Phénomènes de transport — II — Diffusion thermique

Les différents modes de transfert thermique

Convection La convection thermique est un transfert d'énergie thermique, par rapport à un référentiel donné, dû à un transport macroscopique de matière dans ce référentiel. Elle peut être libre, ou forcée quand le mouvement du fluide est imposé par une machine extérieure au système (pompe, ventilateur...).

Rayonnement Le rayonnement thermique est un transfert d'énergie par une onde électromagnétique située principalement dans l'infrarouge. Tout corps émet un rayonnement de spectre continu, la longueur d'onde pour laquelle un maximum de puissance est rayonnée dépendant de la température du corps.

Diffusion La diffusion thermique est un transfert thermique d'origine microscopique (transmission de proche en proche du mouvement d'agitation thermique) au sein d'un milieu matériel dans lequel la température n'est pas uniforme. Ce transfert se fait, de façon irréversible, des zones de températures élevées aux zones de basses températures et tend à rendre uniforme la distribution de température.

➤ Le transfert par rayonnement thermique, qui se produit dans les milieux transparents au rayonnement, est le seul pouvant avoir lieu dans le vide.

➤ La convection est le mode de transfert thermique principal dans les fluides.

➤ La conduction existe dans tous les corps matériels mais est souvent masquée par la convection dans les fluides. C'est le mode de transfert principal dans les solides.

Vecteur densité de courant thermique

Flux thermique

L'énergie transférée à travers une surface Σ orientée, pendant une durée $\mathrm{d}t$, par transfert thermique s'écrit

$$\delta Q(t) = \Phi_\Sigma(t)\,\mathrm{d}t$$

où $\Phi_\Sigma(t)$ est le flux thermique à travers Σ.

➤ Le flux thermique s'exprime en W : il représente la **puissance thermique** traversant Σ.

➤ Le flux thermique est une grandeur scalaire algébrique; son signe dépend du choix d'orientation de Σ et du sens réel du transfert d'énergie thermique à travers Σ.

Vecteur densité de courant thermique

Par définition du vecteur densité de courant thermique :

$$\Phi_\Sigma(t) = \iint_{M\in\Sigma} \vec{j}_Q(M,t)\,\mathrm{d}\vec{S}_M\,.$$

➤ La norme $\|\vec{j}_Q(M,t)\|$ s'exprime en $\mathrm{W\cdot m^{-2}}$. Elle représente une **puissance surfacique**.

➤ En coordonnées cartésiennes, pour un phénomène unidimensionnel décrit par $\vec{j}_Q = j_Q(x,t)\vec{e}_x$, le flux thermique à travers une surface S normale à Ox, à l'abscisse x, orientée selon $\vec{e}_x$ est $\boxed{\Phi(x,t) = j_Q(x,t)S}$.

➤ En coordonnées sphériques, pour un phénomène unidimensionnel décrit par $\vec{j}_Q = j_Q(r,t)\vec{e}_r$, le flux thermique sortant à travers une sphère de rayon r est $\boxed{\Phi(r,t) = 4\pi r^2 j_Q(r,t)}$.

➤ En coordonnées cylindriques, pour un phénomène unidimensionnel décrit par $\vec{j}_Q = j_Q(r,t)\vec{e}_r$, le flux thermique sortant à travers un cylindre de rayon r et de hauteur H est $\boxed{\Phi(r,t) = 2\pi r H j_Q(r,t)}$.

Bilan d'énergie : premier principe

Écriture générale

On considère un système de volume $\mathcal{V}$ délimité par une frontière Σ fixe (donc $W_{\text{pression}} = 0$ pour ce système indéformable).
Le bilan d'énergie pendant une durée $\mathrm{d}t$ s'écrit sous la forme générale

$$\underbrace{\mathrm{d}U}_{\text{variation d'énergie stockée}} = \underbrace{\delta Q_{\text{reçu}}}_{\text{énergie reçue}} + \underbrace{\mathcal{P}_{\text{prod}}\,\mathrm{d}t}_{\text{énergie produite}}$$

— $\mathrm{d}U = U(t+\mathrm{d}t) - U(t)$ est la variation de l'énergie interne du système pendant $\mathrm{d}t$;

— $\delta Q_{\text{reçu}}$ est le transfert thermique *reçu* par le système pendant $\mathrm{d}t$ à travers sa frontière Σ;

— $\mathcal{P}_{\text{prod}}$ est la puissance produite par des sources internes au système (effet Joule, réaction chimique exothermique ou endothermique, réaction nucléaire, changement de phase).

