_{\text{sat}}, \text{ soit } |v_e(t)| < \frac{V_{\text{sat}}}{G_0}.$$

5. Tout d'abord, il faut établir l'équation différentielle entre les tensions d'entrée et de sortie du filtre.

On a

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{H_0}{1 + j \frac{Q\omega}{\omega_0} + \frac{Q\omega_0}{j\omega}},$$

soit

$$\left(1 + \frac{Q}{\omega_0} j\omega + \frac{Q\omega_0}{j\omega} \right) v_2 = H_0 v_1$$

d'où

$$(j\omega)^2 v_2 + \frac{\omega_0}{Q} j\omega v_2 + \omega_0^2 v_2 = H_0 \frac{\omega_0}{Q} j\omega v_1.$$

Comme $H_0 = Q = 1/3$, on a

$$(j\omega)^2 v_2 + 3\omega_0 j\omega v_2 + \omega_0^2 v_2 = \omega_0 j\omega v_1.$$

L'équation différentielle est alors

$$\frac{d^2 v_2}{dt^2} + 3\omega_0 \frac{dv_2}{dt} + \omega_0^2 v_2 = \omega_0 \frac{dv_1}{dt}.$$

Quand l'ALI est linéaire, l'étage amplificateur impose entre $v_1(t)$ et $v_2(t)$ la relation $v_1(t) = G_0 v_2(t)$ où $G_0 = 1 + \frac{R_2}{R_1}$.

On en déduit

$$\frac{d^2 v_2}{dt^2} + (3 - G_0)\omega_0 \frac{dv_2}{dt} + \omega_0^2 v_2 = 0.$$

Quand l'ALI est saturé, on a $v_1(t) = V_{\text{sat}}$ et l'équation différentielle est

$$\frac{d^2 v_2}{dt^2} + 3\omega_0 \frac{dv_2}{dt} + \omega_0^2 v_2 = 0.$$

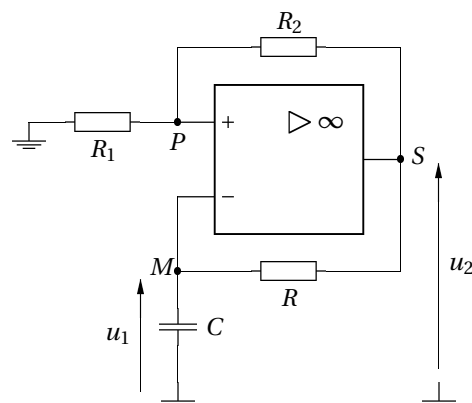
Les oscillations harmoniques ne sont possibles qu'avec l'ALI linéaire, pour $G_c = 3$.

Si $G < G_c$, pas d'oscillations. Si $G > G_c$, oscillations amplifiées jusqu'à arriver à la saturation de l'ALI; on a alors des oscillations amorties jusqu'au retour au fonctionnement linéaire de l'ALI, etc. On a des oscillations, mais pas sinusoïdales.

6. D'après le portrait de phase, on a des oscillations pas du tout sinusoïdales. L'ALI est assez souvent saturé : la courbe 2 représente $v_1(t)$. La courbe 1 représente donc $v_2(t)$. La courbe 4 représente $v_1(t)$ en fonction de $v_2(t)$: on distingue la zone de linéarité de l'ALI, et les deux paliers à $v_1(t) = \pm V_{\text{sat}}$ qui correspondent à la saturation de l'ALI.

3 — Oscillateur à relaxation

On considère le montage suivant, où l'on admet que l'ALI fonctionne en régime de saturation.

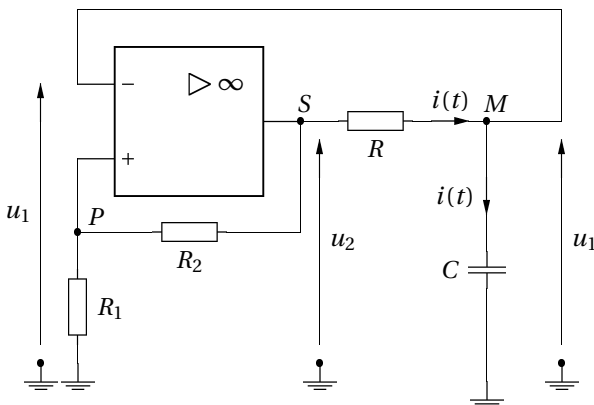


1. Analysons le premier montage :

- le nœud M est situé à l'entrée inverseuse de l'ALI : y sont reliés le condensateur C connecté à la masse, et la résistance R connectée à la sortie de l'ALI;
- le nœud P est situé à l'entrée non inverseuse de l'ALI : y sont reliés la résistance R_1 connectée à la masse, et la résistance R_2 connectée à la sortie de l'ALI;
- Le nœud S est situé à la sortie de l'ALI, connecté aux résistances R_1 et R_2 .

Replaçons ces nœuds sur le deuxième schéma, ainsi que les tensions :

- u_1 de la masse au nœud M , aux bornes de C ;
- u_1 de la masse au nœud S .



Le bloc situé entre S et M a pour fonction de transfert

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{j\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}.$$

Dans le domaine des fréquences élevées, telles que $RC\omega \gg 1$, on peut écrire $1 + jRC\omega \approx jRC\omega$, d'où

$$\underline{H}(j\omega) \approx \frac{1}{jRC\omega}.$$

Il s'agit d'un **intégrateur**.

Le bloc constitué de l'ALI, R_1 et R_2 est un comparateur à hystérésis. C'est l'élément inverseur.

2. L'ALI fonctionne en régime saturé (rétroaction sur l'entrée non inverseuse).

On a

$$V_+ = u_P = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u_2 \quad \text{et} \quad V_- = u_1.$$

La tension différentielle d'entrée est

$$\varepsilon = V_+ - V_- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u_2 - u_1.$$

Considérons la sortie dans l'état $u_2 = +V_{\text{sat}}$. On a alors

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}} - u_1 > 0$$

soit

$$u_1 < \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}}.$$

Considérons la sortie dans l'état $u_2 = -V_{\text{sat}}$. On a alors

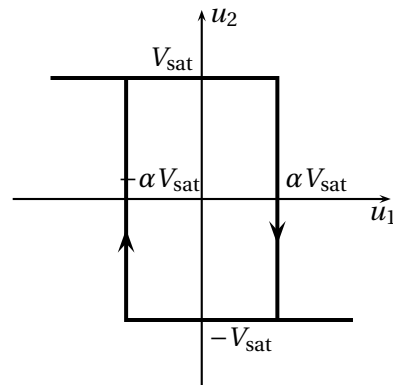
$$-\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}} - u_1 < 0$$

soit

$$u_1 > -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}}.$$

En posant $\alpha = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$, on a donc

$$\begin{cases} u_2 = +V_{\text{sat}} & \text{pour } u_1 < \alpha V_{\text{sat}} \\ u_2 = -V_{\text{sat}} & \text{pour } u_1 > -\alpha V_{\text{sat}} \end{cases}$$

