

DS n° 2

Solution

Partie I — Convertisseur de puissance (CCINP PSI 2025)

Q1. Convertisseurs d'électronique de puissance :

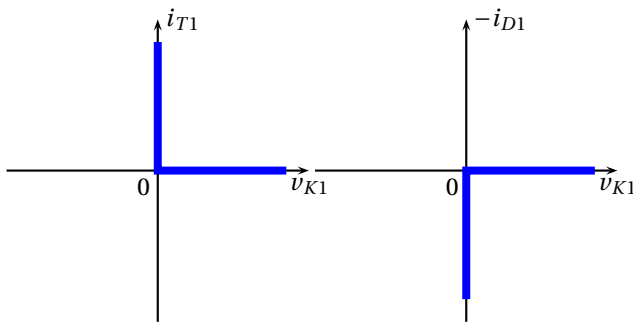
onduleur du continu vers l'alternatif;

redresseur de l'alternatif vers le continu;

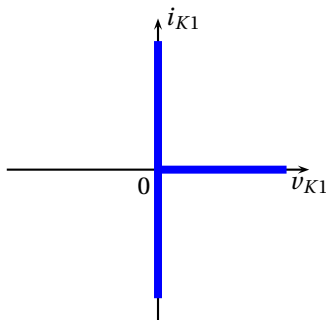
hacheur du continu vers le continu par modification de la valeur moyenne.

Q2. L'intensité traversant l'interrupteur K_1 est $i_{K1} = i_{T1} - i_{D1}$.

Pour le transistor et la diode, on a respectivement (compte tenu de l'orientation de la diode)



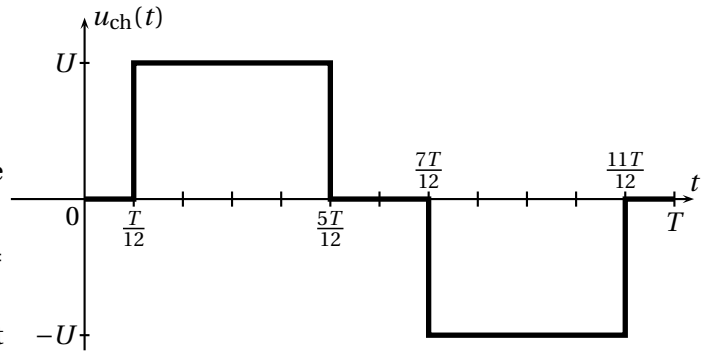
En sommant ces deux caractéristiques selon l'axe des ordonnées d'après la relation $i_{K1} = i_{T1} - i_{D1}$ on en déduit la caractéristique de l'interrupteur K_1 :



Q3. On dresse le tableau de l'état des interrupteurs sur une période (O : ouvert, F : fermé), et on en déduit la valeur de u_{ch} pour chaque configuration. On remarque que les intervalles $[\frac{11T}{12}, \frac{13T}{12}]$ et $[-\frac{T}{12}, \frac{T}{12}]$ sont identiques compte tenu de la périodicité du fonctionnement.

t	$[-\frac{T}{12}, \frac{T}{12}]$	$[\frac{T}{12}, \frac{5T}{12}]$	$[\frac{5T}{12}, \frac{7T}{12}]$	$[\frac{7T}{12}, \frac{11T}{12}]$	$[\frac{11T}{12}, \frac{13T}{12}]$
K_1	O	F	F	O	O
K_2	O	O	F	F	O
K_3	F	O	O	F	F
K_4	F	F	O	O	F
u_{ch}	0	U	0	$-U$	0

On en déduit l'allure de $u_{ch}(t)$ sur une période du convertisseur.



Sa valeur moyenne est

$$U_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \int_0^T u_{ch}(t) dt = \left(\frac{5}{12} - \frac{1}{12} \right) U - \left(\frac{11}{12} - \frac{7}{12} \right) U$$

soit $U_{\text{moy}} = 0 \text{ V}$.

Sa valeur efficace est donnée par

$$U_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u_{ch}^2(t) dt = \left(\frac{5}{12} - \frac{1}{12} \right) U^2 + \left(\frac{11}{12} - \frac{7}{12} \right) U^2 = \frac{8}{12} U^2 = \frac{2}{3} U^2$$

d'où

$$U_{\text{eff}} = U \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Q4. Protocole de mesure :

- brancher le multimètre en parallèle de la charge;
- se placer en **mode DC** pour mesurer U_{moy} ;
- se placer en **mode AC** pour mesurer U_{eff} .

On choisira le calibre le plus élevé pour avoir la meilleure précision.

Q5. D'après le graphe de $i_{ch}(t)$, on évalue la période du convertisseur à $T = 20 \text{ ms}$.

➤ Cela correspond à la fréquence $f = 50 \text{ Hz}$ qui est celle du secteur.

Q6. La période de la tension début à $t = 0$ et va jusqu'à $t = 20 \text{ ms}$.

