TD phénomènes de transport — Diffusion thermique

Conduction thermique

1 — Métabolisme d'un mammifère

Les mammifères sont des êtres thermorégulés, dits homéothermes (improprement « à sang chaud »), contrairement aux reptiles ou aux poissons, dit poïkilothermes (improprement « à sang froid »). On modélise un mammifère par une sphère de rayon R dont le métabolisme dégage la puissance thermique volumique p_v, uniformément dans tout son volume. L'air extérieur a une conductivité thermique λ, et sa température loin de l'animal est $T_0 = 20$ °C. On s'intéresse à la température de l'air (donc pour $r \geqslant R$) en régime stationnaire. On considère le contact parfait entre l'animal et le milieu extérieur (continuité de la température).

1. Que peut-on dire du flux thermique $\Phi(r)$ pour $r > R$? En déduire l'expression de $j_Q(r)$ en fonction de p_v, R et r.

2. En déduire l'expression de la température $T(r)$ pour $r \geqslant R$.

3. Quelle est la température cutanée T_c de l'animal ? Commenter la variation de T_c d'une part quand λ varie à R fixé, d'autre part quand R varie à λ fixée.

4. Quelle doit être la valeur du métabolisme volumique p_v pour avoir $T_c = 30$ °C dans l'air puis dans l'eau ?
Pourquoi n'existe-t-il pas de petits mammifères marins ?

Données :
$\lambda_{air} = 5\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$ et $\lambda_{eau} = 500\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$.
On prendra $R = 25$ cm.

2 — Modèle d'un fusible

Un fusible est constitué d'un fil conducteur cylindrique de section droite d'aire S, de longueur L, de masse volumique μ et de capacité thermique massique c. Il possède une conductivité thermique λ et une conductivité électrique γ.
Il est traversé par un courant électrique d'intensité I. Ce fil est enfermé dans une capsule remplie d'une substance assurant une isolation thermique et électrique parfaite.
Les températures en $x = 0$ et $x = L$ sont imposées et égales à la température T_0 du milieu ambiant.
Données :
$\lambda = 65\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$,
$\gamma = 1{,}2 \times 10^6\ \mathrm{S \cdot m^{-1}}$,
$c = 460\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$,
$\mu = 2{,}7 \times 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.
On prend $T_0 = 290$ K et $L = 2{,}5$ cm
On rappelle que la résistance électrique d'un conducteur cylindrique de conductivité électrique γ, de longueur ℓ et de section S, parcouru par un courant I est

$$R = \frac{\ell}{\gamma S}.$$

On se place en régime stationnaire.

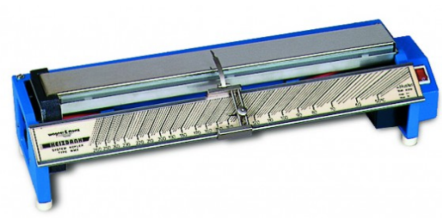
1. Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par la température $T(x)$ le long du fusible. Représenter graphiquement $T(x)$.

2. Le matériau constituant le fil fond à $T_F = 390$ K. On veut fabriquer un fusible qui admet une intensité maximale $I_{max} = 16$ A. Préciser l'endroit de la rupture en cas de dépassement de I_{max}. Déterminer littéralement puis numériquement l'aire S_{16} à prévoir.

3. On fixe $I = 10$ A. Le fil a la section S_{16}. Évaluer littéralement puis numériquement la puissance thermique $P_{th}(0)$ transférée par conduction en $x = 0$. Préciser si elle est reçue ou fournie par le fil. Même question pour la puissance thermique $P_{th}(L)$ en $x = L$. Quelle relation a-t-on entre $P_{th}(0)$, $P_{th}(L)$ et la puissance électrique P_e fournie à l'ensemble du fil ? Commenter.

3 — Banc de Kofler

Un banc de Kofler permet de mesurer avec précision la température de fusion de cristaux solides en poudre. C'est une barre parallélépipédique horizontale de longueur L et de section $a \times b$ (avec $b \ll a$), constituée d'un matériau de conductivité thermique λ et de chaleur massique à pression constante c. À l'une des extrémités du banc est insérée une résistance électrique R. Quand on branche le banc de Kofler, la résistance R est soumise à une tension U. On admet que la totalité de la puissance dégagée par effet Joule est transmise au banc. Les échanges thermiques entre l'air et le banc sont modélisés par une puissance $P = h(T - T_a)S$, où T est la température du banc, T_a la température de l'air et S la surface d'échange. On considère la face inférieure isolée : le transfert thermique avec l'extérieur s'effectue à travers la face supérieure du banc. On applique une tension de valeur efficace U aux bornes de la résistance R.



1. Trouver l'équation différentielle vérifiée par la température du banc en régime stationnaire, en supposant le problème unidimensionnel. Donner la forme du profil de température.

2. À quelle condition sur L peut-on supposer le banc comme semi-infini. Montrer que dans le cadre de cette approximation le profil de température dans le banc est de la forme

$$T(x) = A + B\,\mathrm{e}^{-x/\delta}\,.$$

Exprimer A, B et δ en fonction des données du texte.

3. Si la tension U est la tension électrique délivrée par le réseau domestique, à quelle condition la température du banc peut-elle être considérée comme stationnaire ?

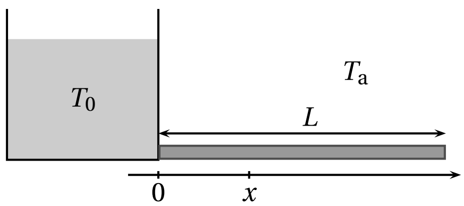
4. On saupoudre les cristaux à étudier dans le sens de la longueur L. Expliquer ce que l'on observe et comment on en déduit la température de fusion.