3. Le courant étant nul dans l'entrée inverseuse de l'ALI, R et C sont traversées par le même courant $i(t)$. On a donc

$$i(t) = C \frac{du_1}{dt} \quad \text{et} \quad u_2(t) = Ri(t) + u_1(t).$$

On a donc, en posant $\tau = RC$,

$$u_2(t) = \tau \frac{du_1}{dt} + u_1(t). \quad (1)$$

Analyse qualitative

Considérons la sortie de l'ALI dans l'état haut : $u_2 = V_{\text{sat}}$; d'après le cycle d'hystérésis, cette situation correspond à $u_1 < \alpha V_{\text{sat}}$. Comme $\alpha < 1$, on en déduit $u_1 < u_2$, donc $u_2 - u_1 > 0$. De l'équation earedE1-1 on déduit $\frac{du_1}{dt} > 0$: la tension $u_1(t)$ augmente, jusqu'à atteindre la valeur αV_{sat} à laquelle se produit la bascule de u_2 vers l'état $-V_{\text{sat}}$. Ce nouvel état correspond à $u_1 > -\alpha V_{\text{sat}}$; on a alors $u_2 - u_1 < 0$, soit $\frac{du_1}{dt} < 0$: la tension u_1 décroît jusqu'à atteindre la valeur $-\alpha V_{\text{sat}}$ où la tension u_2 bascule de nouveau vers $+V_{\text{sat}}$. On a ainsi décrit une période.

On suppose qu'à l'instant $t = 0$, l'ALI vient de basculer en position basse. On a donc d'après le cycle d'hystérésis :

$$u_2(0) = -V_{\text{sat}} \quad \text{et} \quad u_1(0) = \alpha V_{\text{sat}}.$$

L'équation (1) s'écrit alors

$$\tau \frac{du_1}{dt} + u_1 = -V_{\text{sat}}.$$

La solution générale s'écrit

$$u_1(t) = Ae^{-t/\tau} - V_{\text{sat}}.$$

La condition initiale s'écrit

$$A - V_{\text{sat}} = \alpha V_{\text{sat}}$$

d'où $A = (1 + \alpha)V_{\text{sat}}$. On a donc

$$u_1(t) = V_{\text{sat}} \left[(1 + \alpha)e^{-t/\tau} - 1 \right] \quad \text{pour} \quad u_2 = -V_{\text{sat}}.$$

La tension $u_1(t)$ décroît jusqu'à l'instant t_1 où elle atteint le seuil de bascule

$$u(t_1) = -\alpha V_{\text{sat}}$$

soit

$$V_{\text{sat}} \left[(1 + \alpha)e^{-t_1/\tau} - 1 \right] = -\alpha V_{\text{sat}}.$$

On en déduit $e^{-t_1/\tau} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$, d'où

$$t_1 = \tau \ln \left(\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right).$$

4. On pose le changement de variable $t' = t - t_1$ afin de prendre comme nouvelle origine des temps le début de la seconde phase.

Comme $\frac{du_1}{dt} = \frac{du_1}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{du_1}{dt'}$, l'équation (1) s'écrit

$$u_2(t') = \tau \frac{du_1}{dt'} + u_1(t').$$

La seconde phase correspondant à $u_2(t') = +V_{\text{sat}}$, on en déduit

$$\tau \frac{du_1}{dt'} + u_1 = V_{\text{sat}}.$$

La solution générale s'écrit

$$u_1(t') = Be^{-t'/\tau} + V_{\text{sat}}.$$

La condition initiale décrit

$$B + V_{\text{sat}} = -\alpha V_{\text{sat}}$$

d'où $B = -(1 + \alpha)V_{\text{sat}}$. On a donc

$$u_1(t') = V_{\text{sat}} \left[1 - (1 + \alpha)e^{-t'/\tau} \right].$$

L'ALI bascule en saturation basse à l'instant t'_2 tel que

$$u(t'_2) = \alpha V_{\text{sat}}$$

soit

$$V_{\text{sat}} \left[1 - (1 + \alpha)e^{-t'_2/\tau} \right] = \alpha V_{\text{sat}}.$$

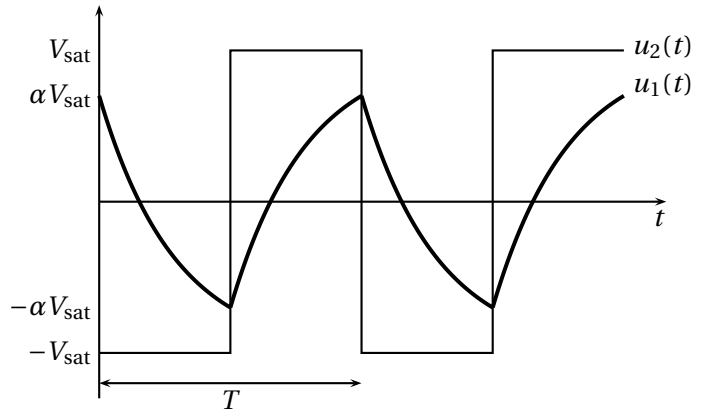
On en déduit $e^{-t'_2/\tau} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$, d'où

$$t'_2 = \tau \ln \left(\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right).$$

La troisième phase correspond à la première phase, déjà étudiée. La première et la seconde phase correspondent donc à une période de l'oscillateur.

5. La première phase a une durée t_1 et la seconde une durée t'_2 . La période des oscillations est donc $T = t_1 + t'_2$, soit

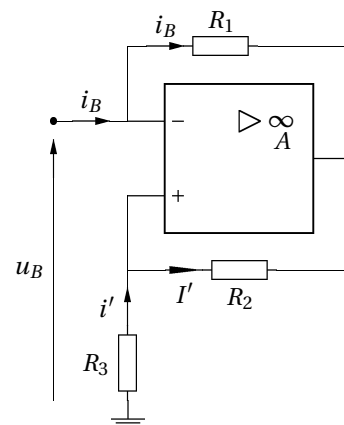
$$T = 2\tau \ln \left(\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right).$$



► Il apparaît ici que $u_1(t)$ n'est pas l'intégrale de $u_2(t)$ (ce devrait être alors un signal triangulaire). Ce serait le cas si $\tau \gg T$, ce qui correspond bien à la condition $RC\omega \gg 1$ établie en régime harmonique.

4 — Oscillateur quasi-sinusoïdal

1. On considère le montage :



L'ALI est linéaire, donc $\varepsilon = V_+ - V_- = 0$. On a donc $u_B = -R_3 i'$. D'autre part, on a $R_1 i_B = R_2 i'$.

On en déduit

$$u_B = -\frac{R_3}{R_2} R_1 i_B$$

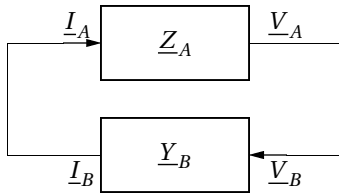
soit

$$\underline{Y_B} = -\frac{R_2}{R_1 R_3}.$$

2. Le circuit r, L, C série est caractérisé par (attention, nous sommes en convention générateur!)

$$\underline{Z}_A = -r - j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right).$$

3. On réalise le bouclage suivant :



On a donc $\underline{V}_A = \underline{Z}_A \underline{I}_A$ et $\underline{I}_B = \underline{Y}_B \underline{V}_B$, avec $\underline{V}_A = \underline{V}_B$ et $\underline{I}_B = \underline{I}_A$, d'où

$$\underline{V}_A = \underline{Z}_A \underline{Y}_B \underline{V}_A.$$

► On pourrait établir la condition d'oscillation à partir de cette relation complexe, mais nous allons passer par l'équation différentielle.

