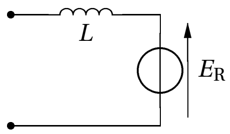
Conversion de puissance

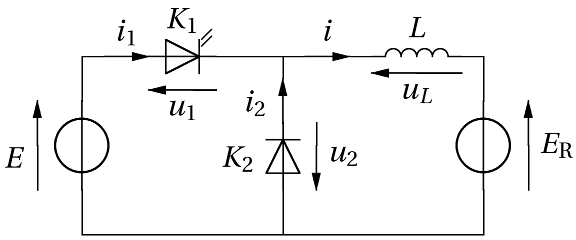
Commande d'un moteur par un hacheur

Un moteur à courant continu est caractérisé par sa résistance interne R, et la tension à ses bornes, donnée par $E_R = \Phi_0\Omega$, où Ω est la vitesse de rotation du rotor et Φ_0 est une constante caractéristique du moteur.
On considère $E_R > 0$. Pour renforcer l'inductance du circuit, on ajoute une bobine d'inductance L.
En négligeant la résistance R de l'enroulement, le schéma électrique de la spire rotorique en série avec la bobine de lissage est donc



1. Cet élément se comporte-t-il comme une source de tension ou une source de courant ? Peut-on alors le connecter directement à une source de tension ?
La bobine impose la continuité du courant ; cet élément se comporte comme une ***source de courant****. On peut donc le connecter directement à une source de tension.*

On considère le montage du hacheur série suivant :



L'interrupteur K_1 est un transistor commandé avec un rapport cyclique α : il est fermé pour $0 \leqslant t < \alpha T$ et ouverte pour $t \leqslant \alpha T < T$.

2. Établir l'expression de $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ pour les deux périodes.
1re phase *$0 \leqslant t < \alpha T$. L'interrupteur K_1 est fermé, donc $u_1 = 0$ et $u_2 = -E$. La loi des mailles s'écrit $E_R + u_L - E = 0$, soit*

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = E - E_R\,.$$

2e phase *$\alpha T < t \leqslant T$. L'interrupteur K_1 est ouvert et K_2 est fermé, donc $u_1 = E$ et $u_2 = 0$. La loi des mailles s'écrit $E_R + u_L - 0 = 0$, soit*

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -E_R\,.$$

3. *En régime établi, les grandeurs électriques sont périodiques.*
Lors de la deuxièle phase, on a $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{E_R}{L} < 0$: l'intensité décroît au cours du temps.
Il faut donc que l'intensité soit croissante lors de la 1re phase pour qu'elle soit périodique, soit

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{E - E_R}{L} > 0\,.$$

Il faut donc $E > E_R$.

4. En notant I_m la valeur minimale de l'intensité et I_M sa valeur maximale, déterminer l'expression de $i(t)$ pour $0 \leqslant t \leqslant T$ en fonction entre autres de I_m, I_M E, E_R et L.

On note I_m l'intensité minimale et I_M l'intensité maximale. L'intensité étant croissante sur $[0, \alpha T[$, elle est donc minimale en $t = 0$ et $t = T$, et maximale en $t = \alpha T$.

Pour $0 \leqslant t < \alpha T$, on a $\dfrac{di}{dt} = \dfrac{E - E_R}{L}$; comme $i(0) = I_m$, on en déduit $i(t) = \dfrac{E - E_R}{L} t + I_m$.

Pour $\alpha T \leqslant t < T$, on a $\dfrac{di}{dt} = -\dfrac{E_R}{L}$; comme $i(\alpha T) = I_M$, on en déduit $i(t) = -\dfrac{E_R}{L}(t - \alpha T) + I_M$.

On a donc

$$i(t) = \begin{cases} I_m + \dfrac{E - E_R}{L} t & \textit{pour } t \in [0, \alpha T[\\ I_M - \dfrac{E_R}{L}(t - \alpha T) & \textit{pour } t \in]\alpha T, T[\end{cases}$$