Justifier la nécessité d'un étalonnage et montrera que le choix de la résistance R caractérise la plage de température de fusion détectable.

5. La précision des mesures de distance le long du banc est de 0,5 mm. Discuter de la précision obtenue sur la mesure d'une température de fusion : dépend-elle de T_{fusion} ? de R ?

4 — Conduction thermique

Une tige cylindrique de longueur L et de rayon R est constituée d'un métal de conductivité thermique λ. Elle est encastrée à une de ses extrémités dans un récipient contenant de l'eau portée à ébullition, imposant en $x = 0$ la température constante $T_0 = 100$ °C.



Le reste de la tige est en contact avec l'atmosphère de température constante $T_a = 20$ °C. On prend en compte les transferts thermiques conducto-convectifs entre la tige et l'air ambiant par la loi de Newton : un élément de surface latérale dS à la température T fournit à l'extérieur une puissance thermique

$$\mathrm{d}P = h(T - T_a)\,\mathrm{d}S\,.$$

On se place en régime stationnaire.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par $T(x)$. On introduira une longueur caractéristique δ dont on donnera l'expression. Donner la forme générale de la solution $T(x)$.

2. Écrire les conditions aux limites qui permettent de déterminer les constantes d'intégration (le calcul n'est pas demandé).

3. Déterminer complètement l'expression de $T(x)$ dans le cas où la tige est infiniment longue (préciser cette hypothèse).

4. On dispose de deux barres (1) et (2) de dimensions identiques, constituées respectivement de cuivre et d'étain, recouvertes d'une fine couche de paraffine dont la température de fusion est $T_f = 60$ °C. Sur chacune des barres, on observe la fusion de la paraffine aux abscisses $x_1 = 15{,}6$ cm et $x_2 = 6{,}4$ cm. On admet que le coefficient h est inchangé.

Sur quelle partie de la tige la paraffine est-elle fondue ?

La conductivité thermique du cuivre étant $\lambda_1 = 390\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$, déterminer la valeur λ_2 de celle de l'étain.

5. Comment sont modifiés les résultats précédents si l'on place un ventilateur dirigé vers la tige ?

5 — Barre parcourue par un courant

Soit une barre de conductivité thermique λ, de longueur L et section S. Sa surface latérale est calorifugée. Ses extrémités sont en contact avec deux sources à des températures T_1 en $x = 0$ et T_2 en $x = L$.

1. Déterminer $T(x)$ et la puissance P_2 fournie à la source de température T_2 en régime permanent.

2. La barre est de plus parcourue par un courant d'intensité I. On note ρ la résistivité électrique de la barre.

On rappelle l'expression de la résistance électrique d'un cylindre de résistivité électrique ρ, de longueur ℓ et de section S :

$$R = \frac{\rho\ell}{S}\,.$$

Déterminer $T(x)$ et $P(x)$, puissance traversant la section de la barre

3. Déterminer P_2. La mettre sous forme de deux termes. Commenter.

4. Quelle est la puissance P_1 sortant en $x = 0$?

5. Que se passe-t-il si on interrompe le courant d'intensité I et que l'on calorifuge les extrémités ? Déterminer la température finale.

6 — Barreau non isolé

On considère un cylindre d'axe Ox, de rayon R et de longueur $L \gg R$. Il existe une perte d'énergie interne par unité de temps et de volume uniforme et constante notée β.
Calculer la température $T(x)$ en régime permanent lorsque seules les extrémités du barreau sont plongées dans un bain de température T_0 et qu'il y a un phénomène de conducto-convection avec l'air sur la paroi latérale.

7 — Conduction thermique dans une dalle

On considère une dalle de surface S et d'épaisseur e (petite par rapport aux autres dimensions du problème), de conductivité thermique λ.
Elle reçoit en $x = 0$ un flux thermique Φ_0 constant dans un premier temps.

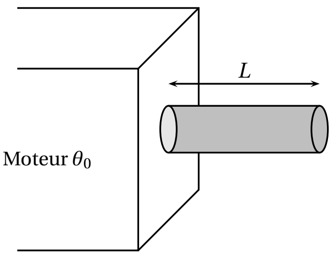
1. Déterminer le profil de température dans la dalle.

2. Comment prendre en compte le fait que $T_{\text{dalle}}(x = e) \neq T_{\text{air}}$? Recalculer alors le profil de température.

3. On considère désormais un flux variable dans le temps : $\Phi(t) = \phi_0 \sin(\omega t)$. Déterminer le nouveau profil de température dans la dalle.

8 — Ailette de refroidissement

On souhaite refroidir un moteur en fixant sur lui un certain nombre d'ailettes de forme cylindrique (rayon R, longueur L), de conductivité thermique λ. Chaque ailette est au contact d'un fluide à la température $\theta_e < \theta_0$, où θ_0 est la température du moteur.



1. Combien doit-on placer d'ailettes sur le moteur sachant que le flux thermique à évacuer vaut $\Phi_T = 40$ W ?

2. Comment améliorer le système ?

Données numériques
$\lambda = 400\ \text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
$h = 100\ \text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ (coefficient de transfert conducto-convectif de Newton)
$R = 2$ mm
$L = 15$ cm
$\theta_0 = 82$ °C
$\theta_e = 22$ °C

9 — Compost

Du fait de la décomposition, un bloc de compost de grande surface S et de hauteur H produit une puissance volumique

$$p_v = Q \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right),$$

l'axe des z étant choisi ascendant.
La surface en $z = 0$ est parfaitement isolée, celle en $z = H$ subit un échange conducto-convectif avec l'extérieur. On rappelle la loi de Newton : $j_{\text{th}} = h(T - T_0)$, où h désigne le coefficient de transfert thermique de surface.