On en déduit

$$\underline{V}_A = \left(-r - jL\omega - \frac{1}{jC\omega} \right) \left(-\frac{R_2}{R_1 R_3} \right) \underline{V}_A$$

soit

$$\frac{R_1 R_3}{R} \underline{V}_A = \left(r + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} \right) \underline{V}_A.$$

On fait apparaître une écriture polynomiale en $j\omega$:

$$\frac{R_1 R_3}{R} jC\omega \underline{V}_A = jrC\omega \underline{V}_A + LC(j\omega)^2 \underline{V}_A + \underline{V}_A.$$

On en déduit

$$\frac{R_1 R_3}{R_2} C \frac{dv_A}{dt} = rC \frac{dv_A}{dt} + LC \frac{d^2 v_A}{dt^2} + v_A(t),$$

soit

$$\frac{d^2 v_A}{dt^2} + \frac{1}{L} \left(r - \frac{R_1 R_3}{R_2} \right) \frac{dv_A}{dt} + \frac{1}{LC} v_A(t) = 0.$$

4. Le circuit bouclé est le siège d'oscillations sinusoïdales si l'équation différentielle se ramène à celle de l'oscillateur harmonique; c'est le cas pour

$$\frac{R_1 R_3}{R_2} = r.$$

5. On a alors

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{1}{LC} v_A(t) = 0,$$

oscillateur harmonique à la pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

La fréquence des oscillations est donc

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Commentaire : le montage à ALI modélise une « résistance négative » d'après l'expression de la transmittance; il permet ainsi que compenser les pertes par effet Joule dans la résistance r .

5 — Générateur de tonalité

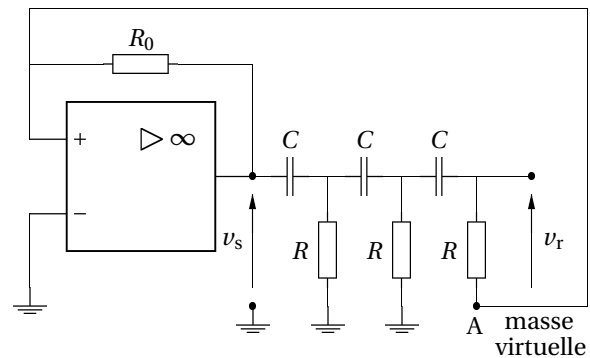
1. On a $RC\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}$. On calcule alors

$$\begin{aligned} \underline{B}(j\omega_0) &= \frac{\left(\frac{j}{\sqrt{6}}\right)^3}{1 + \frac{5}{\sqrt{6}}j + 6\left(\frac{j}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{j}{\sqrt{6}}\right)^3} \\ &= \frac{\frac{-j}{6\sqrt{6}}}{1 + \frac{5}{\sqrt{6}}j - \frac{6}{6} - \frac{j}{6\sqrt{6}}} = \frac{\frac{-j}{6\sqrt{6}}}{\frac{5}{\sqrt{6}}j - \frac{j}{6\sqrt{6}}} = -\frac{1}{5 \times 6 - 1} \end{aligned}$$

soit $\underline{B}(j\omega_0) = -\frac{1}{29}.$

La fonction de transfert est réelle à la pulsation ω_0 (et négative : la sortie est en opposition de phase par rapport à l'entrée).

2. Considérons le point A :



On a $v_A = V_+$ car le point A est relié à l'entrée non inverseuse de l'ALI.

L'ALI étant linéaire, on a $V_+ = V_- = 0$, donc $v_A = 0$: le potentiel du point A est nul, comme s'il était relié à la masse, mais aucun fil ne le relie électriquement à la masse; on parle de masse virtuelle.

3. On se ramène à un amplificateur inverseur :

$$A = -\frac{R_0}{R}.$$

4. Avec le bouclage, à la pulsation ω_0 on peut écrire

$$v_T = \underline{B}(j\omega_0) v_s = -\frac{v_s}{24} = -\frac{1}{24} \left(-\frac{R_0}{R} \right) v_T$$

soit

$$v_T = \frac{R_0}{24R} v_T.$$

Cette relation peut être vérifiée pour $v_T \neq 0$ (le système génère un signal) si $R_0 = 24R$.

5. On a

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{6}RC}$$

d'où

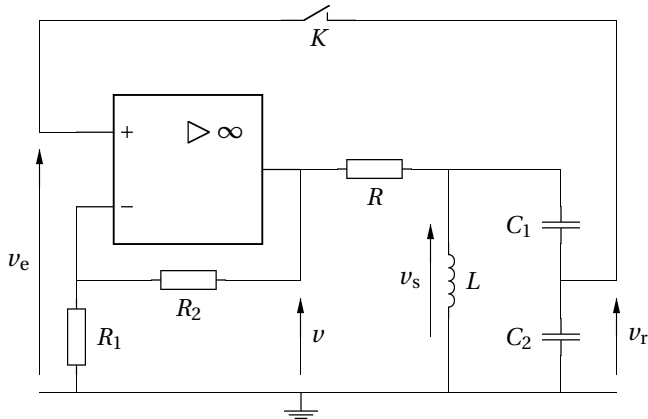
$$C = \frac{1}{2\sqrt{6}\pi R f_0} = \frac{1}{2\sqrt{6}\pi \times 4,14 \times 10^3 \times 440},$$

soit $C = 47 \text{ nF}$.

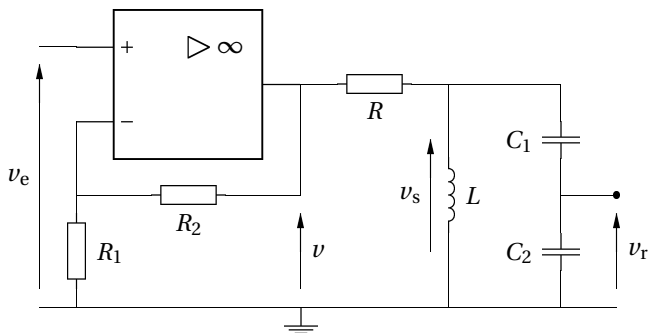
Culture : cette fréquence correspond au diapason actuel, utilisé pour accorder les instruments de musique dans la musique occidentale.

6 — Oscillateur à ALI

Dans le montage suivant, l'ALI est considéré comme idéal.



1. L'interrupteur K est en position ouverte, le montage se ramène à



Le montage à ALI est un amplificateur non inverseur (cf. cours). La transmittance est

$$\underline{T}_1 = \frac{\underline{v}}{\underline{v}_e} = A \quad \text{et} \quad A = 1 + \frac{R_2}{R_1}.$$

On peut écrire

$$\underline{T}_2 = \frac{\underline{v}_r}{\underline{v}} = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}} \times \frac{\underline{v}_r}{\underline{v}_s}.$$

La sortie étant ouverte, les deux condensateurs sont en série; ils sont équivalents à un condensateur de capacité $C_{\text{eq}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$.

