

Complément mathématique

Analyse spectrale d'un signal

1 — Décomposition en série de Fourier

Soit $u(t)$ un signal de période $T = 2\pi/\omega$. On peut écrire $u(t)$ comme la somme d'une série trigonométrique :

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) \cos(n\omega t) dt \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) \sin(n\omega t) dt \end{cases}$$

L'instant t_0 est un instant choisi arbitrairement¹. On choisit usuellement d'intégrer sur $[-T/2, T/2]$ ou $[0, T]$. On peut aussi écrire la décomposition sous la forme

$$u(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

les coefficients étant alors donnés par $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ et $\varphi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n}$

Le terme constant représente la **valeur moyenne** du signal : $c_0 = \frac{a_0}{2} = \langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$.

Le signal $u(t)$ se décompose comme la somme d'un terme constant et de signaux harmoniques de pulsations $\omega_n = n\omega$ multiples de la pulsation du signal.

- La composante $c_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$ est appelée **harmonique de rang n** .
- L'harmonique de rang 1 est appelé le **fondamental**. C'est un signal sinusoïdal de même période que $u(t)$.

On peut écrire la décomposition en série de Fourier sous forme complexe :

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{c}_n e^{i2\pi n f t} \quad \text{avec} \quad \underline{c}_n = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) e^{-i2\pi n f t} dt. \quad (1)$$

- Pour un signal à valeurs réelles, on a $\underline{c}_n = \underline{c}_{-n}^*$.

Propriétés

L'amplitude des harmoniques tend vers zéro quand leur rang tend vers l'infini : $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$.

Cas d'un signal pair : si $u(t)$ est **paire**, on a $b_n = 0, \forall n$, et $u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t)$.

- L'expression des coefficients se simplifie alors sous la forme $a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} u(t) \cos(n\omega t) dt$.

Cas d'un signal impair : si $u(t)$ est **impaire**, on a $a_n = 0, \forall n$, et $u(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\omega t)$

- L'expression des coefficients se simplifie alors sous la forme $b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} u(t) \sin(n\omega t) dt$.

Égalité de Parseval

Elle relie la valeur moyenne quadratique du signal $u(t)$ à ses coefficients de Fourier :

$$\langle u^2(t) \rangle = c_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n^2$$

1. L'intégrale est calculé sur tout intervalle de largeur T_0 .

2 — Représentation fréquentielle d'un signal

Un signal $u(t)$ peut avoir une représentation temporelle ou une représentation fréquentielle.

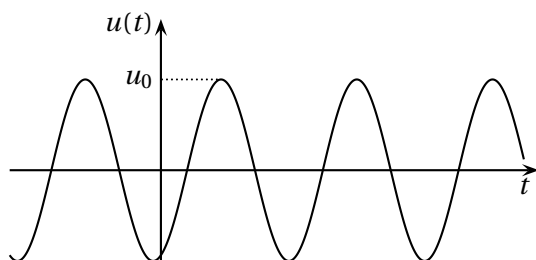
La représentation fréquentielle d'un signal est construite ainsi :

- l'axe des abscisses représente la fréquence (ou la pulsation) ;
- l'axe des ordonnées représente l'amplitude (ou la phase) de chaque harmonique ;
- un harmonique est représenté par une « raie » positionnée à la fréquence correspondante ;
- la valeur moyenne c_0 est représentée par une raie placée à l'origine (fréquence nulle).

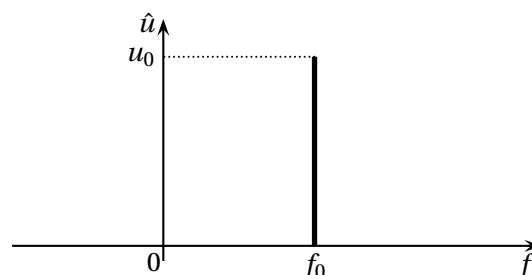
Exemples

Soit $u(t) = u_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ un signal harmonique de fréquence f_0 .

Représentation temporelle

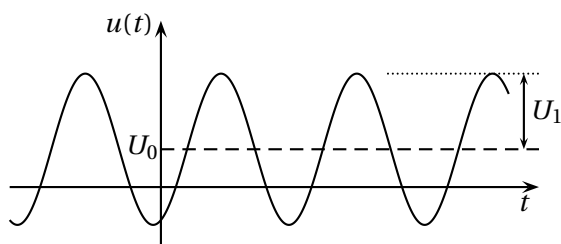


Représentation fréquentielle (en amplitude)

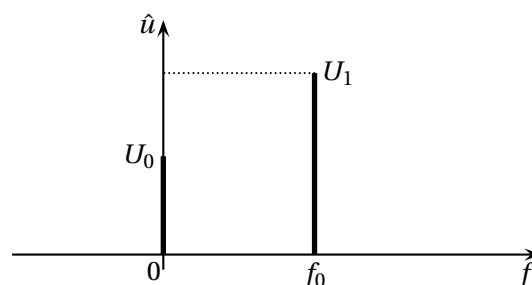


Soit $u(t) = U_0 + U_1 \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$. Sa valeur moyenne est $\langle s(t) \rangle = U_0$. L'amplitude des oscillations autour de U_0 est U_1 .