On lit que la période de $i_{ch}(t)$ qui débute à $i_{ch} = 0$ débute à environ 2,5 ms : **le courant est en retard de phase sur la tension.**

La tension est donc en avance de phase sur le courant, ce qui correspond¹ à une **charge de nature inductive.**

➤ On peut répondre en remarquant que la tension $u_{ch}(t)$ présente des discontinuités, tandis que le courant traversant la charge est continu, ce qui caractérise une charge inductive.

1. Pour une inductance pure (une bobine idéale), on a $\underline{Z} = jL\omega$ et la tension est en avance de 90° sur le courant; pour une inductance réelle on a $\underline{Z} = R + jL\omega$, d'argument positif, et la tension est en avance de phase sur le courant.

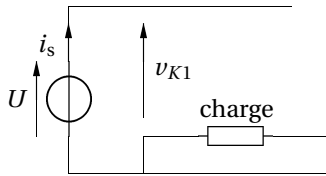
Le retard temporel du courant sur la tension est $\Delta t = 2,5 \text{ ms}$. Le retard de phase vaut donc

$$\varphi = \frac{\Delta t}{T} 2\pi = \frac{-2,5}{20} 2\pi$$

soit $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ (ou $\varphi = -45^\circ$).

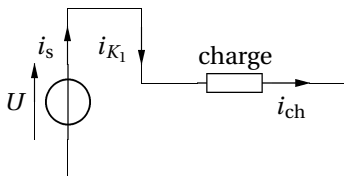
Q7. Décrivons le circuit dans les différentes phases :

[0, T/12] soit $0 < t < 1,7 \text{ ms}$.



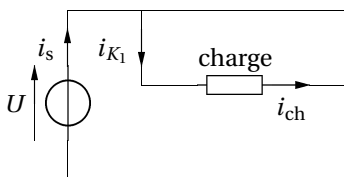
On a $i_s = 0$ et $i_{K1} = 0$.

[T/12, 5T/12] soit $1,7 \text{ ms} < t < 8,3 \text{ ms}$.



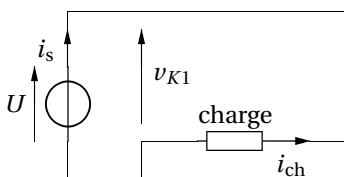
On a $i_{K1} = i_{ch}$ et $i_s = i_{ch}$.

[5T/12, 7T/12] soit $8,3 \text{ ms} < t < 11,7 \text{ ms}$.



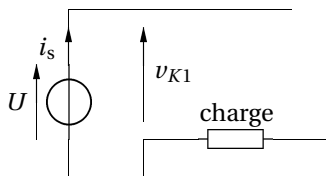
On a $i_s = 0$, $i_{K1} = i_{ch}$.

[7T/12, 11T/12] soit $11,7 \text{ ms} < t < 18,3 \text{ ms}$.



On a $i_s = -i_{ch}$ et $i_{K1} = 0$.

[11T/12, T] soit $18,3 \text{ ms} < t < 20 \text{ ms}$.



On a $i_s = 0$ et $i_{K1} = 0$.

Le courant i_{K1} est non nul entre $1,7 \text{ ms}$ et $11,7 \text{ ms}$, et est égal à i_{ch} qui est négatif au tout début de cette phase,

puis positif d'après la courbe fournie. Seul le **cas d** peut convenir.

Le courant i_s est non nul entre $1,7 \text{ ms}$ et $8,3 \text{ ms}$ et est égal à i_{ch} : il est brièvement négatif avant d'être positif. Il reprend la même évolution entre $11,7 \text{ ms}$ et $18,3 \text{ ms}$. Seul le **cas e** peut convenir.

La diode est passante quand $i_{K1} < 0$. On a $i_{T1} = -i_{K1} > 0$. Seul le **cas b** peut convenir pour représenter i_{K1} .

Le transistor est passant quand $i_{K1} > 0$.

On a $i_{T1} = i_{K1} > 0$. Seul le **cas c** peut convenir pour représenter i_{T1} .

Résumons :

courant	i_{K1}	i_{T1}	i_{D1}	i_s
cas	d	c	b	e

Q8. À la date $t = T/12$, c'est la diode qui commence par être passante ($i_s < 0$ comme on le voit sur le graphe du cas e). Il est donc inutile de commander si tôt le transistor ; il suffit de le commander quand il devient passant, c'est-à-dire à la date **T/8** (quand $i_s = 0$).

Q9. La puissance moyenne délivrée par la source de tension est donnée par

$$P_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \int_0^T U i_s(t) dt = \frac{U}{T} \int_{T/12}^{5T/12} i_{ch}(t) dt + \frac{U}{T} \int_{7T/12}^{11T/12} [-i_{ch}(t)] dt.$$

On peut simplifier le calcul en remarquant que les deux intégrales sont égales (cf. graphe du cas e) :

$$P_{\text{moy}} = \frac{2UI_{\text{max}}}{T} \int_{T/12}^{5T/12} \sin(\omega t + \varphi) dt = \frac{2UI_{\text{max}}}{T} \left[-\frac{1}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) \right]_{T/12}^{5T/12}.$$