Pour calculer $\underline{v}_s$, on remarque que l'on a une structure en pont diviseur de tension, où R est en série avec l'impédance $\underline{Z}$ constituée de l'association en parallèle de L et C_{eq} , soit

$$\underline{Z} = \frac{jL\omega \frac{1}{jC_{\text{eq}}\omega}}{jL\omega + \frac{1}{jC_{\text{eq}}\omega}} = \frac{jL\omega}{1 - LC_{\text{eq}}\omega^2}.$$

1. On veut qu'une expression de la forme $\frac{jb}{a+jb} = \frac{jb(a-jb)}{a^2+b^2} = b \frac{b+ja}{a^2+b^2}$, soit $b = 0$.

On a donc

$$\frac{\underline{v}_s}{\underline{v}} = \frac{\underline{Z}}{R + \underline{Z}} = \frac{\frac{jL\omega}{1 - LC_{\text{eq}}\omega^2}}{R + \frac{jL\omega}{1 - LC_{\text{eq}}\omega^2}}$$

soit

$$\frac{\underline{v}_s}{\underline{v}} = \frac{jL\omega}{R(1 - LC_{\text{eq}}\omega^2) + jL\omega}.$$

Les condensateurs étant en série, une structure en pont diviseur de tension permet d'écrire

$$\frac{\underline{v}_r}{\underline{v}_s} = \frac{\frac{1}{jC_2\omega}}{\frac{1}{jC_1\omega} + \frac{1}{jC_2\omega}} = \frac{C_1}{C_1 + C_2}.$$

On en déduit

$$\underline{T}_2 = \frac{\underline{v}_r}{\underline{v}} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \frac{jL\omega}{R(1 - LC_{\text{eq}}\omega^2) + jL\omega}.$$

2. Quand l'interrupteur K est fermé, le second circuit est toujours en « sortie ouverte » car le courant entrant dans l'entrée non inverseuse de l'ALI est nul. On peut donc utiliser les résultats de la question précédente et écrire

$$\frac{\underline{v}_r}{\underline{v}_e} = \frac{\underline{v}_r}{\underline{v}} \frac{\underline{v}}{\underline{v}_e} = \underline{T}_2 \underline{T}_1.$$

On a donc $\underline{v}_r = \underline{T}_1 \underline{T}_2 \underline{v}_e$. Le bouclage imposant $\underline{v}_e = \underline{v}_r$, on en déduit

$$(1 - \underline{T}_1 \underline{T}_2) \underline{v}_e = 0.$$

Cette équation doit admettre une solution $\underline{v}_e \neq 0$ pour qu'il puisse osciller. La condition d'oscillations est donc

$$\underline{T}_1 \underline{T}_2 = 1,$$

soit

$$A \frac{C_1}{C_1 + C_2} \frac{jL\omega}{R(1 - LC_{\text{eq}}\omega^2) + jL\omega} = 1.$$

On peut limiter les calculs¹ en remarquant que $\underline{T}_2$ est réelle si $R(1 - LC_{\text{eq}}\omega^2) = 0$, et vaut alors $\underline{T}_2 = 1$. Le circuit oscille donc à la pulsation

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_{\text{eq}}}}.$$

La relation sur les transmittances s'écrit alors

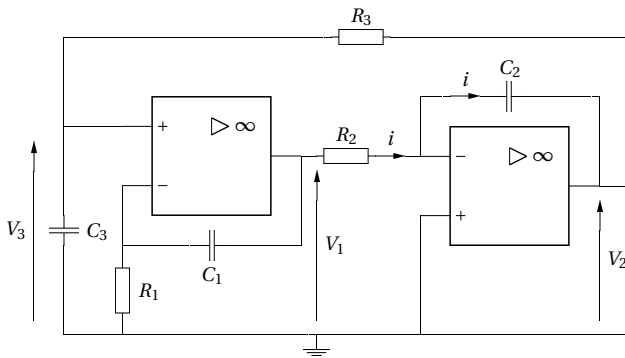
$$A \frac{C_1}{C_1 + C_2} = 1.$$

➤ Cette relation conduit après simplification à

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Il n'est pas possible de prévoir l'amplitude des oscillations.

7 — Oscillateur sinus-cosinus



1. Les ALI étant linéaires, on a $\varepsilon = 0$. La tension $\underline{V}_3$ se retrouve donc aux bornes de R_1 . Les dipôles R_1 et C_1 étant traversés par la même intensité (car $i_- = 0$), on a une structure en pont diviseur de tension, et

$$\underline{V}_3 = \frac{R_1}{R_1 + \frac{1}{jC_1\omega}} \underline{V}_1 = \frac{jR_1C_1\omega}{1 + jR_1C_1\omega} \underline{V}_1,$$

d'où

$$\underline{H}_1 = \frac{1 + j\omega\tau_1}{j\omega\tau_1}.$$

On a

$$\underline{V}_1 = R_2 \underline{I} \quad \text{et} \quad \underline{V}_2 = -\frac{1}{jC_2\omega} \underline{I}$$

d'où $\underline{V}_2 = -\frac{1}{jR_2C_2\omega} \underline{V}_1$. On a donc

$$\underline{H}_2 = -\frac{1}{j\omega\tau_2}.$$

Enfin, R_3 et C_3 sont parcourus par la même intensité. La tension $\underline{V}_3$ est aux bornes de C_3 , tandis que la tension $\underline{V}_2$ se retrouve aux bornes de l'association en série de R_3 et C_3 ; cette structure en pont diviseur permet d'écrire

$$\underline{V}_3 = \frac{\frac{1}{jC_3\omega}}{R_3 + \frac{1}{jC_3\omega}} \underline{V}_2 = \frac{1}{1 + jR_3C_3\omega} \underline{V}_2,$$

d'où

$$\underline{H}_3 = \frac{1}{1 + j\omega\tau_3}.$$

2. À partir de

$$\underline{H}_1 = \frac{\underline{V}_1}{\underline{V}_3}, \quad \underline{H}_2 = \frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} \quad \text{et} \quad \underline{H}_3 = \frac{\underline{V}_3}{\underline{V}_2},$$

nous obtenons la relation

$$\underline{H}_1 \underline{H}_2 \underline{H}_3 = 1,$$

soit

$$-\left(1 + \frac{1}{j\omega\tau_1}\right) \frac{1}{j\omega\tau_2} \frac{1}{1 + j\omega\tau_3} = 1,$$

2. Se reporter à l'exercice 3 du TD n° 2.

d'où

$$-\frac{1 + j\omega\tau_1}{j\omega\tau_1} \frac{1}{j\omega\tau_2} \frac{1}{1 + j\omega\tau_3} = 1.$$

On a donc

$$1 + j\omega\tau_1 = \omega^2\tau_1\tau_2(1 + j\omega\tau_3).$$

En identifiant les parties réelles d'une part et les parties imaginaires d'autre part, on obtient

$$1 = \omega^2\tau_1\tau_2 \quad \text{et} \quad \omega\tau_1 = \omega^3\tau_1\tau_2\tau_3,$$

Soit

$$1 = \omega^2\tau_1\tau_2 \quad \text{et} \quad 1 = \omega^2\tau_2\tau_3.$$

Une première condition sur les valeurs des composants est $\tau_1 = \tau_3$, soit $R_1C_1 = R_3C_3$.