Représentation temporelle

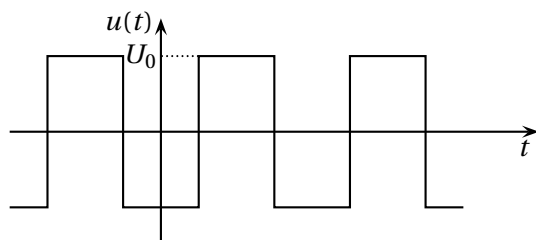


Représentation fréquentielle (en amplitude)

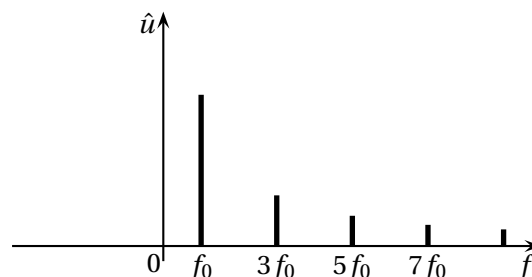


Soit $u(t)$ un signal carré de période $T = 1/f_0$, d'amplitude U_0 , symétrique.

Représentation temporelle



Représentation fréquentielle (en amplitude)



Cas d'un signal présentant une symétrie de glissement

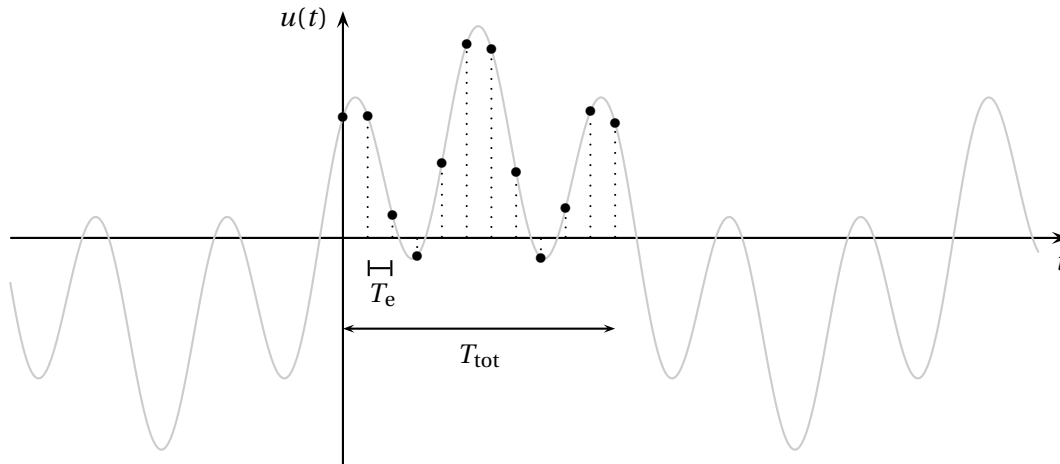
Une fonction f de période T présente une symétrie de glissement si $f(t + T/2) = -f(t)$: elle est changée en son opposé par translation d'une demi-période, et présente donc des alternances positives et négatives de même forme. C'est le cas des signaux créneaux, triangulaires ou en dents de scie.

Le spectre d'une telle fonction ne comporte que des harmoniques de rang impair : $a_{2n} = 0$ et $b_{2n} = 0$.

3 — Analyse spectrale d'un signal échantillonné

3.1 Échantillonnage d'un signal

Considérons un échantillon de durée totale T_{tot} , comprenant N points.



La période d'échantillonnage, intervalle de temps entre deux mesures consécutives, est $T_e = \frac{T_{\text{tot}}}{N-1}$.

► Quand $N \gg 1$, on peut considérer $T_e = T_{\text{tot}}/N$.

La **fréquence d'échantillonnage** est définie par $F_e = 1/T_e$.

► Les trois paramètres T_{tot} , T_e et N sont réglables avec Latis Pro. Dans la pratique, on fixe les valeurs de deux paramètres, le troisième est calculé à partir de la relation $T_{\text{tot}} = (N-1)T_e$.