5. Représenter les chronogrammes de $i(t)$, $i_1(t)$, $i_2(t)$, $u_1(t)$, $u_2(t)$ et $u_L(t)$.

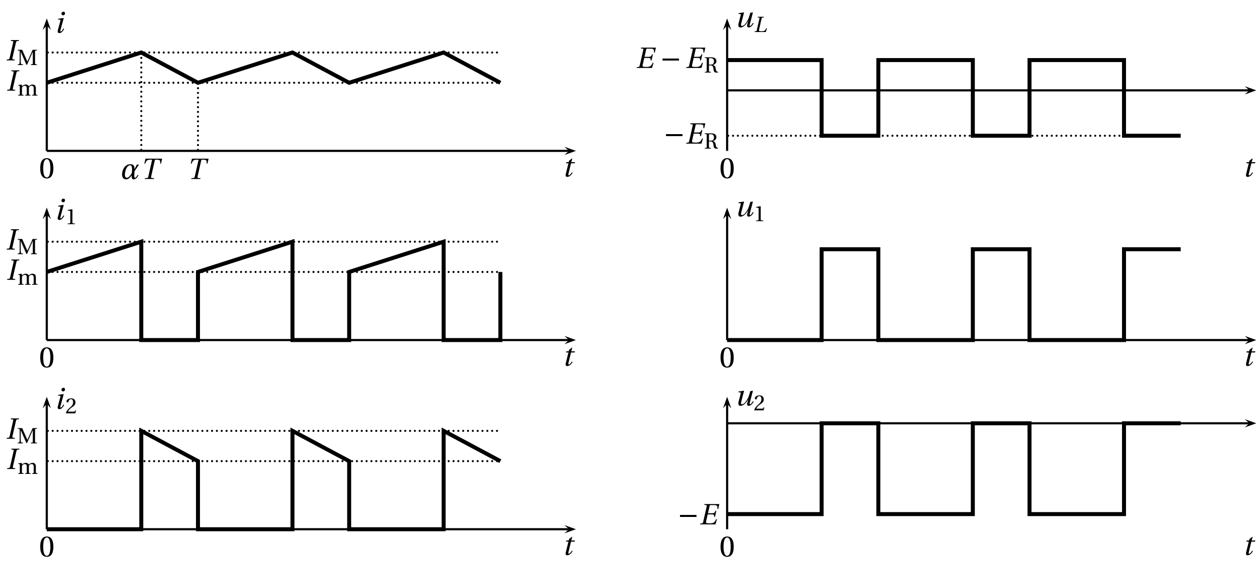
1re phase

On a vu que $u_1(t) = 0$ et $u_2(t) = -E$. On a de plus $i_1(t) = i(t)$ et $i_2(t) = 0$.

2e phase

On a vu que $u_1(t) = E$ et $u_2(t) = 0$. On a de plus $i_1(t) = 0$ et $i_2(t) = i(t)$.

On en déduit les chronogrammes :



6. Déterminer la valeur de E_R en fonction de E et α. Comment peut-on commander la vitesse de rotation du moteur ?

La loi des mailles s'écrit

$$u_2 + L\frac{di}{dt} + E_R = 0\,.$$

En régime continu, on a $\langle L\dfrac{di}{dt}\rangle = 0$, d'où en prenant la valeur moyenne de l'expression précédente

$$\langle u_2 \rangle + E_R = 0\,.$$

D'après l'évolution $u_2(t)$ déterminée précédemment, on calcule

$$\langle u_2 \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T u_2(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^{\alpha T} (-E)\,dt = -\alpha E\,.$$

On a donc $\boxed{E_R = \alpha E}$.

La tension moyenne aux bornes du moteur est donc αE. La vitesse du moteur étant proportionnelle à $\langle u_2 \rangle$, on en déduit que ***la vitesse de rotation du moteur est donc commandée par le rapport cyclique du signal de commande du hacheur.***

7. Exprimer l'ondulation en intensité $\Delta I = I_{\max} - I_{\min}$ en fonction de E, L, T et α.
Comment la rendre la plus faible possible ?

Pendant la 1re phase, l'intensité est donnée par

$$i(t) = I_m + \frac{E - E_R}{L} t = I_m + (1-\alpha)\frac{E}{L} t .$$

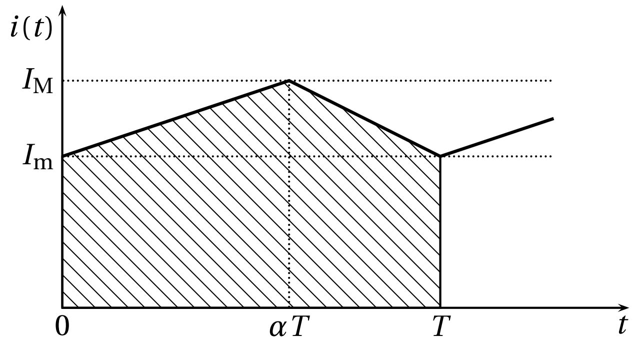
L'intensité est maximale à la fin de cette phase, soit $I_{\max} = I(\alpha T) = I_m + (1-\alpha)\frac{E}{L}\alpha T$.
L'ondulation du courant, définie par $\Delta I = I_M - I_m$, *est donc donnée par*