La pulsation des oscillations est alors donnée par

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}.$$

3. On a

$$\underline{V}_2 = \underline{H}_2 \underline{V}_1 \quad \text{avec} \quad \underline{H}_2 = \frac{j}{\omega\tau_2}.$$

La tension $v_2(t)$ est donc déphasée de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à la tension $v_1(t)$.

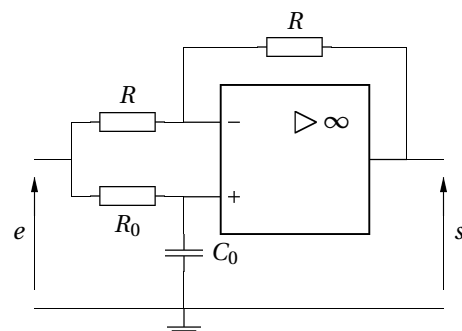
Par exemple, si $v_1(t) = V_{1,0} \sin(\omega t)$, on a

$$v_2(t) = \frac{V_{1,0}}{\omega\tau_2} \sin(\omega t + \pi/2) = \frac{V_{1,0}}{\omega\tau_2} \cos(\omega t).$$

Si l'une des deux tensions est un sinus, l'autre est un cosinus, d'où le nom du montage.

8 — Oscillateur à déphaseur

1. On considère le circuit suivant, fonctionnant en régime linéaire.



On a d'une part²

$$\underline{V}_- = \frac{e + s}{2}$$

et d'autre part

$$\underline{V}_+ = \frac{1}{1 + jR_0C_0\omega} e.$$

L'ALI étant idéal en régime linéaire, on a $\underline{V}_+ = \underline{V}_-$, d'où

$$\frac{\underline{e} + \underline{s}}{2} = \frac{1}{1 + jR_0C_0\omega} \underline{e}.$$

On en déduit la fonction de transfert

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1 - jR_0C_0\omega}{1 + jR_0C_0\omega}.$$

On remarque que

$$G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = 1.$$

De plus

$$\varphi(\omega) = \arg(\underline{H}) = -2 \arctan(R_0C_0\omega).$$

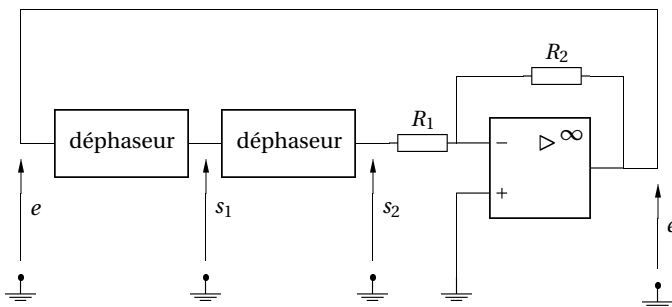
Ce circuit est donc un filtre passe-tout déphaseur.

La sortie et l'entrée sont-elles en quadrature, c'est-à-dire $\varphi = -\pi/2$, pour

$$R_0C_0\omega = \tan(\pi/4) = 1$$

soit pour $\omega_0 = \frac{1}{R_0C_0}$.

2. On réalise ensuite le circuit bouclé suivant :



Le montage amplificateur inverseur a une transmittance

$$\underline{A} = \frac{\underline{e}}{\underline{s}_2} = -\frac{R_2}{R_1}.$$

En notant $\underline{B}$ la transmittance des deux cellules déphaseurs en série, on a

$$\underline{s}_2 = \underline{B} \underline{e}.$$

On déduit de ces deux relations

$$\underline{s}_2 = -\underline{B} \frac{R_2}{R_1} \underline{s}_2$$

soit

$$\left(1 + \frac{R_2}{R_1} \underline{B}\right) \underline{s}_2 = 0.$$

Le montage peut donner naissance à des oscillations si

$$1 + \frac{R_2}{R_1} \underline{B} = 0.$$

La fonction de transfert $\underline{B}$ des deux cellules déphaseurs doit donc être un réel négatif, c'est-à-dire avoir un argument de $\pm\pi$.

Avec deux circuits déphaseurs identiques à celui étudié précédemment, ce sera le cas à la pulsation $\omega_0 = \frac{1}{R_0C_0}$: chaque élément déphaseur introduit un déphasage de $-\pi/2$; le déphasage introduit par les deux éléments est donc égale à $-\pi$. On a alors $\underline{B} = -1$ et la condition d'oscillations s'écrit

$$1 = -\frac{R_2}{R_1} \times (-1) = \frac{R_2}{R_1}.$$

Il faut donc $R_2 = R_1$.

La fréquence des oscillations est alors $f_0 = \frac{1}{2\pi R_0C_0}$.

3. On attend une réponse qualitative (inutile de se lancer dans l'étude de l'équation différentielle). Par analogie avec l'oscillateur à pont de Wien, un gain supérieur de l'étage amplificateur se traduira par une saturation de l'ALI ; on peut s'attendre à des oscillations non harmoniques.

9 — Étude d'un oscillateur

1. On a par un pont diviseur de tension

$$\underline{V}_- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \underline{V}_s.$$

L'ALI étant linéaire (rétroaction sur l'entrée inverseuse), on a $\underline{V}_E = \underline{V}_+ = \underline{V}_-$, soit

$$\underline{V}_E = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \underline{V}_s.$$

On a donc

$$\underline{V}_s = (1 + a) \underline{V}_E \quad \text{avec} \quad a = \frac{R_2}{R_1}.$$

2.a) On peut donc envisager un pont diviseur de tension :

$$\underline{V}_B = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} \underline{V}_A = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \underline{V}_A.$$

On peut relier $\underline{V}_s$ à $\underline{V}_A$ par un pont diviseur de tension, entre R et l'association de C en parallèle avec R et C en série, soit

$$\underline{V}_A = \frac{Z}{R + Z} \underline{V}_s = \frac{1}{1 + RY} \underline{V}_s$$

avec

$$\underline{Y} = jC\omega + \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}} = jC\omega + \frac{jC\omega}{1 + jRC\omega}.$$

On a donc

$$\underline{V}_A = \frac{1}{1 + jRC\omega + \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}} \underline{V}_s.$$

On en déduit

$$\underline{V}_B = \frac{jRC\omega}{1+jRC\omega} \frac{1}{1+jRC\omega + \frac{jRC\omega}{1+jRC\omega}} \underline{V}_S$$

$$= \frac{jRC\omega}{(1+jRC\omega)^2 + jRC\omega} \underline{V}_S = \frac{jRC\omega}{1+3jRC\omega + (jRC\omega)^2} \underline{V}_S$$

d'où la fonction de transfert

$$\underline{H} = \frac{jRC\omega}{1+3jRC\omega - R^2C^2\omega^2}.$$

► On peut la mettre sous la forme canonique

$$\underline{H} = \frac{1/3}{1 + \frac{j}{3}(RC\omega - \frac{1}{RC\omega})}.$$

2.b) Très basse fréquence :

$\underline{H} \approx jRC\omega$ et $G_{dB,BF} = 20 \log(RC\omega)$. Asymptote de pente 20 dB/décade.