3.2 Analyse spectrale

Critère de Shannon

Selon le critère de Shannon, une analyse de Fourier effectuée sur un signal $u(t)$ échantillonné avec une fréquence F_e ne peut restituer de fréquence f supérieure à $\frac{F_e}{2}$ dans le spectre de $u(t)$.

- Il faut donc avoir à l'esprit qu'en échantillonnant à la fréquence F_e , toutes les fréquences $f > F_e/2$ présentes dans le signal analysé seront « perdues » dans le spectre calculé.
- Le spectre est bien calculé sur l'intervalle de fréquence $[0, F_e]$, mais seule la première moitié $[0, F_e/2]$ est utile.
- Le spectre est constitué de N points calculés sur l'intervalle de fréquence $[0, F_e]$; la distance entre deux points successifs, qui représente la **résolution spectrale**, est donc $\Delta f = \frac{F_e}{N-1} = \frac{1}{T_{\text{tot}}}$.

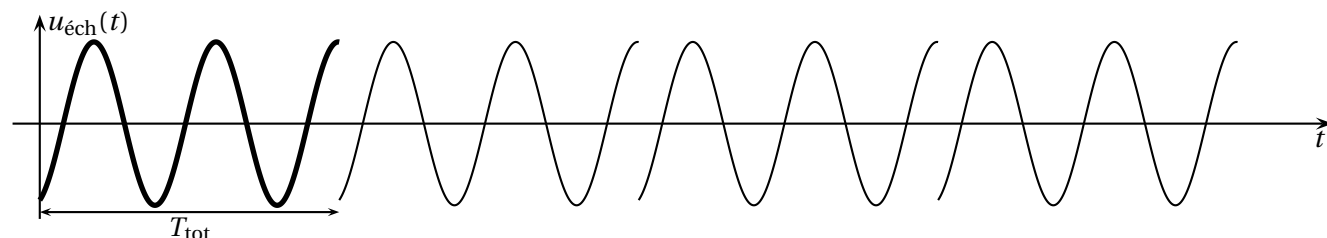
Il faut échantillonner sur une longue durée pour avoir une bonne résolution spectrale.

- Pour un nombre N de points donnés, augmenter la durée T_{tot} revient à diminuer la fréquence d'échantillonnage $F_e = (N-1)/T_{\text{tot}}$, c'est-à-dire à limiter les fréquences accessibles en vertu du critère de Shannon. Il faut faire un compromis entre la résolution spectrale et la fréquence maximale accessible.

3.3 Choix du signal — Fenêtrage

Un spectre est défini pour une fonction périodique². Nous ne disposons pas ici d'un signal continu, mais d'un échantillon de durée T_{tot} (qui n'est donc pas périodique!).

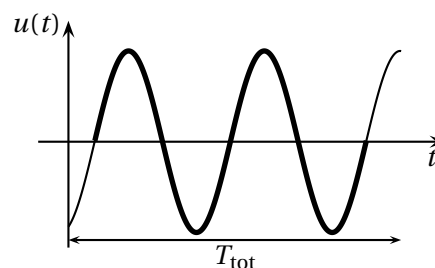
La construction du spectre à partir de cet échantillon revient à construire un signal périodique, en dupliquant et juxtaposant l'échantillon de durée T_e . On obtient donc un signal périodique par construction, dont T_{tot} est une période.



Partant d'un signal $u(t)$ sinusoïdal, le signal construit n'est clairement pas une sinusoïde ! Le spectre calculé sera très éloigné du spectre attendu (une raie à la fréquence de la sinusoïde).

Première solution « automatique » avec Latis Pro

On peut demander à Latis Pro de calculer le spectre du signal en ne sélectionnant qu'un nombre entier de périodes, ce que le logiciel peut déterminer automatique si le signal n'est pas trop complexe. La partie sélectionnée est représentée en gras sur la courbe, ce qui permet de vérifier visuellement que c'est bien un nombre entier de périodes qui a été sélectionné.