$$\boxed{\Delta I = \alpha(1-\alpha)\frac{ET}{L}} .$$

➤ *L'ondulation en courant est d'autant plus faible que l'inductance L de la bobine de lissage est élevée, et que la fréquence* $f = 1/T$ *du signal de commande du hacheur est élevée.*

8. Exprimer la valeur moyenne $\langle I \rangle$ du courant traversant le moteur.

Le courant traversant le moteur est $i(t)$ *:*



➤ *On serait tenté de calculer directement la valeur moyenne selon* $\langle I \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)\,\mathrm{d}t$, *mais les calculs sont lourds avec* $i(t)$ *affine par morceaux…*

L'intégrale $\int_0^T i(t)\,\mathrm{d}t$ *représente l'aire hachurée sous la courbe.*

Pour la partie entre 0 *et* αT, *l'aire est*[1] $\frac{I_m + I_M}{2}\alpha T$ *; pour la partie entre* αT *et* T, *l'aire est* $\frac{I_m + I_M}{2}(T - \alpha T)$.
L'aire totale, que l'on aurait pu écrire directement, est donc

$$\int_0^T i(t)\,\mathrm{d}t = \frac{I_m + I_M}{2} T .$$

On a donc

$$\boxed{\langle I \rangle = \frac{I_m + I_M}{2}} .$$

9. Exprimer la puissance moyenne P_m reçue par le moteur, et la puissance moyenne P_g fournie par le générateur.

La puissance moyenne reçue par le moteur est $P_m = \langle E_R\, i(t) \rangle = E_R \langle I \rangle$, *soit*

$$\boxed{P_m = \alpha E \frac{I_m + I_M}{2}} .$$

1. Si vous avez du mal, on a un rectangle $I_m \times \alpha T$ surmonté d'un triangle rectangle de côté αT et $I_M - I_m$. L'aire est donc $I_m \alpha T + \frac{(I_M - I_m)\alpha T}{2} = \frac{I_m + I_M}{2}\alpha T$.

Le générateur fournit la puissance $P_\mathrm{g} = \langle E i_1(t)\rangle = E\langle i_1(t)\rangle$ *avec* $\langle i_1(t)\rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T i_1(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^{\alpha T} i(t)\,\mathrm{d}t$.
L'intégrale est l'aire calculée précédemment, soit $\dfrac{I_\mathrm{m}+I_\mathrm{M}}{2}\alpha T$.
On a donc

$$\langle i_1(t)\rangle = \frac{1}{T}\frac{I_\mathrm{m}+I_\mathrm{M}}{2}\alpha T = \alpha\frac{I_\mathrm{m}+I_\mathrm{M}}{2},$$

d'où

$$\boxed{P_\mathrm{g} = \alpha E\frac{I_\mathrm{m}+I_\mathrm{M}}{2}}\,.$$

➤ *On a* $P_\mathrm{g} = P_\mathrm{m}$ *; la conversion se fait bien avec un rendement de 100 %.*

10. La diode étant un dipôle unidirectionnel, il faut $I_\mathrm{m} > 0$. En déduire la valeur minimale de la puissance échangée possible par ce dispositif.

En écrivant l'ondulation du courant exprimée à la question 7 et la puissance échangée établie à la question précédente, on a

$$I_\mathrm{M} - I_\mathrm{m} = \alpha(1-\alpha)\frac{ET}{L} \quad \text{et} \quad I_\mathrm{M}+I_\mathrm{m} = \frac{2P}{\alpha E}.$$

On en déduit $2I_\mathrm{m} = \dfrac{2P}{\alpha E} - \dfrac{\alpha(1-\alpha)}{L}ET$. La condition $I_\mathrm{m} > 0$ donne $\dfrac{P}{\alpha E} - \dfrac{\alpha(1-\alpha)ET}{2L} > 0$, d'où la puissance minimale échangée

$$\boxed{P > P_\mathrm{min} = \frac{\alpha^2(1-\alpha)E^2 T}{2L}}\,.$$