Très haute fréquence :

$\underline{H} \approx \frac{1}{jRC\omega}$ et $G_{dB,HF} = -20 \log(RC\omega)$. Asymptote de pente -20 dB/décade.

On peut tracer le diagramme de Bode asymptotique, les asymptotes se coupant en $\omega_0 = 1/RC$.

3. Comme $i_+ = 0$, le bloc $\{S, B, M\}$ garde la même fonction de transfert. On a de plus $\underline{V}_B = \underline{V}_E$, d'où

$$\underline{V}_E = \underline{H} \underline{V}_S = (1+\alpha) \underline{H} \underline{V}_E,$$

soit

$$\underline{V}_E = \frac{(1+\alpha)jRC\omega}{1+3jRC\omega + (jRC\omega)^2} \underline{V}_E.$$

On a donc

$$\underline{V}_E + 3RCj\omega \underline{V}_E + R^2C^2(j\omega)^2 \underline{V}_E = (1+\alpha)RCj\omega \underline{V}_E$$

qui donne l'équation différentielle

$$V_E(t) + 3RC \frac{dV_E}{dt} + R^2C^2 \frac{d^2V_E}{dt^2} = (1+\alpha)RC \frac{dV_E}{dt}.$$

La tension $V_E(t)$ vérifie donc l'équation différentielle

$$\frac{d^2V_E}{dt^2} + \frac{2-\alpha}{RC} \frac{dV_E}{dt} + \frac{1}{R^2C^2} V_E(t) = 0.$$

On peut l'écrire

$$\frac{d^2V_E}{dt^2} + (2-\alpha)\omega_0 \frac{dV_E}{dt} + \omega_0^2 V_E(t) = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}.$$

4. On obtient l'équation de l'oscillateur harmonique pour $a = a_0$ avec $a_0 = 2$.

5.a) Avec les valeurs données, on calcule

$$\omega_0 = \frac{1}{10^3 \times 10^{-6}} = 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

On a de plus $2-\alpha = 2 - (2+0,1) = -0,1$.

L'équation différentielle s'écrit alors

$$\frac{d^2V_E}{dt^2} - 10^2 \frac{dV_E}{dt} + 10^6 V_E = 0.$$

Le discriminant de l'équation caractéristique associée vaut

$$\Delta = 10^4 - 4 \times 10^6 \approx -4,00 \times 10^6.$$

Les racines de l'équation caractéristique valent donc

$$r = \frac{10^2}{2} \pm j \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = 50 \pm j10^3.$$

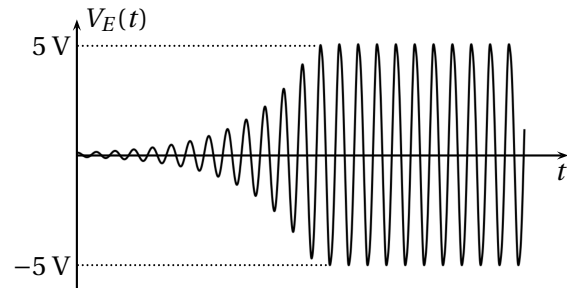
La solution générale s'écrit alors

$$V_E(t) = e^{50t} [A \cos(10^3 t) + B \sin(10^3 t)]$$

où A et B sont des constantes déterminées par les conditions initiales.

5.b) Le phénomène limitant est la saturation de la tension de sortie de l'ALI, $V_{S,\max} = \pm 15 \text{ V}$, soit avec $a \approx 2$, $V_{E,\max} = \pm \frac{V_{\text{sat}}}{3} = \pm 5 \text{ V}$.

On observe des oscillations dont l'amplitude croît avec une constante de temps $\tau = \frac{1}{50} = 20 \text{ ms}$, jusqu'à trouver des oscillations stables, quasi-sinusoïdales (car a est peu supérieur à a_0) dont l'amplitude est limitée 5 V.



10 — Oscillateur à réseau déphaseur

1. Fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1+jRC\omega}$.

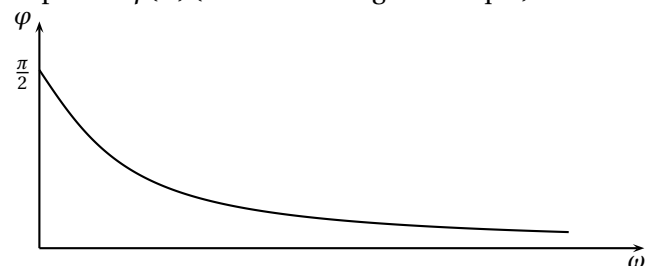
C'est un **filtre passe-haut**.

Pour $\omega \rightarrow 0$, on a $\underline{H} \approx jRC\omega$ et $\varphi = +\pi/2$.

Pour $\omega \rightarrow \infty$, on a $\underline{H} \approx 1$ et $\varphi = 0$.

On a $\varphi = \pi/2 - \arctan(RC\omega)$.

Graphique de $\varphi(\omega)$ (échelle non logarithmique) :



2. L'ALI est en **suiveur**. En l'absence d'ALI, la fonction de transfert du filtre passe-bas RC dépend de ce qui est branché après : son impédance d'entrée n'est pas infinie et son impédance de sortie n'est pas nulle.

Avec l'ALI, la fonction de transfert des quatre filtres en cascade est $\underline{H}' = (\underline{H})^4$.

3. Le premier étage est un ampli inverseur de gain

$$G = \frac{v_2(t)}{v_1(t)} = -\frac{R'}{R}.$$

Avec le bouclage, on a donc en notation complexe

$$\underline{v}_1 = \underline{H}^4 \underline{v}_2 \quad \text{et} \quad \underline{v}_2 = -\frac{R'}{R} \underline{v}_1,$$

d'où

$$\underline{v}_1 = -\frac{R'}{R} \underline{H}^4 \underline{v}_1.$$

Pour avoir $\underline{v}_1 \neq 0$, il faut donc

$$\underline{H}^4 = -\frac{R}{R'}. \quad (2)$$

L'argument de (2) donne $4 \arg(\underline{H}) = \pi$, soit $\arg(\underline{H}) = \frac{\pi}{4}$.

Avec $\varphi = \pi/2 - \arctan(RC\omega)$, il faut donc $\arctan(RC\omega_0) = \pi/4$, soit $RC\omega_0 = 1$.

On a alors

$$\underline{H}(j\omega_0) = \frac{j}{1+j} \quad \text{et} \quad |\underline{H}(j\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Le module de (2) donne alors

$$\frac{R}{R'} = \frac{1}{4}.$$

4. On prend $C = \frac{1}{2\pi R f_0} = 16 \text{ nF}$ et $R' = 4R = 4 \text{ k}\Omega$.

5. Avec trois filtres, on obtient $\underline{H}^3 = -\frac{R}{R'}$.

On en déduit de même qu'il faut $\arg(\underline{H}(j\omega_0)) = \pi/3$, ce qui est possible car $\arg \underline{H}$ varie de $\pi/2$ à 0.