1. Déterminer le profil de température $T(z)$ en régime stationnaire et le tracer.

2. Calculer la puissance dégagée par le compost.

10 — Production d'entropie

Les extrémités d'une barre calorifugée en acier inox, de conductivité thermique λ, de longueur $L = 1$ m, sont maintenues aux températures $T_1 = 300$ K et $T_2 = 400$ K. On se place en régime stationnaire.
On donne $\lambda = 16\ \text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

1. Quelle est la variation d'entropie d'un élément de volume de section A et de longueur dx ?
Établir l'expression de l'entropie reçue par cet élément.

2. Calculer l'entropie σ_s produite dans la barre par unité de volume et par unité de temps, au point de la barre où elle est maximale.

11 — Gel d'un lac

Un lac est recouvert d'un épaisseur $z(t)$ de glace, l'axe des z étant orienté vers le bas, son origine étant à la surface de glace en contact avec l'air, cette surface étant à la température $T_s = -30{,}0$ °C.
On donne la température de fusion de l'eau $T_f = 0{,}0$ °C, l'enthalpie massique de fusion de la glace $\Delta_{\text{fus}}h = 335\ \text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$, la masse volumique de la classe $\rho_g = 940\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et le coefficient de transmission thermique de la glace $\lambda_g = 2{,}1\ \text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

1. Donner l'équation différentielle vérifiée par la température $T_g(z,t)$ de la glace et les condition aux limites sur $T_g(z,t)$.

2. À l'aide d'un bilan d'enthalpie, obtenir la relation

$$\lambda \left(\frac{\partial T_g}{\partial z}\right)_{\varepsilon(t)} = \rho_g \Delta_{\text{fus}} h \dot{z}.$$

3. On suppose $\dot{z}$ très faible, donc on considère que z est constant : quel est le nom de cette approximation ?

4. Que devient alors la première équation différentielle ? Donner le gradient de T_g.

5. Donner l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$ et la résoudre. Le résultat obtenu est-il cohérent ? Donner son sens physique.

6. Donner l'épaisseur de la couche de glace au bout d'une minute, d'une journée et d'un mois. Est-ce cohérent ?

12 — Diffusion thermique instationnaire

Deux plaques sont séparées d'une distance L. Il règne à l'extérieur une température T_0 ; on note $T(x,t)$ la température à l'intérieur (pour $0 \leqslant x \leqslant L$).
Le profil initial de température entre les plaques est

$$T(x,0) = T_0 + \theta \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad \text{avec} \quad \theta > 0\,.$$

1. Vérifier que $T(x,0)$ vérifie les conditions aux limites.

2. On cherche des solution sous la forme $T(x,t) = T_0 + f(x)g(t)$. Déterminer $f(x)$ et $g(t)$.

3. Calculer le flux thermique en x à l'instant t.

13 — Température de la planète Mars

La température moyenne sur le sol martien est de -50 °C. Le rayon de la planète est $R_2 = 3400$ km et on suppose pour simplifier qu'elle est formée de deux parties bien distinctes à symétrie sphérique :

— un noyau homogène d'un mélange, entre autres, de fer et de nickel à la température uniforme de 2500 °C, de rayon $R_1 = 1500$ km ;

— un manteau homogène composé essentiellement de silice solide jusqu'à la surface, de conductivité thermique λ.

1. Comment varie la température à l'intérieur de Mars ? Tracer l'allure de $T(r)$ pour $0 \leqslant r \leqslant R_2$.

2. Quelle est la puissance dissipée par le noyau de Mars si $\lambda = 1{,}2\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$? Quelle est l'origine de cette énergie ?

3. Une autre théorie plus fine consiste à dire que Mars a été formée il y a environ 4 milliards d'années par une très grande quantité de grains de poussière identiques qui, en s'agglomérant, ont fini par créer la planète que l'on connaît de nos jours. Pour modéliser $T(r)$, on suppose qu'il se dégage au sein de la planète une puissance volumique P_v constante. On élimine donc la distinction entre le noyau et le manteau.
Justifier pourquoi on peut admettre que $T(r)$ ne dépend pas du temps.
Déterminer la nouvelle expression de $T(r)$.

14 — Solidification d'une goutte

On considère une goutte d'eau à la température $T_\mathrm{e} = 10$ °C que l'on pulvérise dans l'air à $T_\mathrm{a} = -15$ °C. Le rayon de la goutte est $R = 0{,}1$ cm.

À l'interface eau-air, le flux thermique de la goutte de surface S et de température $T(t)$ vers l'extérieur est donné par $\Phi = hS[T(t) - T_\mathrm{a}]$, avec $h = 50\ \mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$.
On note $\rho = 1{,}0 \times 10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ la masse volumique de la goutte, supposée uniforme, $c = 4{,}18 \times 10^3\ \mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$ la capacité calorifique massique de l'eau et $\Delta_\mathrm{fus} h = 335\ \mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$ l'enthalpie massique de fusion de la glace.