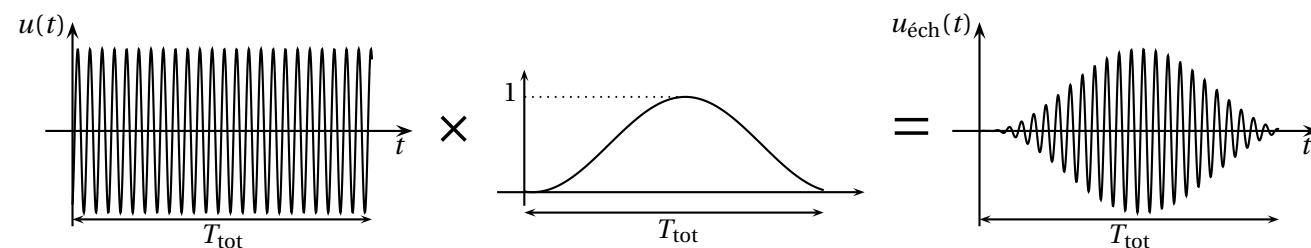
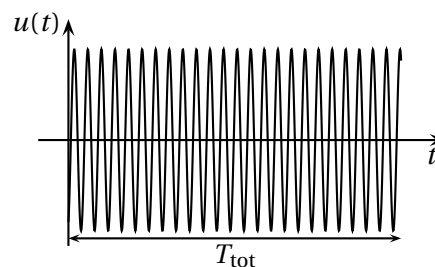
C-contre, deux périodes ont été sélectionnées. La juxtaposition de cet échantillon construit une sinusoïde : on obtient bien le spectre attendu.

➤ Avec Latis Pro, on peut aussi sélectionner manuellement l'extrait du signal à prendre en compte à l'aide de curseurs.

La méthode du fenêtrage

Lors de la construction de $u_{\text{éch}}(t)$ par juxtaposition de la totalité de l'échantillon, nous avons obtenu une fonction non sinusoïdale. En plus de ne pas s'identifier au « vrai » signal sinusoïdal, elle présente un défaut important : elle est discontinue aux points de raccordement. On montre que cette discontinuité « aggrave les choses » lors du calcul du spectre. La méthode du fenêtrage consiste à multiplier l'échantillon par une « fenêtre » : c'est une fonction de largeur T_{tot} , continue, qui vaut 0 aux extrémités ; on est ainsi sûr que le signal est nul au point de raccordement, ce qui assure la continuité de la fonction construite par juxtaposition des échantillons.

Par exemple, avec la fenêtre de Hanning³ :



La duplication du signal ainsi calculé conduit à un signal continu, dont le spectre est plus proche de celui, attendu, de la sinusoïde.

2. Le calcul des coefficients a_n et b_n se fait à partir d'intégrales définies pour un signal de période T connue.

3. Il existe plusieurs types de fenêtres, dont le choix dépasse largement le cadre de notre programme. Latis Pro propose un choix de quelques fenêtres usuelles.

3.4 Annexe (hors programme)

Le signal échantillonné sur une durée T_{tot} est représentée par l'ensemble des N points $\{t_k, s_k\}$:

$$\begin{cases} t_k = kT_e = k \frac{T_{\text{tot}}}{N} \\ u_k = u(t_k) \end{cases} \quad 0 \leq k \leq N-1.$$

On peut associer une décomposition en série de Fourier construite à partir de cet ensemble de points, appelée **transformée de Fourier discrète** (TFD) : on approxime l'intégrale (1) donnant les coefficients $\underline{c}_n$ par la méthode des rectangles utilisant les N points.

- Attention : la décomposition en série de Fourier n'est définie que pour un signal périodique. Or nous ne disposons que d'un échantillon de durée $T_{\text{tot}} = NT_e$. La construction de la transformée de Fourier discrète considère que le signal est périodique... de période T_{tot} ! Cela revient à construire un signal « artificiellement périodique » en mettant bout à bout l'échantillon disponible, dupliqué ainsi à l'infini. La fréquence du signal ainsi construit est donc $f = \frac{1}{T_{\text{tot}}} = \frac{1}{NT_e}$.

$$\int_0^T u(t) e^{-i2\pi n f t} dt \longleftrightarrow \sum_{k=0}^{N-1} T_e u(t_k) \exp\left(-i2\pi n \frac{1}{NT_e} t_k\right).$$

Comme $\frac{1}{NT_e} t_k = \frac{kT_e}{NT_e} = \frac{k}{N}$, l'intégrale (1) définissant $\underline{c}_n$ permet d'écrire

$$\underline{c}_n = \frac{1}{T_{\text{tot}}} \sum_{k=0}^{N-1} T_e u(t_k) \exp\left(-i2\pi \frac{nk}{N}\right) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u(t_k) \exp\left(-i2\pi \frac{nk}{N}\right)$$

car $T_{\text{tot}} = NT_e$.

La transformée de Fourier discrète, qui représente le spectre discret du signal échantillonné, est définie par l'ensemble des N nombres complexes :

$$\underline{c}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u_k \exp\left(-i \frac{2\pi nk}{N}\right), \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

En représentation fréquentielle, la fréquence F_e est représentée par un ensemble de N points, avec la résolution fréquentielle $\Delta f = \frac{F_e}{N} = \frac{1}{T_{\text{tot}}}$.