Comme $\omega T = 2\pi$ on a

$$P_{\text{moy}} = -\frac{UI_{\text{max}}}{\pi} \left[\cos\left(\frac{5\pi}{6} + \varphi\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) \right] = \frac{UI_{\text{max}}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \sin\left(-\frac{4\pi}{6}\right) = -\frac{2UI_{\text{max}}}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

soit

$$P_{\text{moy}} = \frac{2UI_{\text{max}}}{\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cos \varphi.$$

Comme $\sin(2\pi/3) = \sqrt{3}/2$, on peut écrire

$$P_{\text{moy}} = \frac{UI_{\text{max}}}{\pi} \sqrt{3} \cos \varphi.$$

Interface entre les supercondensateurs et l'ensemble onduleur-moteur synchrone

Q1. La puissance moyenne délivrée par le pack de supercondensateurs est

$$\mathcal{P} = \langle V_e I_e \rangle.$$

En dehors de la résistance R_C qui modélise la charge, les autres composants ne consomment pas de puissance moyenne :

- les interrupteurs sont idéaux;
- une bobine idéale ne consomme pas de puissance en moyenne en régime périodique établi, la puissance instantanée reçue s'écrivant $p_L(t) = i_L L \frac{di_L}{dt} = \frac{L}{2} \frac{di_L^2}{dt}$, dérivée d'une fonction périodique;
- un condensateur idéal ne consomme pas de puissance en moyenne en régime périodique établi, la puissance instantanée reçue s'écrivant $p_C(t) = C \frac{du_C}{dt} u_C = \frac{C}{2} \frac{du_C^2}{dt}$, dérivée d'une fonction périodique.

La puissance moyenne reçue par la charge est donc égale à la puissance moyenne délivrée par le générateur, soit

$$\mathcal{P} = \langle V_e I_e \rangle = \langle V_s I_s \rangle.$$

Les grandeurs V_e , V_s et I_s étant constantes, on peut écrire $V_e \langle I_e \rangle = V_s I_s$, d'où

$$\langle I_e \rangle = \frac{V_s I_s}{V_e}.$$

La valeur moyenne de I_e est maximale pour la valeur minimale $V_e = 27 \text{ V}$:

$$I_{e,\max} = \frac{36 \times 10}{27}$$

soit $I_{e,\max} = 13 \text{ A}$.

Q2. En moyenne, on a

$$V_{L_1} = \frac{1}{T} \int_0^T L_1 \frac{dI_e(t)}{dt} dt = \frac{L_1}{T} \left[I_e(t) \right]_0^T = 0$$

car $I_e(T) = I_e(0)$ en régime périodique établi.

On a de même $V_{L_2} = 0$.

La loi des mailles appliquée à la maille comprenant L_2 , C_1 , L_1 et la source V_e s'écrit

$$V_e = V_{L_2}(t) + V_{C_1}(t) + V_{L_1}(t).$$

En valeur moyenne, on a donc

$$V_e = 0 + \langle V_{C_1} \rangle + 0$$

d'où

$$\langle V_{C_1} \rangle = V_e.$$

Q3. Analysons les deux phases de fonctionnement :

$0 \leq t < \alpha T$: comme K_1 est fermé, la maille $\{L_2, C_1, K_1\}$ permet d'écrire

$$V_{L_2}(t) + V_{C_1} + 0 = 0$$

d'où $V_{L_2}(t) = -V_{C_1}$.

$\alpha T \leq t < T$: comme K_2 est fermé la maille $\{L_2, K_2, R_C\}$ permet d'écrire

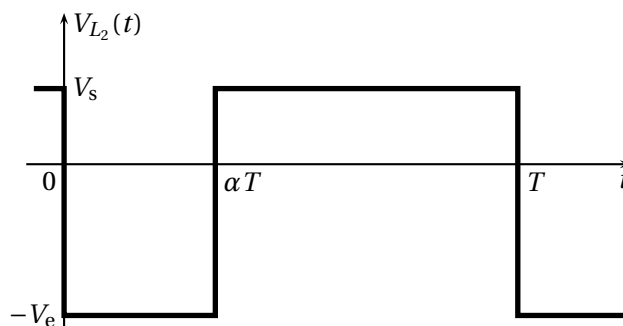
$$V_{L_2}(t) + 0 - V_s = 0$$

d'où $V_{L_2}(t) = V_s$.

On a donc

$$V_{L_2}(t) = \begin{cases} -V_{C_1} = -V_e & \text{pour } 0 \leq t < \alpha T \\ V_s & \text{pour } \alpha T \leq t < T \end{cases}$$

► Comme $\langle V_{L_2} \rangle = 0$, les aires sous la courbes dans les deux phases doivent être opposées.



Q4. En régime périodique on a $\langle V_{L_2} \rangle = 0$, qui s'écrit d'après le chronogramme précédent

$$\langle V_{L_2} \rangle = \frac{1}{T} (-\alpha T V_e + (1 - \alpha) T V_s) = 0$$

d'où

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{\alpha}{1 - \alpha}.$$

Lorsque les supercondensateurs se déchargent, la tension V_e à leurs bornes diminue. Le convertisseur SEPIC permet de maintenir la tension V_s constante en ajustant la valeur du rapport cyclique α .