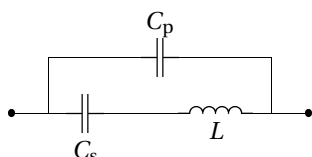
La pulsation des oscillations sera différente du cas précédent.

On avait $RC\omega_0 = 1$.

On a maintenant $RC\omega'_0 = \tan \pi/3 > 1$ donc $\omega'_0 > \omega_0$.

11 — Oscillateur à quartz

1. En négligeant la résistance R_s , le schéma équivalent du quartz est



Calculons d'abord son admittance compte tenu de sa structure parallèle :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\underline{Z}} &= jC_p\omega + \frac{1}{jL\omega + \frac{1}{jC_s\omega}} = jC_p\omega + \frac{jC_s\omega}{1 - LC_s\omega^2} \\ &= \frac{jC_p\omega(1 - LC_s\omega^2) + jC_s\omega}{1 - LC_s\omega^2} \end{aligned}$$

d'où

$$\underline{Z} = \frac{1 - LC_s\omega^2}{jC_p\omega + jC_s\omega - jC_p\omega LC_s\omega^2} = \frac{1 - LC_s\omega^2}{jC_{\text{éq}}\omega - jC_p\omega LC_s\omega^2}$$

en posant $C_{\text{éq}} = C_1 + C_2$, soit

$$\underline{Z} = \frac{1}{jC_{\text{éq}}\omega} \frac{1 - LC_s\omega^2}{1 - \frac{C_p C_s}{C_{\text{éq}}} L\omega^2} = \frac{1}{jC_{\text{éq}}\omega} \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_s^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2}}$$

avec

$$\omega_s = \frac{1}{\sqrt{LC_s}} \quad \text{et} \quad \omega_p = \sqrt{\frac{C_p + C_s}{C_p C_s L}}.$$

En terme de fréquence, on a donc

$$\underline{Z}(f) = \frac{1}{jC_{\text{éq}}2\pi f} \frac{1 - \frac{f^2}{f_s^2}}{1 - \frac{f^2}{f_p^2}}$$

avec

$$C_{\text{éq}} = C_p + C_s; \quad f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_s}}; \quad f_p = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{C_p + C_s}{C_p C_s L}}.$$

On calcule $f_s = 32,7680 \text{ kHz}$ et $f_p = 32,7681 \text{ kHz}$.

➤ Ces deux valeurs sont très proches.

On a $f_0 = 2^{15} = 32,7680 \text{ kHz}$: **ce quartz peut convenir pour l'horlogerie.**

2. L'impédance peut s'écrire

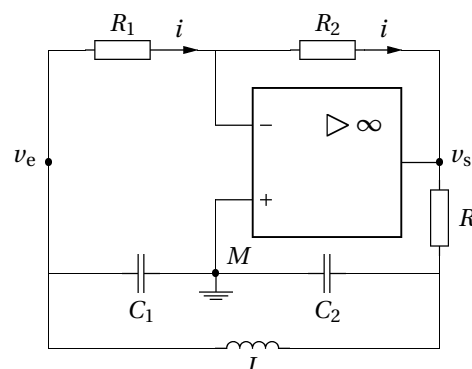
$$\underline{Z}(f) = jX \quad \text{avec} \quad X = -\frac{1}{C_{\text{éq}}2\pi f} \frac{1 - \frac{f^2}{f_s^2}}{1 - \frac{f^2}{f_p^2}}.$$

On a donc

$$\begin{cases} X < 0 & \text{pour } f < f_s \\ X > 0 & \text{pour } f_s < f < f_p \\ X < 0 & \text{pour } f > f_p \end{cases}$$

Le quartz a un comportement inductif pour $f_s < f < f_p$.

3. On considère le montage équivalent à



3.a) L'ALI fonctionnant en régime linéaire, on a $V_+ = V_- = 0$, donc

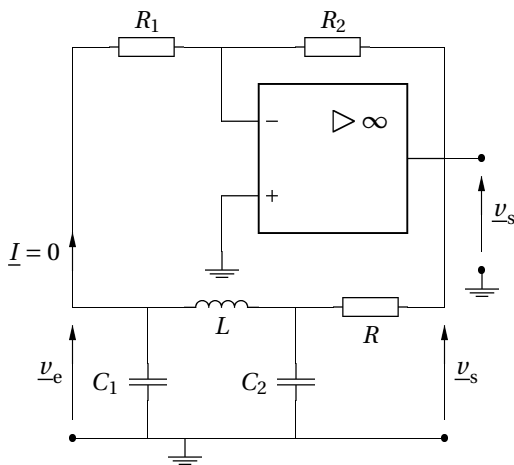
$$\underline{v}_e = R_1 \underline{i} \quad \text{et} \quad \underline{v}_s = -R_2 \underline{i}$$

d'où

$$\underline{v}_s = -\frac{R_2}{R_1} \underline{v}_e.$$

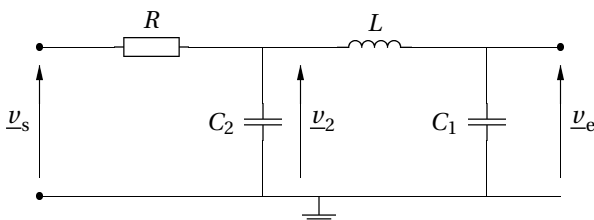
3.b) On peut considérer ce montage deux blocs en rétroaction, la chaîne directe étant constituée de l'amplificateur inverseur à ALI, et la chaîne de retour par le filtre comprenant le quartz modélisé par L .

Pour une meilleure compréhension, on peut représenter le circuit ainsi :



Négliger le courant traversant R_1 revient à considérer comme infinie l'impédance d'entrée de l'amplificateur (c'est une approximation, ce n'est pas exact). On peut donc considérer que la chaîne de retour est en sortie ouverte, ce qui permet d'établir sa transmittance « facilement ». Attention : $\underline{v}_s$ est la « tension d'entrée » et $\underline{v}_e$ la « tension de sortie » pour la chaîne de retour.