1. À l'aide du premier principe de la thermodynamique, montrer que

$$\rho c R \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -3h[T(t) - T_\mathrm{a}]\,.$$

2. Déterminer $T(t)$. On pourra poser $\tau = \dfrac{\rho c R}{3h}$.

3. Déterminer le temps t_1, en fonction de τ, T_e, T_a et T_f au bout duquel $T(t_1) = T_\mathrm{f} = -5$ °C.

4. On considère que la goutte est liquide à T_f et que la température remonte à $T_0 = 0$ °C où elle se solidifie partiellement. On considère la réaction isobare et réversible. Déterminer la proportion x de liquide restant.

5. Déterminer le temps t_2 au bout duquel la goutte est entièrement solide.

15 — Neige artificielle

La neige artificielle est obtenue en pulvérisant de fines gouttes d'eau liquide supposées sphériques de rayon $R = 0{,}2$ mm à $T_\mathrm{i} = 10$ °C dans l'air ambiant à la température $T_\mathrm{e} = -15$ °C.
À l'interface eau-air, le flux thermique $\mathrm{d}\phi$ à travers une surface $\mathrm{d}S$ dans le sens de la normale extérieure $\vec{n}$ est donné par la loi

$$\mathrm{d}\phi = h[T(t) - T_\mathrm{e}]\,\mathrm{d}S\,.$$

1. Établir l'équation différentielle régissant l'évolution temporelle de la température de la goutte $T(t)$.

2. Déterminer le temps t_0 mis par la goutte liquide pour atteindre la température de surfusion $T(t_0) = -5$ °C.

3. Lorsque la goutte a atteint la température de -5 °C, il y a rupture de la surfusion : la température remonte brutalement à 0 °C et la goutte est partiellement solidifiée (phénomène également brutal). Moyennant des hypothèses que vous expliciterez, calculer la fraction x de liquide restant à solidifier après la rupture de la surfusion.

4. Calculer le temps nécessaire à la solidification du reste de l'eau liquide.

Données

Coefficient conducto-convectif : $h = 65\ \mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$

Chaleur latente de changement de phase solide-liquide : $\ell_f = 333\ \mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$
Capacité thermique massique de l'eau liquide :
$c_\ell = 4{,}2\ \mathrm{kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$
Capacité thermique massique de l'eau solide :
$c_s = 2{,}1\ \mathrm{kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$

16 — Transfert thermique dans une poutre

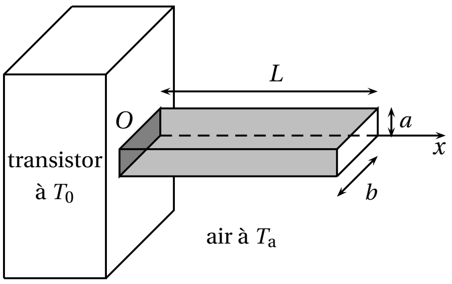
Soit une poutre de longueur L, de section circulaire de rayon a et de conductivité thermique λ, contenue entre deux murs de température T_m. On note T_a la température de l'air entourant la poutre et h le coefficient de transfert convecto-conductif.
On considère le régime permanent atteint. Le point O est placé au milieu de la poutre et on définit un axe (Oz) dans le sens de la poutre.

1. Déterminer le profil de température $T(z)$.

2. Quel est le transfert thermique entre la poutre et l'air

17 — La fine ou l'épaisse ?

On considère un transistor de puissance qui dissipe de l'énergie lors de son fonctionnement, et se comporte alors comme une source de chaleur. Afin d'éviter une montée en température trop importante, on utilise une ailette de refroidissement pour favoriser les échanges thermiques avec le milieu extérieur.
On étudie une ailette de longueur L, de section rectangulaire $S = a \times b$, dont la face en $x = 0$ est en contact avec le transistor à la température $T_0 = 65\ °\mathrm{C}$.



On se place en régime stationnaire, et on suppose que le phénomène est unidimensionnel selon Ox : la température dans l'ailette est $T(x)$. La température de l'air ambiant est T_a. Le transfert thermique de l'ailette vers l'air ambiant est tel que la puissance thermique échangée par un élément de surface latérale dS de longueur dx est donnée par $dP = h[T(x) - T_a]\,dS$, où h est une constante caractéristique de cet échange thermique.
La conductivité thermique de l'ailette est λ.

1. Montrer que la température dans l'ailette vérifie une équation différentielle de la forme

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} - \frac{T(x) - T_a}{\delta^2} = 0 \qquad (1)$$

où δ est une grandeur caractéristique dont on donnera l'expression en fonction de λ, a, b et h, dont on précisera la dimension.

2. Quelle est la forme générale de la solution de l'équation différentielle (1) ?
À quelle condition portant sur δ peut-on considérer l'ailette comme infinie ? En se plaçant dans ce cas, déterminer complètement l'expression de $T(x)$.

3. Exprimer en fonction de T_0, T_a, a, b, λ et h la puissance thermique totale évacuée par l'ailette.

Pour une même section $S = 1\ \mathrm{cm^2}$, on considère deux profils d'ailette :

— une fine, avec $a = 0{,}1$ cm et $b = 10$ cm ;

— l'autre épaisse, avec $a' = b' = 1$ cm.

Quelle ailette vaut-il mieux choisir pour évacuer une maximum de puissance thermique ?

4. Est-il nécessaire de prendre une ailette aussi longue que possible ? Proposer une longueur L d'ailette dans le cas où $\delta = 1$ cm. Commenter la structure du radiateur sur la photo suivante.

Résistance thermique, ARQS thermique

18 — Chauffage d'un igloo

Pour passer la nuit, un inuit veut construire un igloo fait d'un mur constitué de neige compactée de $4\ \mathrm{m^2}$ de surface. La neige compactée est un bon isolant de conductivité thermique $\lambda = 0{,}25\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$.