Q5. Quand les supercondensateurs sont chargés, on a $V_e = 54 \text{ V}$, et $\frac{V_s}{V_e} = \frac{2}{3} \approx 0,7$. On lit sur la courbe du gain $\alpha \approx 0,4$.

Quand la tension d'entrée a diminué jusqu'à $V_e = 27 \text{ V}$, on a $\frac{V_s}{V_e} = \frac{4}{3} \approx 1,3$. On lit sur la courbe du gain $\alpha \approx 0,6$.

Le rapport cyclique doit donc varier sur l'intervalle

$$0,4 \leq \alpha \leq 0,6.$$

Sur cette plage de valeur de α , on constate que la courbe du gain est quasi-confondue avec la courbe théorique ne prenant pas en compte les résistances internes des composants. L'application de la formule du gain obtenue à la question **Q4** donne la même estimation de la plage de variation de α .

Si on laisse les supercondensateurs se décharger complètement, V_e devient très faible et le gain V_s/V_e devient élevé, dépassant la valeur maximale de l'ordre de 4,6 (courbe réelle) : le convertisseur ne peut alors plus permettre de maintenir constante la tension de sortie.

Q6. Sur la phase $0 \leq t < \alpha T$, la loi des mailles dans la maille comprenant L_1 et la source de tension s'écrit

$$V_e = L_1 \frac{dI_e}{dt}.$$

On a donc

$$\frac{dI_e}{dt} = \frac{V_e}{L_1} > 0.$$

L'intensité $I_e(t)$ est donc croissante sur cette phase. Le fonctionnement étant périodique, elle prend donc sa valeur minimale au début de la phase ($t = 0$) et maximale à la fin de la phase ($t = \alpha T$). On a donc

$$I_e(t) = \frac{V_e}{L_1} t + I_{e,\min}$$

et

$$I_{e,\max} = I_e(\alpha T) = \frac{V_e}{L_1} \alpha T + I_{e,\min}.$$

L'ondulation $\Delta I_e = I_{e,\max} - I_{e,\min}$ du courant d'entrée vaut donc

$$\Delta I_e = \frac{V_e}{L_1} \alpha T.$$

On a montré à la question **Q1** que

$$\langle I_e \rangle = \frac{V_s I_s}{V_e}.$$

L'ondulation relative du courant d'entrée vaut donc

$$\frac{\Delta I_e}{\langle I_e \rangle} = \frac{\alpha T}{L_1 I_s} \frac{V_e^2}{V_s} \leq 0,1.$$

La condition voulue est vérifiée si

$$L_1 \geq \frac{T}{0,1 I_s} \frac{\alpha V_e^2}{V_s}.$$

Les paramètres pouvant varier sont V_e (au fur et à mesure que les supercondensateurs se déchargent) et le rapport cyclique α . Éliminons V_e de l'expression pour étudier l'inégalité, en utilisant la relation

$$V_e = \frac{1-\alpha}{\alpha} V_s.$$

Il faut donc

$$L_1 \geq \frac{T}{0,1 I_s} \frac{\alpha (1-\alpha)^2 V_s^2}{\alpha V_s}$$

soit avec $f = 1/T$

$$L_1 \geq \frac{T V_s}{0,1 I_s} \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha} = \frac{10 V_s}{f I_s} \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha}.$$

La valeur minimale de L_1 est donnée par la valeur maximale du membre de droite de l'inégalité. Posons

$$f(\alpha) = \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha}.$$

On calcule

$$f'(\alpha) = -\frac{2(1-\alpha)}{\alpha} - \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2} \leq 0$$

car $0 \leq \alpha \leq 1$. La fonction f est donc décroissante. Quand α varie de 0,4 à 0,6, sa valeur maximale est donc atteinte pour $\alpha = 0,4$, d'où comme $f = 1/T$

$$L_{1,\min} = \frac{10 V_s}{I_s f} \frac{(1-0,4)^2}{0,4}.$$

On calcule $L_{1,\min} = \frac{10 \times 36}{300 \times 10^3 \times 10} \frac{(1-0,4)^2}{0,4}$, soit

$$L_{1,\min} = 108 \mu\text{H}.$$

Q7. Sur la phase $0 \leq t < \alpha T$, l'interrupteur K_2 est ouvert. En considérant l'intensité I_s constante, on a donc

$$C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt} = -I_s.$$

Comme $V_{C_2} = V_s$, on a donc

$$\frac{dV_s}{dt} = -\frac{I_s}{C_2} < 0.$$

La tension V_s décroît donc sur cette phase, partant donc de sa valeur maximale en régime périodique :

$$V_s(t) = V_{s,\max} - \frac{I_s}{C_2} t.$$

La valeur minimale est atteinte à la fin de cette phase :