Représentons la chaîne de retour de son entrée vers sa sortie :



Une simple structure en pont diviseur permet d'écrire

$$\underline{v}_e = \frac{\frac{1}{jC_1\omega}}{\frac{1}{jC_1\omega} + jL\omega} \underline{v}_2 = \frac{1}{1 - LC_1\omega^2} \underline{v}_2.$$

La relation entre $\underline{v}_2$ et $\underline{v}_s$ se détermine à partir d'un pont diviseur entre la résistance R et l'impédance $\underline{Z}$ constituée de l'association en parallèle de C_2 avec l'as-

sociation de L et C_1 en série. On a

$$\underline{Z} = \frac{\frac{1}{jC_2\omega} \left(\frac{1}{jC_1\omega} + jL\omega \right)}{\frac{1}{jC_2\omega} + \frac{1}{jC_1\omega} + jL\omega} = \frac{\frac{1}{jC_2\omega} (1 - LC_1\omega^2)}{1 + \frac{C_1}{C_2} - LC_1\omega^2} = \frac{1 - LC_1\omega^2}{jC_1\omega + jC_2\omega - LC_1\omega^2 jC_2\omega}$$

soit

$$\underline{Z} = \frac{1 - LC_1\omega^2}{jC_1\omega + jC_2\omega(1 - LC_1\omega^2)}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \frac{\underline{v}_2}{\underline{v}_s} &= \frac{\underline{Z}}{R + \underline{Z}} = \frac{\frac{1 - LC_1\omega^2}{jC_1\omega + jC_2\omega(1 - LC_1\omega^2)}}{R + \frac{1 - LC_1\omega^2}{jC_1\omega + jC_2\omega(1 - LC_1\omega^2)}} \\ &= \frac{1 - LC_1\omega^2}{jRC_2\omega + jRC_2\omega(1 - LC_1\omega^2) + 1 - LC_1\omega^2} \\ &= \frac{1 - LC_1\omega^2}{1 + jR(C_1 + C_2)\omega - LC_1\omega^2 - jRLC_1C_2\omega^3}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{\underline{v}_e}{\underline{v}_s} = \frac{1}{1 - LC_1\omega^2} \frac{1 - LC_1\omega^2}{1 + jR(C_1 + C_2)\omega - LC_1\omega^2 - jRLC_1C_2\omega^3}$$

d'où la relation demandée

$$\frac{\underline{v}_e}{\underline{v}_s} = \frac{1}{1 + jR(C_1 + C_2)\omega - LC_1\omega^2 - jRLC_1C_2\omega^3}.$$

3.c) Dans le système bouclé, on adjoint les relations établies aux questions 3.a et 3.b, soit

$$\frac{\underline{v}_e}{\underline{v}_s} = \frac{1}{1 + jR(C_1 + C_2)\omega - LC_1\omega^2 - jRLC_1C_2\omega^3} = -\frac{R_1}{R_2}.$$

Le terme de gauche doit être réel, donc

$$R(C_1 + C_2)\omega - RLC_1C_2\omega^3 = 0$$

Soit $C_1 + C_2 - LC_1C_2\omega^2 = 0$ ce qui fixe la pulsation des oscillations :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{LC_1C_2}}.$$

L'égalité précédente s'écrit alors

$$\frac{1}{1 - LC_1\omega_0^2} = -\frac{R_1}{R_2}.$$

Avec $LC_1\omega_0^2 = \frac{C_1 + C_2}{C_2}$, on en déduit

$$-\frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{1 - \frac{C_1 + C_2}{C_2}} = -\frac{C_2}{C_1},$$

d'où la condition sur le gain de l'ampli

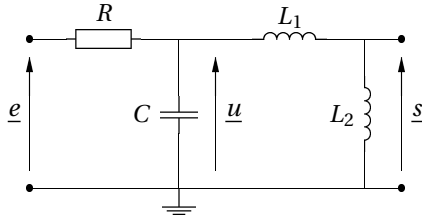
$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{C_2}{C_1}.$$

12 — Oscillateur de Hartley

1. En très basse fréquence, la bobine L_2 équivaut à un fil, d'où $s = 0$.

En très haute fréquence, la bobine L_1 équivaut à un interrupteur ouvert, d'où $s = 0$.

On prévoit un comportement en **filtre passe-bande**.



Introduisons la tension $\underline{u}$ (cf. schéma).

Le pont diviseur de tension formé de L_1 et L_2 permet d'écrire

$$\underline{s} = \frac{jL_2\omega}{jL_1\omega + jL_2\omega} \underline{u} = \frac{L_2}{L_1 + L_2} \underline{u}.$$

On a une structure de pont diviseur avec $\underline{e}$ et $\underline{u}$, où $\underline{u}$ est prise aux bornes de l'associant de C en parallèle avec les deux bobines en série, soit

$$\underline{u} = \frac{\underline{Z}}{R + \underline{Z}} \underline{e} = \frac{1}{1 + R\underline{Y}} \underline{e}$$

avec

$$\underline{Y} = jC\omega + \frac{1}{j(L_1 + L_2)\omega},$$

d'où

$$\underline{u} = \frac{1}{1 + jRC\omega + \frac{R}{j(L_1 + L_2)\omega}} \underline{e}.$$

On a donc

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\underline{s}}{\underline{u}} \frac{\underline{u}}{\underline{e}}$$

soit

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{L_2}{L_1 + L_2}}{1 + jRC\omega + \frac{R}{j(L_1 + L_2)\omega}}.$$

On identifie avec la forme canonique d'un filtre passe-bande du second ordre

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}.$$

On a immédiatement

$$H_0 = \frac{L_2}{L_1 + L_2}.$$

Les termes en ω et $1/\omega$ du dénominateur donnent

$$\frac{Q}{\omega_0} = RC \quad \text{et} \quad Q\omega_0 = \frac{R}{L_1 + L_2}$$

d'où

$$Q = R\sqrt{\frac{C}{L_1 + L_2}} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C(L_1 + L_2)}}.$$

2. L'ALI étant linéaire (rétroaction sur l'entrée inverseuse), on a par un pont diviseur de tension

$$\underline{V}_+ = \frac{R_1}{R_1 + \alpha R_1} \underline{u} = \frac{1}{1 + \alpha} \underline{u}.$$

Comme $i_- = 0$, la fonction de transfert en sortie ouverte du montage précédent reste valable, d'où

$$\underline{V}_+ = \underline{H} \underline{u} = \underline{H}(1 + \alpha) \underline{V}_+.$$

On a donc

$$[1 - (1 + \alpha)\underline{H}(j\omega)] \underline{V}_+ = 0.$$

On aura un fonction en oscillateur, c'est-à-dire $\underline{V}_+ \neq 0$, pour

$$1 - (1 + \alpha)\underline{H}(j\omega) = 0,$$

soit

$$\frac{(1 + \alpha)H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = 0$$

L'annulation de la partie imaginaire conduit à $\omega = \omega_0$; la pulsation des oscillations est

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C(L_1 + L_2)}}.$$

On a alors

$$1 = (1 + \alpha)H_0 = (1 + \alpha) \frac{L_2}{L_1 + L_2}$$

d'où la condition

$$\alpha = \frac{L_1}{L_2}.$$

3. On lit le gain maximum sur le diagramme :

$$G_{\text{dB,max}} = 20 \log G_{\text{max}} = -4,5 \text{ dB}.$$

Comme

$$G_{\text{max}} = G(\omega_0) = H_0 = \frac{L_2}{L_1 + L_2}$$

on en déduit

$$\frac{L_2}{L_1 + L_2} = 10^{-\frac{4,5}{20}} \approx 0,60.$$

Oa a alors

$$\alpha = \frac{L_1 + L_2}{L_2} - 1 = \frac{1}{0,6} - 1$$

soit $\alpha = 0,68$.

On lit avec précision la fréquence des oscillations car $\varphi(f_0) = 0$, soit $f_0 = 1000 \text{ Hz}$.