Hypothèse de l'équilibre thermodynamique local

Un système est à l'équilibre thermodynamique si les grandeurs intensives y sont uniformes (température, pression, potentiel chimique de chaque espèce), et s'il n'y a pas de mouvement convectif (mouvement macroscopique de matière) en son sein.

➤ Lorsqu'un système est dans un état hors d'équilibre, les champs intensifs sont non uniformes, ce qui donne naissance à des flux : transfert thermique si T n'est pas uniforme par exemple.

Dans l'hypothèse de l'équilibre thermodynamique local, chaque volume mésoscopique $\mathrm{d}\tau_M$ du système est à l'équilibre thermodynamique.

➤ On peut alors définir localement, en tout point du système, la température $T(M,t)$, et la pression $P(M,t)$.

Équation locale du bilan thermique en l'absence de sources internes

On considère un milieu de masse volumique ρ, de capacité thermique massique à volume constant [1] c_v.
On se place dans le cadre de l'hypothèse de l'équilibre thermodynamique local : l'équilibre thermodynamique est réalisé sur un volume mésoscopique $\mathrm{d}\tau_M$ de masse $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}\tau$; sa température est donc uniforme [2] $T(M,t)$.
On définit l'énergie interne massique $u(M,t) = \dfrac{\delta U}{\mathrm{d}m}$. La variation de son énergie interne entre t et $t+\mathrm{d}t$ est donc relié à la variation de température : $\mathrm{d}(\delta U) = C_\mathrm{c}\,\mathrm{d}t$, avec $C_\mathrm{v} = c_\mathrm{v}\mathrm{d}m$ et $\mathrm{d}T = T(M,t+\mathrm{d}t) - T(M,t) = \dfrac{\partial T}{\partial t}\mathrm{d}t$, d'où $\mathrm{d}(\delta U) = \rho c_\mathrm{v}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}T$.

Cas unidimensionnel en coordonnées cartésiennes

Avec $T(M,t) = T(x,t)$ et $\vec{j}_Q(x,t) = j_Q(x,t)\vec{e}_x$, on a $\rho c_\mathrm{v}\dfrac{\partial T}{\partial t}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = -\dfrac{\partial j_Q}{\partial x}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$.

En l'absence de sources internes, l'équation locale de bilan d'énergie s'écrit

$$\rho c_\mathrm{v}\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial j_Q(x,t)}{\partial x}\,.$$

➤ On obtient cette équation en faisant un bilan d'énergie à la tranche comprise entre x et $x+\mathrm{d}x$.

1. Dans le cas d'une phase condensée — liquide ou solide — on considère $c_\mathrm{v} \approx c_\mathrm{p} \approx c$, capacité thermique.
2. En raison de l'hypothèse de l'équilibre thermodynamique local.

Cas unidimensionnel en coordonnées cylindriques

Avec $T(M,t)=T(r,t)$ et $\vec{j}_Q(r,t)=j_Q(r,t)\vec{e}_r$, on a $\rho c_v\dfrac{\partial T}{\partial t}2\pi r H\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t=-\dfrac{\partial 2\pi r H j_Q}{\partial r}\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t$.

> En l'absence de sources internes, l'équation locale de bilan d'énergie s'écrit
> $$\rho c_v\frac{\partial T(r,t)}{\partial t}=-\frac{1}{r}\frac{\partial r j_Q(r,t)}{\partial r}.$$

- On obtient cette équation en faisant un bilan d'énergie au tube de rayon r d'épaisseur $\mathrm{d}r$.

Cas unidimensionnel en coordonnées sphériques

Avec $T(M,t)=T(r,t)$ et $\vec{j}_Q(r,t)=j_Q(r,t)\vec{e}_r$, on a $\rho c_v\dfrac{\partial T}{\partial t}4\pi r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t=-\dfrac{\partial 4\pi r^2 H j_Q}{\partial r}\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t$.