$$V_{s,\min} = V_{s,\max} - \frac{I_s}{C_2} \alpha T.$$

On a donc

$$\Delta V_s = V_{s,\max} - V_{s,\min} = \frac{I_s \alpha T}{C_2}.$$

L'ondulation relative de la tension de sortie est

$$\frac{\Delta V_s}{V_s} = \frac{I_s \alpha T}{C_2 V_s} \leq 0,01$$

d'où

$$C_2 \geq \frac{I_s \alpha T}{0,01 V_s} = \frac{100 I_s \alpha}{f V_s}.$$

On se place dans le cas où $V_s = V_e$, soit $\frac{\alpha}{1-\alpha} = 1$, d'où $\alpha = 0,5$. On a donc

$$C_{2,\min} = \frac{50 I_s}{f V_s}.$$

On calcule $C_{2,\min} = \frac{50 \times 10}{300 \times 10^3 \times 36}$, soit

$$C_{2,\min} = 46 \text{ mF}.$$

1 — Mesure d'une différence de fréquence par détection synchrone

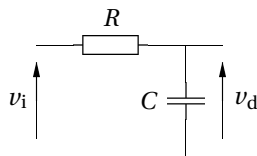
Q1. Le signal en sortie du multiplieur s'écrit

$$\begin{aligned} v_i(t) &= k v_1(t) v_2(t) = kAB \cos(2\pi f_1 t) \cos(2\pi f_2 t + \varphi_0) \\ &= \frac{kAB}{2} \cos(2\pi(f_1 + f_2)t + \varphi_0) \\ &\quad + \frac{kAB}{2} \cos(2\pi(f_1 - f_2)t - \varphi_0). \end{aligned}$$

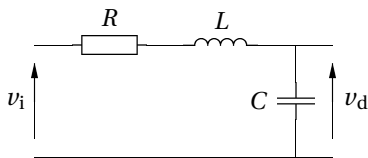
Le signal v_1 comporte donc deux composantes harmoniques de fréquences $f_1 + f_2$ et $|f_2 - f_1|$.

Comme $f_1 + f_2 \gg |f_2 - f_1|$, un **filtre passe-bas** permet d'obtenir un signal de fréquence $|f_2 - f_1|$.

Q2. Filtre passe-bas d'ordre 1 :



Filtre passe-bas d'ordre 2 :



Q3. Pour le filtre d'ordre 1, la fonction de transfert est

$$\underline{H}_1(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}.$$

Pour le filtre d'ordre 2, la fonction de transfert est

$$\underline{H}_2(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}.$$

La fréquence haute à couper est

$$f_1 + f_2 \approx 80 \text{ kHz}.$$

En l'absence d'information, prenons comme fréquence basse

$$|f_2 - f_1| \approx 10 \text{ Hz}.$$

Il faut choisir une fréquence de coupure telle que

$$|f_2 - f_1| < f_c \ll f_2 + f_1.$$

Prenons $f_c = 100 \text{ Hz}$.

Filtre d'ordre 1 : $\underline{H}_1(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$.

On a

$$f_c = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC}.$$

Il faut prendre $RC = 16 \text{ ms}$. On peut choisir $C = 100 \text{ nF}$ et $R = 16 \text{ k}\Omega$.

Filtre d'ordre 2 : $\underline{H}_2(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$.

On a

$$f_c = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Il faut prendre $LC = 2,5 \mu\text{s}$. On peut choisir $C = 10 \mu\text{F}$ et $L = 250 \text{ mH}$.

Le meilleur choix du facteur de qualité pour réaliser un filtrage passe-bas est $Q = 1/\sqrt{2}$ (on évite la résonance en f_0 obtenue avec un facteur de qualité plus élevé, et le gain reste meilleur dans la bande passante qu'avec une valeur plus basse). On choisit donc

$$R = \sqrt{\frac{2L}{C}},$$

soit avec les valeurs précédentes $R = 224 \Omega$.

Q4. En sortie du déphaseur, on a

$$v_{1Q} = A \cos\left(2\pi f_1 t + \frac{\pi}{2}\right).$$

En sortie du second multiplieur :

$$\begin{aligned} v_{i,Q} &= kAB \cos\left(2\pi f_1 t + \frac{\pi}{2}\right) \cos(2\pi f_2 t + \varphi) \\ &= \frac{kAB}{2} \cos\left(2\pi(f_1 + f_2)t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad + \frac{kAB}{2} \cos\left(2\pi(f_2 - f_1)t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

À la sortie du second filtre passe-bas, on a

$$v_{d,Q} = \frac{kAB}{2} \cos\left(2\pi(f_2 - f_1)t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

soit

$$v_{d,Q} = \frac{kAB}{2} \sin(2\pi(f_2 - f_1)t + \varphi).$$

On rappelle que l'on a d'ailleurs

$$v_d(t) = \frac{kAB}{2} \cos(2\pi(f_2 - f_1)t + \varphi)$$

Il suffit alors d'envoyer le signal $v_d(t)$ en voie I d'un oscilloscope et le signal $v_{d,Q}(t)$ en voie II.