1. Exprimer la résistance thermique des parois de l'igloo en fonction de l'épaisseur e de la paroi. On négligera la courbure des parois.

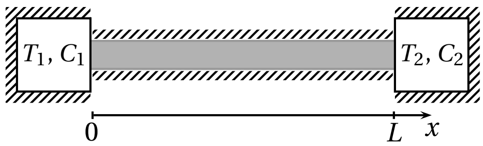
2. Pendant son sommeil, l'inuit dégage 0,5 MJ de chaleur par heure. Exprimer la puissance de l'inuit en tant que source de chaleur dans les unités du système international.

3. Pendant la nuit, quand le feu à l'intérieur de l'igloo s'est éteint, la température intérieure est $T_{\text{int}} = 20\,°\text{C}$, tandis que celle à l'extérieur est $T_{\text{ext}} = -40\,°\text{C}$. Si la conduction thermique à travers les murs de l'igloo est le facteur dominant dans les pertes thermiques, quelle est la valeur de e pour que l'intérieur de l'igloo ne se refroidisse pas ?

4. En fait, l'épaisseur est trop importante pour que l'on puisse négliger la courbure des parois. Faire la bilan thermique en coordonnées sphériques, et trouver la résistance thermique R_{th} en fonction des rayons intérieur et extérieur de l'igloo, demi-sphérique. Étude de la limite si $e \ll R_{\text{int}}$.

19 — Diffusion thermique dans une barre

On considère une barre (représentée en gris sur le schéma) homogène de longueur L, de conductivité thermique λ, de section S et de masse volumique ρ. Deux sources de température sont placées à ses deux extrémités comme indiqué sur le schéma.



1. On suppose les sources idéales.

1.a) Que valent C_1 et C_2 ?

1.b) On se place en régime permanent. Donner $T(x)$.

2. On considère plus que les sources ne sont plus idéales, et on se place en régime quasi-stationnaire.

2.a) Discuter de la validité de l'hypothèse.

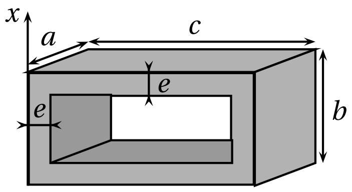
2.b) Déterminer $T_1(t)$ et $T_2(t)$.

20 — Le parpaing a un petit creux

1. On considère un phénomène de diffusion thermique unidimensionnel dans un matériau de longueur L, de section S et de conductivité thermique λ.

Rappeler la définition de la résistance thermique d'un milieu en précisant les hypothèses nécessaires, puis établir son expression dans le cas du matériau considéré. Préciser son unité.

On considère un parpaing creux en béton, dont les dimensions sont indiquées sur la figure ci-dessous (l'épaisseur de la paroi est constante, égale à e). On note λ_a la conductivité thermique de l'air et λ_b celle du béton.
On donne $a = 20$ cm, $b = 15$ cm, $c = 40$ cm, $e = 2$ cm, $\lambda_a = 2{,}6 \times 10^{-2}\ \text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ et $\lambda_b = 0{,}92\ \text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

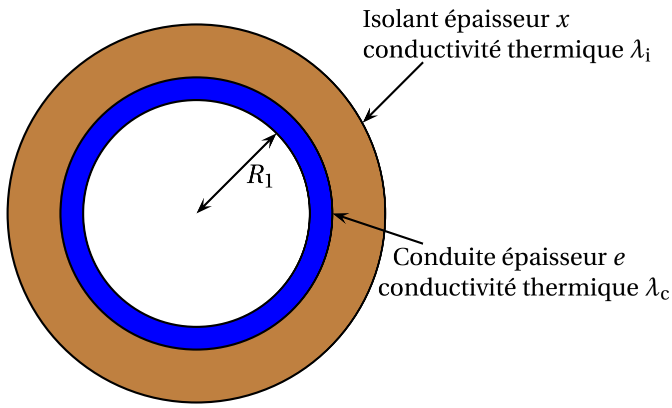


2. On impose les températures T_1 à la face $x = 0$ et T_2 à la face $x = b$. Déterminer le flux thermique traversant le parpaing en régime permanent.

3. Quelle serait l'épaisseur b' d'un parpaing de béton plein qui serait traversé par le même flux thermique, les dimensions a et c étant inchangées ? Commenter.

21 — Isolation d'une conduite

On considère une conduite entourée d'un isolant.

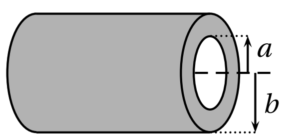


Les phénomènes de convection sont modélisés par la loi de Newton : $\mathrm{d}\Phi = h(T - T_e)\,\mathrm{d}S$.
On note h_1 le coefficient d'échange air/conduite et h_2 le coefficient d'échange isolant/air.
On donne également l'expression de la résistance thermique en coordonnées cylindriques

$$R_{\text{th}} = \frac{1}{2\pi\lambda L}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right),$$

où R_1 est le rayon intérieur, R_2 le rayon extérieur, λ la conductivité thermique du cylindre de longueur L.
Est-il vrai que plus il y a d'isolant, meilleure est l'isolation ? Si non, quelle est la condition sur x pour avoir la meilleure isolation ?

22 — Isolation d'une canalisation



On considère une canalisation cylindrique de longueur L, de rayons intérieur a et extérieur b, et de conductivité thermique λ. On étudie la diffusion thermique en régime stationnaire entre la face interne et la face externe en négligeant les effets de bords : la température dans le tube s'écrit $T(r)$ en coordonnées cylindriques d'axe l'axe du tube.

