Mathématiques et physique — Formulaire d'analyse vectorielle

On donne un champ scalaire $G(M,t)$ et un champ vectoriel $\vec{A}(M,t)$.

Opérateur gradient

Coordonnées cartésiennes : $\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\, G = \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_{y,z}\vec{e}_x + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_{x,z}\vec{e}_y + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)_{x,y}\vec{e}_z}$

Coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{\text{grad}}\, G = \left(\frac{\partial G}{\partial r}\right)_{\theta,z}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial G}{\partial \theta}\right)_{r,z}\vec{e}_\theta + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)_{r,\theta}\vec{e}_z$

Coordonnées sphériques : $\overrightarrow{\text{grad}}\, G = \left(\frac{\partial G}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial G}{\partial \theta}\right)_{r,\varphi}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial G}{\partial \varphi}\right)_{r,\theta}\vec{e}_\varphi$

Opérateur divergence

Coordonnées cartésiennes : $\boxed{\text{div}\,\vec{A} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)_{y,z} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial y}\right)_{x,z} + \left(\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)_{x,y}}$

Coordonnées cylindriques : $\text{div}\,\vec{A} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_r)}{\partial r}\right)_{\theta,z} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}\right)_{r,z} + \left(\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)_{r,\theta}$

Coordonnées sphériques : $\text{div}\,\vec{A} = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial (r^2A_r)}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi} + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial (\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta}\right)_{r,\varphi} + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}\right)_{r,\theta}$

Opérateur rotationnel

Coordonnées cartésiennes : $\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z}$

Coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$

Coordonnées sphériques : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial (\sin\theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (rA_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\varphi$

Laplacien

Coordonnées cartésiennes : $\Delta G = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}$

Coordonnées cylindriques : $\Delta G = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial G}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}$

Coordonnées sphériques :
$$\Delta G = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial G}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial G}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2}$$
$$= \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (rG)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial G}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2}$$

Soient $a = a(M,t)$ et $b = b(M,t)$ deux champs scalaires, et $\vec{A} = \vec{A}(M,t)$ et $\vec{B} = \vec{B}(M,t)$ deux champs vectoriels.
On a les relations :

- $\overrightarrow{\text{grad}}\,(ab) = a\,\overrightarrow{\text{grad}}\,b + b\,\overrightarrow{\text{grad}}\,a$
- $\text{div}(a\vec{A}) = a\,\text{div}\,\vec{A} + (\overrightarrow{\text{grad}}\,a)\cdot\vec{A}$
- $\text{div}(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{B}\cdot\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} - \vec{A}\cdot\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}$
- $\overrightarrow{\text{rot}}\,(a\vec{A}) = a\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} + (\overrightarrow{\text{grad}}\,a)\wedge\vec{A}$
- $\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{grad}}\,a) = \vec{0}$
- $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}) = 0$
- $\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}\,(\text{div}\,\vec{A}) - \Delta\vec{A}$
- $\text{div}\,\vec{B} = 0 \Longleftrightarrow \exists\vec{A},\ \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$
- $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = 0 \Longleftrightarrow \exists a,\ \vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}\,a$

Théorème d'Ostrogradski

Soit un champ vectoriel $\overrightarrow{A}(M,t)$ défini en tout point d'un volume $\mathcal{V}$ délimité par une surface Σ :

$$\oiint_{P\in\Sigma} \overrightarrow{A}(P,t)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_P} = \iiint_{M\in\mathcal{V}} \mathrm{div}\,\overrightarrow{A}(M,t)\,\mathrm{d}\tau_M\,.$$

Conséquence :

Tout champ à divergence identiquement nulle est à flux conservatif, et réciproquement :

$$\oiint_{P\in\Sigma} \overrightarrow{A}(P,t)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_P} = 0\,,\ \forall\Sigma \quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{div}\,\overrightarrow{A}(M,t) = 0\ \ \forall M\,.$$

Théorème de Stokes

Soit un champ vectoriel $\overrightarrow{A}(M,t)$ défini en tout point d'une surface Σ s'appuyant sur un contour orienté Γ :

$$\oint_{P\in\Gamma} \overrightarrow{A}(P,t)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell_P} = \iint_{M\in\Sigma} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}(M,t)\,\mathrm{d}\overrightarrow{S_M}\,.$$

Conséquence :

Tout champ à rotationnel identiquement nul est à circulation conservative, et réciproquement :

$$\oint_{P\in\Gamma} \overrightarrow{A}(P,t)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell_P} = 0\,,\ \forall\Gamma \quad\Longleftrightarrow\quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}(M,t) = \overrightarrow{0}\ \ \forall M\,.$$

Champ vectoriel à flux conservatif

La divergence d'un rotationnel est identiquement nulle : $\boxed{\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}(M,t)\right) = 0}$.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un champ soit à flux conservatif est qu'il soit un champ de rotationnel :

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{A}(M,t) = 0\,;\forall\, M \quad\Longleftrightarrow\quad \exists\overrightarrow{R}(M,t)\,,\ \ \overrightarrow{A}(M,t) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{R}(M,t)$$

Champ vectoriel à circulation conservative

Le rotationnel d'un gradient est identiquement nul : $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,G(M,t)\right) = \overrightarrow{0}}$.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un champ soit à circulation conservatif est qu'il soit un champ de gradient :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}(M,t) = \overrightarrow{0}\,;\forall\, M \quad\Longleftrightarrow\quad \exists G(M,t)\,,\ \ \overrightarrow{A}(M,t) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,G(M,t)$$