On observe en mode XY : le spot décrit la courbe paramétrée

$$\begin{cases} X(t) = \frac{kAB}{2} \cos(2\pi(f_2 - f_1)t + \varphi) \\ Y(t) = \frac{kAB}{2} \sin(2\pi(f_2 - f_1)t + \varphi) \end{cases}$$

C'est un cercle. Le signe de $f_2 - f_1$ donne le sens de parcours de ce cercle :

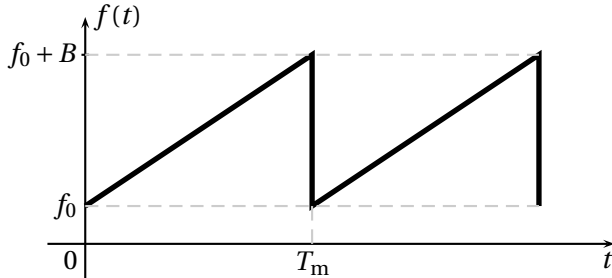
- si le spot décrit le cercle dans le sens trigonométrique, on a $f_2 - f_1 > 0$;
- si le spot décrit le cercle dans le sens horaire, on a $f_2 - f_1 < 0$.

2 — Mesure de distance par modulation de fréquence

Q5. Sur l'intervalle $[0, T]$, la fréquence instantanée est donnée par

$$f(t) = f_0 + \frac{B}{T_m} t.$$

Le signal étant T_m -périodique, le graphe de $f(t)$ est une fonction en dents de scie :



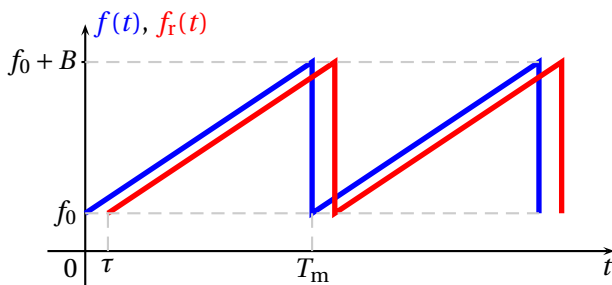
Q6. Le signal met la durée τ à faire un aller-retour émetteur-récepteur-émetteur, c'est-à-dire à parcourir la distance $2d$, à la célérité c , d'où

$$\tau = \frac{2d}{c}.$$

On calcule $\tau = \frac{2 \times 10 \times 10^3}{3 \times 10^8}$ soit $\tau = 6,7 \times 10^{-5} \text{ s}$.

Comme T_m est de l'ordre de 0,1 s, on a bien $\tau \ll T_m$.

Tracé en prenant $\tau = T_m/10$ par souci de lisibilité :



Q7. D'après l'étude de la détection synchrone, la fréquence du signal démodulé est $f_d = |f_r(t) - f(t)|$, soit comme $f(t) > f_r(t)$ d'après le graphe précédent

$$\begin{aligned} f_d &= f(t) - f_r(t) = f(t) - f(t - \tau) \\ &= \left(f_0 + \frac{Bt}{T_m} \right) - \left(f_0 + \frac{B(t - \tau)}{T_m} \right) \end{aligned}$$

soit

$$f_d = \frac{B\tau}{T_m}.$$

On en déduit

$$d = c T_m \frac{f_d}{2B}.$$

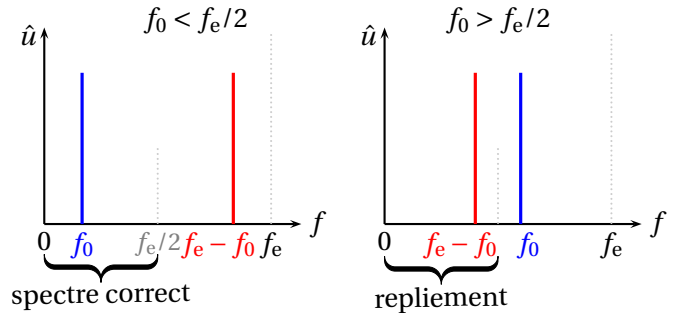
La mesure de f_d permet de remonter à la distance d , les autres grandeurs étant connues.

3 — Analyse spectrale par TFD

Q8. L'échantillonnage avec une fréquence d'échantillonnage $f_e = 1/T_e$ d'un signal comportant une composante harmonique à la fréquence f fait apparaître deux composantes aux fréquences f et $f_e - f$.

La partie exploitable du spectre est $[0, f_e/2]$. Si $f > f_e/2$, il apparaît dans $[0, f_e/2]$ la fréquence $f_r - f$ « repliée », absente du spectre du signal initial.

Exemple en échantillonnant un signal sinusoïdal de fréquence f_0 :



Pour s'en prémunir, deux solutions :

- augmenter la fréquence d'échantillonnage telle que $f_e > 2f_{\max}$;
- appliquer un filtre passe-bas avant échantillonnage pour supprimer les fréquences supérieures à $f_e/2$.

Q9. Sur les spectres, les pics sont séparés de δf .

Sur le spectre de gauche, on lit $\delta f = \frac{50}{10}$ soit $\delta f = 5 \text{ Hz}$: c'est suffisant pour séparer les fréquences f_1 et f_2 distantes de 10 Hz.

Sur le spectre de gauche, on lit $\delta f = \frac{100}{5}$ soit $\delta f = 20 \text{ Hz}$: c'est insuffisant pour séparer les fréquences f_1 et f_2 distantes de 10 Hz.