On rappelle que pour $T(r)$ en coordonnées cylindriques, on a $\overrightarrow{\text{grad}}\, T = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r$ et $\Delta T = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right)$.

1. Rappeler la définition générale de la résistance thermique.

2. Donner l'expression du flux thermique sortant $\Phi(r)$ à travers un cylindre de rayon $r \in [a, b]$ de de longueur L en fonction des données et de $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}$.

Que peut-on dire de ΔT en régime stationnaire ? En déduire que le flux thermique $\Phi(r) = \Phi$ est indépendant de r.

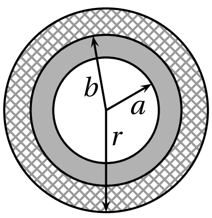
On note T_1 la température de la face interne du tube et T_2 celle de sa face externe. Relier alors $T_1 - T_2$ à Φ et aux données du problème, et en déduire l'expression de la résistance thermique $R_{\text{th},1}$ du tube en fonction de a, b, λ et L.

3. On rappelle la loi de Newton donnant le flux thermique à travers une surface S d'un solide à la température T_{S} vers un fluide à la température T_{e} : $\Phi_{\text{S}\to\text{e}} = hS(T_{\text{S}} - T_{\text{e}})$, où h est le coefficient de transfert convectif. Montrer que l'on peut associer une résistance thermique R_{conv} à ce transfert convectif, dont on donnera l'expression en fonction de h et S.

4. Un fluide circule dans le tube, qui est entouré d'air ; il se produit donc des transferts convectifs sur les deux faces de la canalisation, caractérisés par les coefficients de transfert h_1 pour la face interne et h_2 pour la face externe.

Donner la résistance thermique totale R_{th} caractérisant le transfert thermique de l'intérieur du tube vers l'air extérieur.

5. On cherche à minimiser les pertes thermique en enveloppant le tube d'un matériau isolant de conductivité λ_{iso}, de rayon r.



Que devient la résistance thermique R'_{th} de l'ensemble ?

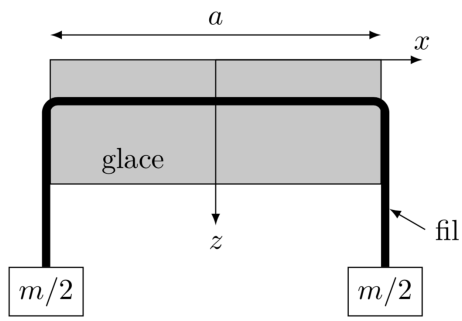
Montrer que la résistance thermique passe par un extremum pour une valeur critique r_{c} de r que l'on déterminera. À quelle condition cette situation sera possible ? Est-ce un minimum ou un maximum ?

6. En étudiant le signe de $R'_{\text{th}} - R_{\text{th}}$, discuter de l'influence de l'isolant sur le flux thermique.

On parle du « paradoxe de l'isolant » : discuter.

23 — Expérience de regel

On pose un fil métallique de section rectangulaire de côtés b selon (Oy) et c selon (Oz) aux extrémités duquel sont fixées deux masses $m/2$ sur un gros bloc de glace. On constate que la glace fond sous le fil, que le fil descend doucement à vitesse constante v et que l'eau regèle au-dessus du fil.



1. Évaluer, à l'aide notamment du diagramme (P, T) et des données, la différence de température $T_{\text{i}} - T_{\text{s}}$ entre le dessous (indice i)et le dessus (indice s).

On donne $m = 5$ kg ; $a = 20$ cm ; $b = 0{,}5$ mm et $c = 5$ mm.

2. On suppose que le régime de diffusion thermique dans le fil est stationnaire.

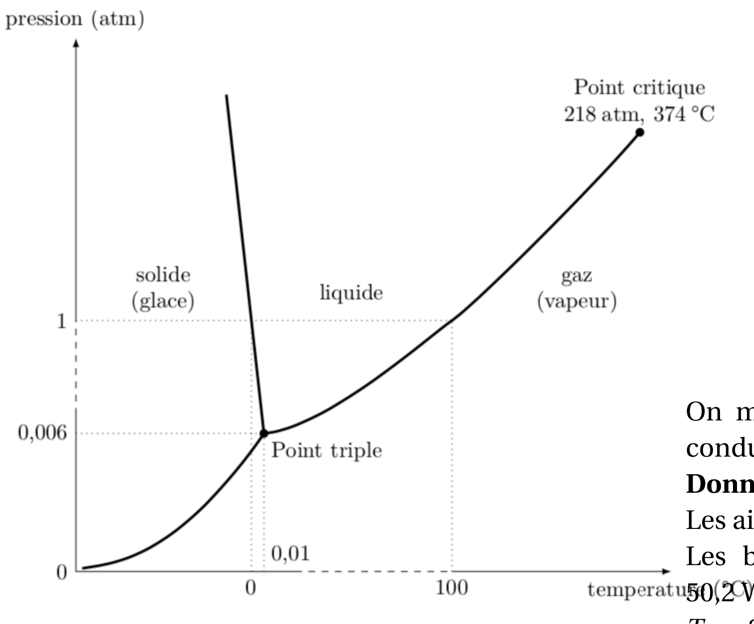
En appliquant le premier principe à la couche d'eau solide d'épaisseur dz qui fond sous le fil, en déduire la vitesse $v = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

Données : $\lambda = 80\ \text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$; enthalpie massique de fusion de l'eau à 0 °C : $\Delta_{\text{fus}}H = 330\ \text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$.