> En l'absence de sources internes, l'équation locale de bilan d'énergie s'écrit
> $$\rho c_v\frac{\partial T(r,t)}{\partial t}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 j_Q(r,t)}{\partial r}.$$

- On obtient cette équation en faisant un bilan d'énergie à la coquille de rayon r d'épaisseur $\mathrm{d}r$.

Généralisation en géométrique quelconque

> En l'absence de sources internes, l'équation locale de bilan d'énergie s'écrit
> $$\rho c_v\frac{\partial T(M,t)}{\partial t}=-\operatorname{div}\vec{j}_Q(M,t).$$

Bilan thermique en présence de sources internes

On note $p(M,t)$ la puissance volumique produite au sein du milieu, soit $\mathcal{P}_{\text{prod}}=\iiint_{M\in\mathcal{V}}p(M,t)\,\mathrm{d}\tau_M$.
Pour un phénomène unidimensionnel en coordonnées cartésiennes :

$$\rho c_v\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}=-\frac{\partial j_Q(x,t)}{\partial x}+p(x,t).$$

- Énergie électrique dissipée pendant $\mathrm{d}t$ dans une tranche $\mathrm{d}x$ d'un conducteur ohmique : $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sigma S}I^2\,\mathrm{d}t$.

En géométrique quelconque :

$$\rho c_v\frac{\partial T(M,t)}{\partial t}=-\operatorname{div}\vec{j}_Q(M,t)+p(M,t).$$

Loi de Fourier

Quand la température n'est pas uniforme, il apparaît un courant de diffusion thermique ayant pour effet de la rendre uniforme : le flux thermique est dirigé des régions de température élevée aux régions de température faible. Dans le cas unidimensionnel il est donné par la loi de Fourier :

> $$j_Q(x,t)=-\lambda\frac{\partial T(x,t)}{\partial x},$$
> où $\lambda>0$ est la **conductivité thermique** du milieu (en $\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$).

En géométrie quelconque, la loi de Fourier se généralise :

$$\vec{j}_Q(M,t)=-\lambda\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,T(M,t).$$

- La loi de Fourier (1815) est *phénoménologique.* Elle est valable si les variations températures ne sont si trop fortes, ni trop faibles, ni trop rapides.
- La loi de Fourier décrit une réponse du milieu linéaire et instantanée : la cause est le gradient de température $\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,T$ traduisant la non uniformité de la température, la réponse le courant $\vec{j}_Q$.
- Le signe $-$ rend compte de l'orientation du flux thermique vers les basses températures.
- Une conductivité thermique λ caractérise un bon conducteur thermique ; un milieu est d'autant plus thermiquement isolant que sa conductivité thermique λ est faible.
- Dans les métaux, les électrons de conduction participent au transfert thermique par diffusion : en général, les bons conducteurs électriques sont de bons conducteurs thermiques.
- Pour les non métaux, les matériaux les plus conducteurs sont les plus cristallisés. Le diamant est le meilleur conducteur thermique : $\lambda=2300\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$.
- La conductivité thermique des gaz est très faible : ce sont de très bons isolants thermiques en l'absence de convection.

Ordres de grandeur à connaître

métaux bons conducteurs électriques	$\lambda\approx 10^2\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$
métaux médiocres conducteurs électriques (**acier**)	$\lambda\approx 10\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$
béton, verre, **eau**	$\lambda\approx 1\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$
air, laine de verre	$\lambda\approx 10^{-2}\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$

On a $\lambda\approx 400\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$ pour l'argent et le cuivre.

Équation de la diffusion thermique en l'absence de sources internes

Dans le cas unidimensionnel, en l'absences de sources internes, on déduit de l'équation locale de bilan d'énergie et de la loi de Fourier l'**équation de la diffusion thermique** :

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}=\frac{\lambda}{\rho c_v}\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}.$$