L'intervalle de fréquence $[0, F_e]$ étant divisé en N_e intervalles, on a $\delta f = F_e/N_e$, soit

$$\delta f = \frac{1}{NT_e}.$$

Pour le spectre de gauche, on calcule $\delta f = 5 \text{ Hz}$.

Pour le spectre de droite, on calcule $\delta f = 20 \text{ Hz}$.

1 Limite et résolution en vitesse

Q10. On fait une acquisition sur chaque rampe ; la période d'échantillonnage est donc T_m , et la fréquence d'échantillonnage $f_e = 1/T_m$.

D'après le critère de Shannon, on peut accéder à

$$(f_r - f)_{\max} = \frac{1}{2T_m} = 1,91 \text{ Hz}.$$

Avec $f_r - f = \pm f_B + f_D = \frac{1}{2T_m}$, la valeur maximale de f_D atteignable est

$$f_{D,\max} = \frac{1}{2T_m} + f_B.$$

On calcule $f_{D,\max} = 2,47 \text{ Hz}$.

Avec la relation donnée, on en déduit

$$\nu_{x,\max} = \frac{cf_{D,\max}}{2f}$$

soit $\nu_{x,\max} = 12,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Q11. La résolution spectrale est reliée à la durée totale d'acquisition $T_a = NT_m$ selon

$$\delta f = \frac{1}{NT_m} .$$

On calcule $\delta f = 9 \times 10^{-4} \text{ Hz}$.

En différenciant la relation

$$\nu_x = \frac{cf_D}{2f}$$

par rapport à ν_x (déterminé) et f_D (mesuré) on obtient

$$d\nu_x = \frac{c}{2f} df_D .$$

La résolution est donc

$$\Delta \nu_x = \frac{c}{2f} \delta f .$$

On calcule $\Delta \nu_x = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 29,85 \times 10^6} \frac{1}{4096 \times 0,262}$ soit

$$\Delta \nu_x = 5 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} .$$

2 Limite et résolution en distance

Q12. La période d'échantillonnage est $T_e = \frac{T_m}{M}$ et la fréquence d'échantillonnage est donc $f_e = \frac{M}{T_m}$. D'après le critère de Shannon, la fréquence maximale accessible est donc

$$f_{d,\max} = \frac{M}{2T_m} .$$

Avec la relation $d = \frac{cT_m f_d}{2B}$ établie à la question **Q7**, on en déduit

$$d_{\max} = \frac{cT_m}{2B} f_{d,\max} = \frac{cM}{4B} ,$$

soit

$$M = \frac{4Bd_{\max}}{c} = \frac{4 \times 125 \times 10^3 \times 50 \times 10^3}{3 \times 10^8} \approx 84 .$$

On peut prendre $M = 84$.

Q13. La résolution spectrale pour une acquisition de durée T_m est

$$\delta f_d = \frac{1}{T_m} .$$

On en déduit

$$\Delta d = \frac{cT_m}{2B} \delta f_d = \frac{cT_m}{2B} \frac{1}{T_m}$$

soit

$$\Delta d = \frac{c}{4B} .$$

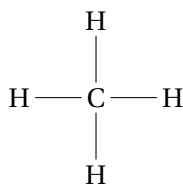
On calcule $\Delta d = 1,2 \text{ km}$.

On retrouve la valeur maximale donnée par le constructeur.

Partie IV – Origine du *Blue Fire* (Centrale TSI 2025)

1 — Gaz naturel

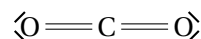
Q1. Le carbone est tétravalent (configuration électronique $1s^2 2s^2 2p^2$ avec 4 électrons de valence). L'hydrogène est monovalent. On en déduit le schéma de Lewis de CH_4 :



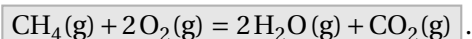
L'azote est trivalent (configuration électronique $1s^2 2s^2 2p^3$ avec 5 électrons de valence dont un doublet non liant). On en déduit le schéma de Lewis de N_2 :



L'oxygène est divalent (configuration électronique $1s^2 2s^2 2p^4$ avec 6 électrons de valence dont deux doublets non liants). On en déduit le schéma de Lewis de CO_2 :



Q2. La combustion du méthane est modélisée par le bilan



Q3. On calcule

$$\begin{aligned} \Delta_r H^\circ &= 2\Delta_f H^\circ(\text{H}_2\text{O}(\text{g})) + \Delta_f H^\circ(\text{CO}_2(\text{g})) - \Delta_f H^\circ(\text{CH}_4(\text{g})) \\ &\quad - 2\Delta_f H^\circ(\text{O}_2(\text{g})) \\ &= 2 \times (-241,8) - 393,5 + 74,6 \end{aligned}$$

soit $\Delta_r H^\circ = -802,5 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$.

On a $\Delta_r H^\circ < 0$: la réaction est **exothermique**.

Q4. Un volume V de méthane pur correspond à une quantité

$$n = \frac{PV}{RT}$$

d'après l'équation d'état du gaz parfait.