➤ On appelle *enthalpie massique de changement d'état* $\Delta h_{1\to2}(T)$, ou *chaleur latente de changement d'état* $\ell_{1\to2}(T)$, la variation d'enthalpie massique du corps pur lors de la transition de phase $1 \to 2$. Cette grandeur est tabulée en, fonction de la température car *elle ne dépend que de* T.

➤ Pour une masse m de corps pur, passant de l'état initial $\{\text{phase } 1, T, P_{\text{éq}}(T)\}$ à l'état final $\{\text{phase } 2, T, P_{\text{éq}}(T)\}$ on peut calculer la variation d'enthalpie due au changement d'état par

$$\Delta H_{1\to2} = m\ell_{1\to2}(T)\,.$$



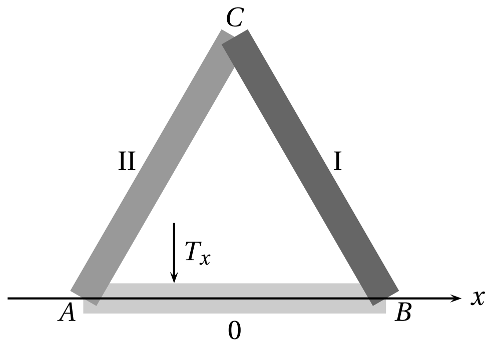
1 atm = 1,01325 bar = 101 325 Pa

Pression (bar)	Température (°C)
1,01325	0,0026
50	-0,362
100	-0,741
150	-1,125
200	-1,517
250	-1,9151
300	-2,321
400	-3,153
500	-4,016
600	-4,91
800	-6,79
1000	-8,80

Figure 1

24 — Trois barres en contact

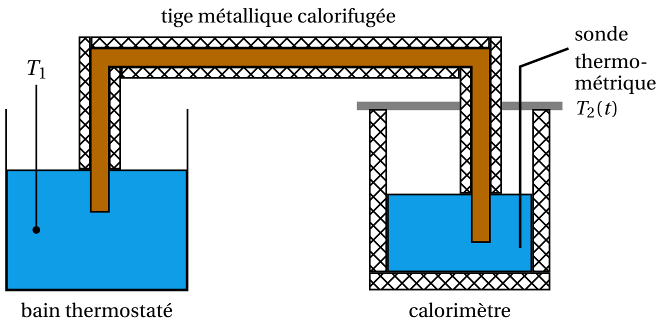
On considère le dispositif représenté ci-dessous dans lequel les deux extrémités A et B sont maintenues aux températures stationnaires T_A et T_B. Les trois barres (d'indices 0, I et II) sont caractérisées respectivement par des sections d'aires respectives S_0, S_{I} et S_{II} et par des conductivités thermiques λ_0, λ_{I} et λ_{II} et de même longueur notée L_0.
On note T_{C} la température à la jonction C et T_x la température en un point d'abscisse x de la barre 0, de longueur totale $L_0 = 20$ cm.



On mesure $T_x = T_C$ pour $x = 4$ cm. En déduire la conductivité thermique de la barre II.
Données numériques
Les aires sont toutes égales à 1 cm^2
Les barres 0 et I sont en acier, pour lequel $\lambda = 50{,}2\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$.
$T_A = 273$ K et $T_B = 373$ K.

25 — Détermination d'une conductivité thermique

On souhaite déterminer la conductivité thermique λ d'une barre cylindrique de section S et de longueur L. On utilise le dispositif suivant :



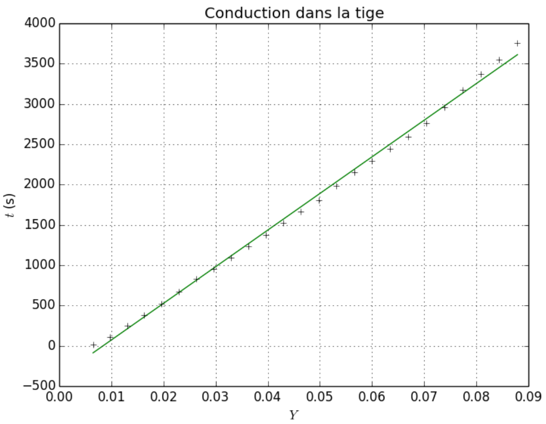
La tige, calorifugé latéralement, plonge d'un côté dans un bain thermostaté maintenu à la température T_1 constante, et de l'autre dans un calorimètre de capacité thermique C, rempli d'une masse $m = 400$ g d'eau. Initialement, $T_2(0) < T_1$, et on relève l'évolution de $T_2(t)$ au cours du temps.

1. On fait l'hypothèse d'un état quasi-stationnaire : l'évolution de $T_2(t)$ est « suffisamment lente » pour que l'on puisse considérer le régime stationnaire atteint à chaque instant dans la tige.
Établir alors l'expression de la résistance thermique de la tige en fonction de L, S et λ. En déduire l'expression du flux thermique traversant la barre dans le sens thermostat → calorimètre en fonction des températures T_1 et $T_2(t)$.

2. En effectuant un bilan d'énergie au système {eau + calorimètre}, établir l'équation différentielle vérifiée par $T_2(t)$. On notera C_2 la capacité thermique totale de l'eau et du calorimètre.

Montrer que l'évolution est décrite par une constante de temps τ que l'on exprimera, et en déduire l'expression de $T_2(t)$.

3. On donne le graphe de t en fonction de $\ln\left(\dfrac{T_2(0)-T_1}{T_2(t)-T_1}\right)$, sur lequel on représente la régression linéaire effectuée avec les points expérimentaux.