On peut l'écrire

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t}=a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}\quad\text{avec}\quad\boxed{a=\frac{\lambda}{\rho c_v}}$$

où a (en $\mathrm{m^2\cdot s^{-1}}$) est la **diffusivité thermique** du milieu.
En géométrie quelconque, l'équation de la diffusion thermique se généralise en

$$\frac{\partial T(M,t)}{\partial t}=a\Delta T(M,t).$$

- L'équation de la diffusion thermique est aussi appelée *équation de la chaleur.*
- L'équation de la diffusion n'est pas invariante par renversement du temps (changement de variable $t'=-t$). Cela traduit le *caractère irréversible* du phénomène de diffusion.
- On a une bonne diffusion thermique dans un milieu de conductivité λ élevée (le flux thermique y est transmis facilement) et de capacité thermique volumique ρc_v faible (le milieu a un faible pouvoir de stockage de l'énergie sous forme thermique) : $a=\dfrac{\text{capacité à conduire la chaleur}}{\text{capacité à accumuler la chaleur}}$.
  C'est la diffusivité thermique qui jour le rôle de coefficient de diffusion.

- Les valeurs de la diffusivité a sont assez proches : 10^{-5} $\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-1}$ pour les gaz et les solides, 10^{-7} $\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-1}$ pour les liquides. En effet, les matériaux de conductivité λ élevée ont une masse volumique ρ élevée.
- La diffusivité a n'intervient qu'en régime variable ; en régime stationnaire, seule la conductivité λ intervient.

Echelles caractéristiques

On note L l'échelle de longueur caractéristique du phénomène et τ sa durée caractéristique. De l'équation de la diffusion on déduit

$$\boxed{L \sim \sqrt{a\tau}}$$

- La diffusion met un temps très long pour se produire sur une grande distance : $\tau \propto (L)^2$.

Cas où il y a de sources internes

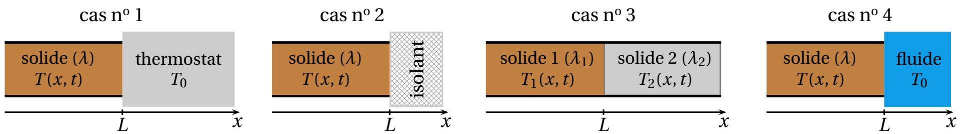
Dans le cas où une puissance volumique $p(M,t)$ est produite au sein du milieu, on en déduit respectivement dans les cas unidimensionnel et en géométrique quelconque :

$$\boxed{\rho c_\mathrm{v}\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \lambda\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + p(x,t)} \quad \text{et} \quad \boxed{\rho c_\mathrm{v}\frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = \lambda\Delta T(M,t) + p(M,t)}\,.$$

Conditions aux limites

L'équation de la diffusion thermique est une équation aux dérivées partielles linéaires. Pour un jeu de conditions initiales et aux limites données, la solution est unique.

Cas nº 1	Frontière Σ en contact avec un thermostat à la température T_0.	La température est continue.	$T(L,t) = T_0\,,\ \forall t$
Cas nº 2	Frontière calorifugée.	Le flux thermique (donc la densité de courant) est nul à travers la frontière.	$j_Q(L,t) = -\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_t(L,t) = 0\,;\forall t$
Cas nº 3	Contact parfait entre deux solides.	Le flux thermique et la température sont continus à la traversée de la jonction.	$T_1(L,t) = T_2(L,t)\,,\ \forall t$ $-\lambda_1 S\left(\frac{\partial T_1}{\partial x}\right)_t(L^-,t) = -\lambda_2 S\left(\frac{\partial T_2}{\partial x}\right)_t(L^+,t)\,,\ \forall t$
Cas nº 4	Frontière solide Σ au contact d'un fluide.	Continuité du flux (donc de la densité de courant) donné par la loi de Newton.	$-\lambda\left(\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right)_t(L,t) = h\,[T(L,t) - T_0]\,,\ \forall t$



Loi de Newton

La température est une grandeur continue, mais elle varie beaucoup sur une très courte distance dans le fluide au voisinage de la paroi ; on modélise cette variation rapide par une discontinuité de température, le transfert thermique étant donné par la loi de Newton : $\boxed{\Phi_{\mathrm{cc}} = hS(T - T_0)}$ pour un corps de température T plongé dans un fluide à la température T_0. Le vecteur densité de courant thermique, orienté du solide vers le fluide, est donc $j_{Q,\mathrm{cc}} = h(T - T_0)$.

- Le coefficient conducto-convectif h est plus élevé pour un liquide que pour un gaz, et est plus important dans le cas de la convection forcée.