La variation d'enthalpie du milieu réaction due à la combustion de n moles de CH_4 est donc donnée par

$$\Delta H = n\Delta_r H^\circ = \frac{PV}{RT}\Delta_r H^\circ.$$

L'énergie thermique libérée (donc cédée à l'extérieur) est $-\Delta H$, soit

$$\text{PCI} = -\frac{PV}{RT}\Delta_r H^\circ.$$

On calcule

$$\text{PCI} = \frac{1,013 \times 10^5 \times 1}{8,314 \times 273} \times 802,5 \times 10^3$$

soit $\text{PCI} = 35,8 \text{ MJ}$.

Avec la conversion $1 \text{ kWh} = 10^3 \times 3000 = 3,6 \times 10^6 \text{ J}$ on obtient $\text{PCI} = 9,95 \text{ kWh} \cdot \text{m}^{-3}$.

Cette valeur est en accord avec l'encadrement proposé de la valeur commerciale.

Q5. La France consomme un volume $V = 33,9 \times 10^9 \text{ m}^3$ de méthane, soit une quantité

$$n = \frac{PV}{RT} = \frac{1,013 \times 10^5 \times 33,9 \times 10^9}{8,314 \times 273} = 1,51 \times 10^{12} \text{ mol},$$

formant la même quantité de CO_2 . La masse de CO_2 formée vaut donc

$$m_{\text{CO}_2} = nM(\text{CO}_2) = \frac{1,013 \times 10^5 \times 33,9 \times 10^9}{8,314 \times 273} \times 44 \times 10^{-3} = 66,6 \times 10^9 \text{ kg}$$

soit 66,6 millions de tonnes. Rapportée à l'emprunte carbone nationale, la consommation de gaz naturel représente donc 10% .

Q6. Considérons la combustion de n moles de CH_4 . Les réactifs étant pris en proportions stœchiométriques, on a $2n$ moles de O_2 , et donc $8n$ moles de N_2 .

En fin de réaction totale, on a formé $2n$ moles de H_2O et n moles de CO_2 .

Le réacteur étant adiabatique, la variation d'enthalpie du mélange réaction entre le début et la fin de la réaction est

$$\Delta H = 0.$$

Décomposons la transformation par un chemin fictif :

1^{re} étape : réaction isotherme à 293 K. La variation d'enthalpie du mélange est

$$\Delta H_1 = n\Delta_r H^\circ.$$

2^e étape : variation de température du mélange de fin de réaction (produits et diazote initialement présent) de $T_i = 293 \text{ K}$ à T_f . La variation d'enthalpie du mélange est

$$\Delta H_2 = C(T_f - T_i)$$

avec

$$C = 2nC_{p,m}(\text{H}_2\text{O}) + nC_{p,m}(\text{CO}_2) + 8nC_{p,m}(\text{N}_2).$$

L'enthalpie étant une fonction d'état, on a

$$\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2$$

soit

$$n\Delta_r H^\circ + [2nC_{p,m}(\text{H}_2\text{O}) + nC_{p,m}(\text{CO}_2) + 8nC_{p,m}(\text{N}_2)](T_f - T_i) = 0$$

d'où

$$T_f = T_i - \frac{\Delta_r H^\circ}{2C_{p,m}(\text{H}_2\text{O}) + C_{p,m}(\text{CO}_2) + 8C_{p,m}(\text{N}_2)}.$$

On calcule

$$T_f = 293 + \frac{802,5 \times 10^3}{2 \times 37,6 + 45,4 + 8 \times 30,1}$$

soit $T_f = 2514 \text{ K} = 2241 \text{ }^\circ\text{C}$.

2 — Le Power to Gaz

Q7. On calcule $\Delta_r H^\circ = -74,6 + 2 \times (-241,8) - (-393,5)$ soit

$$\Delta_r H^\circ = -164,7 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1},$$

ainsi que $\Delta_r S^\circ = 186,3 + 2 \times 188,8 - 213,8 - 4 \times 130,7$ soit

$$\Delta_r S^\circ = -172,7 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

Q8. On a

$$\Delta_r G^\circ = -RT \ln K^\circ = \Delta_r H^\circ - T\Delta_r S^\circ$$

d'où

$$K^\circ = \exp\left(-\frac{\Delta_r H^\circ}{RT} + \frac{\Delta_r S^\circ}{R}\right).$$

On calcule

$$K^\circ = \exp\left(\frac{164,7 \times 10^3}{8,314 \times 673} - \frac{172,7}{8,314}\right)$$

soit $K^\circ = 5786$.

On a $K^\circ \gg 1$ ($K^\circ > 10^3$) : on peut considérer la réaction comme **quantitative**.

Q9. Comme $\Delta_r H^\circ < 0$, on a d'après la loi de van't Hoff

$$\frac{d \ln K^\circ}{dT} < 0.$$

La constante d'équilibre est fonction décroissante de la température. Une augmentation de température défavorise donc le rendement de cette réaction.

D'un point de vue thermodynamique, il faut opérer à basse température pour améliorer le rendement, mais la vitesse de la réaction sera plus lente. Il faut donc faire un compromis entre le rendement (température basse) et la cinétique de la réaction (température élevée).