La tige a pour longueur $L = 68$ cm et pour diamètre $D = 1{,}2$ cm. La capacité du calorimètre est $C = 180\ \mathrm{J\cdot K^{-1}}$; on y a placé $m = 400$ g d'eau, et on donne $c_{\text{eau}} = 4{,}186\ \mathrm{J\cdot g^{-1}K^{-1}}$.

En déduire une estimation de la conductivité λ de la tige.

On donne :

$\lambda_{\text{Al}} = 237\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$;

$\lambda_{\text{Cu}} = 401\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$.

De quel métal est constituée la tige ?

4. On rappelle l'équation de la chaleur unidimensionnelle : $\rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$. Par analyse dimensionnelle, donner l'expression du temps caractéristique du phénomène de diffusion thermique dans la barre en fonction des grandeurs physiques en jeu.

On a considéré l'évolution quasi-stationnaire (cf. question 1). À quoi revient cette approximation en raisonnant sur les échelles de temps du problème ? Est-elle vérifiée ici ?

Données :

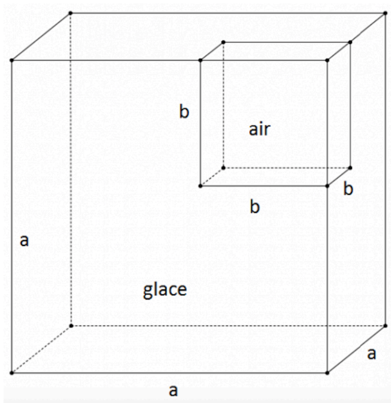
— pour l'aluminium $\rho_{\text{Al}} = 2{,}7\ \mathrm{g\cdot cm^{-3}}$ et $c_{\text{Al}} = 897\ \mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$;

— pour le cuivre $\rho_{\text{Cu}} = 8{,}9\ \mathrm{g\cdot cm^{-3}}$ et $c_{\text{Cu}} = 386\ \mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$.

5. Si l'évolution ne peut être considérée comme quasi-statique, notre évaluation expérimentale de λ serait-elle sur-estimée ou sous-estimée par rapport à la valeur réel ?

26 — Conductivité du givre

On modélise le givre comme la répétition d'un même motif : un cube de côté a, comprenant un sous-cube d'air de côté b, le reste de la matière du motif étant de la glace.



Conductivités thermique : $\lambda_{\text{glace}} = 2{,}1\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$ et $\lambda_{\text{air}} = 0{,}022\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$.

1. Exprimer la résistance thermique du motif.

2. Exprimer la conductivité thermique λ du givre.

3. Tracer la courbe $\lambda = F\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

4. Calculer la conductivité thermique du givre pour une fraction volumique de l'air dans le givre de 0,4. Conclure sur la nécessité de dégivrer régulièrement un congélateur.

Ondes thermiques

27 — Oscillations thermiques

Le plan $x = 0$ sépare l'air ($x < 0$) d'un milieu ($x > 0$) de conductivité thermique λ, de masse volumique ρ, de masse volumique μ et de capacité thermique massique c. La température en $x = 0$ est

$$T(0,t) = T_a + \theta_0 \cos(\omega t)\,.$$

1. Établir l'équation aux dérivées partielles régissant $T(x,t)$ dans le milieu.

2. La solution est recherchée en complexe sous la forme

$$\underline{T}(x,t) = \underline{\theta}(x)\,e^{i\omega t} + Cx + D\,.$$

Trouver $\underline{\theta}(x)$ en introduisant une longueur caractéristique δ. Déterminer complètement $T(x,t)$. Commenter.

3. On donne $a = \dfrac{\lambda}{\rho c} = 7 \times 10^{-7}\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$. Calculer δ pour la variation jour-nuit. Commenter.

4. Quelle doit être l'épaisseur d'un mur pour atténuer les variations de température d'un facteur 10 ?

28 — Diffusion thermique dans un câble

On considère un câble cylindrique de section S, de rayon a, de longueur L, de masse volumique μ, de conductivité thermique λ et de capacité thermique massique c. On le suppose parfaitement calorifugé ; son état de dépend que l'abscisse x et du temps t.

1. Une perturbation thermique a lieu à l'extrémité $x = 0$. Établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la température $T(x,t)$.

2. L'extrémité en $x = 0$ est maintenue à la température T_1 alors que l'autre est maintenue à la température $T_2 < T_1$. Calculer λ sachant que le flux thermique à travers une section S est de $2400\ \mathrm{J \cdot min^{-1}}$. On donne $S = 100\ \mathrm{cm^2}$, $T_1 = 300\ \mathrm{K}$, $T_2 = 280\ \mathrm{K}$ et $L = 1\ \mathrm{m}$. Commenter la valeur obtenue.

3. On impose des variations sinusoïdales de température autour d'une température moyenne T_0 :

$$T(x=0,t) = T_0 + A\cos(\omega t)\,.$$

L'expression de la température en un point d'abscisse x est de la forme

$$T(x,t) = T_0 + A\mathrm{e}^{-mx}\cos(\omega t - \alpha x + \varphi)\,.$$

3.a) Commenter, et déterminer φ, m et α en fonction de ω, μ, λ et c.

3.b) On a relevé expérimentalement les amplitudes d'oscillation suivantes pour un câble de longueur $L = 10\ \mathrm{m}$:

x (m)	0	1	2	3
amplitude (K)	19,5	11,5	6,8	4

Quel paramètre caractérisant l'évolution de la température peut-on en déduire ?

3.c) On appelle profondeur d'inversion l'abscisse minimale pour laquelle les oscillations thermiques sont en opposition de phase avec celles de l'origine. Calculer cette profondeur.