TD phénomènes de transport — Mathématiques & physique — solution

1 — Calcul de gradient et de divergence

1. On calcule

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} \vec{e}_x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} \vec{e}_y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} \vec{e}_z .$$

1.a)

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = 2x\vec{e}_x + 3y^2\vec{e}_y + 4z^3\vec{e}_z .$$

1.b)

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = 2xy^3z^4\vec{e}_x + 3x^2y^2z^4\vec{e}_y + 4x^2y^3z^3\vec{e}_z .$$

1.c)

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \mathrm{e}^x \sin y \ln z\, \vec{e}_x + \mathrm{e}^x \cos y \ln z\, \vec{e}_y + \frac{\mathrm{e}^x \sin y}{z} \vec{e}_z .$$

$f(x,y,z) = \mathrm{e}^x \sin y \ln z$.

2. On calcule en cartérsiennes

$$\text{div}\, \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} y, z + \frac{\partial A_y}{\partial y} x, z + \frac{\partial A_z}{\partial z} x, y .$$

2.a)

$$\text{div}\, \vec{A} = 1 + 1 = 2 .$$

2.b)

$$\text{div}\, \vec{A} = 0 + 0 = 0 .$$

2.c) On calcule $\text{div}\, \vec{A} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}(rA_r)}{\mathrm{d}r}$ en coordonnées cylindriques pour un champ radial dont la composante ne dépend que de r.

$$\text{div}\, \vec{A} = \frac{A_0}{r}\left(1 - 3\frac{r^2}{a^2}\right) = A_0\left(\frac{1}{r} - 3\frac{r}{a^2}\right) .$$

2.d) On calcule $\text{div}\, \vec{E} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}(r^2E_r)}{\mathrm{d}r}$ en coordonnées cylindriques pour un champ radial dont la composante ne dépend que de r.

$$\text{div}\, \vec{E} = 0 .$$

3. On calcule $\Delta G = \left(\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)_{y,z} + \left(\dfrac{\partial^2 G}{\partial y^2}\right)_{x,z} + \left(\dfrac{\partial^2 G}{\partial z^2}\right)_{x,y}$.

3.a)

$$\Delta G = 2 .$$

3.b)

$$\begin{aligned}\Delta G &= -\sin x \sin y \sin z - \sin x \sin y \sin z - \sin x \sin y \sin z \\ &= -3 \sin x \sin y \sin z .\end{aligned}$$

3.c)

$$\begin{aligned}\Delta G &= 5^2\,\mathrm{e}^{-5x} \sin(4y)\cos(3z) - 4^2\,\mathrm{e}^{-5x}\sin(4y)\cos(3z) \\ &\quad - 3^2\,\mathrm{e}^{-5x}\sin(4y)\cos(3z) = 0 .\end{aligned}$$

2 — Le gradient

1. En coordonnées cartésiennes, le déplacement élémentaire s'écrit

$$\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}x\,\vec{e}_x + \mathrm{d}y\,\vec{e}_y + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z .$$

On a donc

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, G \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = A_x\,\mathrm{d}x + A_y\,\mathrm{d}y + A_z\,\mathrm{d}z . \tag{1}$$

La différentielle de $G(x,y,z)$ s'écrit

$$\mathrm{d}G = \frac{\partial G}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial G}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial G}{\partial z}\mathrm{d}z . \tag{2}$$

En identifiant (1) et (2) on obtient

$$A_x = \frac{\partial G}{\partial x}\,; \quad A_y = \frac{\partial G}{\partial y} \quad \text{et} \quad A_z = \frac{\partial G}{\partial z},$$

d'où l'expression du gradient

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, G = \frac{\partial G}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial G}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial G}{\partial z}\vec{e}_z .$$

2. En coordonnées cylindriques, le déplacement élémentaire s'écrit

$$\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z .$$

On a donc

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, G \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = A_r\,\mathrm{d}r + A_\theta r\,\mathrm{d}theta + A_z\,\mathrm{d}z . \tag{3}$$

La différentielle de $G(r,\theta,z)$ s'écrit

$$\mathrm{d}G = \frac{\partial G}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial G}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta + \frac{\partial G}{\partial z}\mathrm{d}z . \tag{4}$$

En identifiant (3) et (4) on obtient

$$A_r = \frac{\partial G}{\partial r}\,; \quad rA_\theta = \frac{\partial G}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad A_z = \frac{\partial G}{\partial z},$$

d'où l'expression du gradient

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, G = \frac{\partial G}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial G}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial G}{\partial z}\vec{e}_z .$$

3. En coordonnées sphériques, le déplacement élémentaire s'écrit

$$\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_\varphi .$$

On a donc

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, G \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = A_r\,\mathrm{d}r + A_\theta r\,\mathrm{d}theta + A_\varphi r \sin\theta\,\mathrm{d}\varphi . \tag{5}$$

La différentielle de $G(r,\theta,\varphi)$ s'écrit

$$\mathrm{d}G = \frac{\partial G}{\partial r}\,\mathrm{d}r + \frac{\partial G}{\partial \theta}\,\mathrm{d}\theta + \frac{\partial G}{\partial \varphi}\,\mathrm{d}\varphi\,. \qquad (6)$$

En identifiant (5) et (6) on obtient

$$A_r = \frac{\partial G}{\partial r}\,; \quad r\,A_\theta = \frac{\partial G}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad r\sin\theta = \frac{\partial G}{\partial \varphi}\,,$$

d'où l'expression du gradient

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,G = \frac{\partial G}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial G}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial G}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi\,.$$

---

3 — Gradient et force conservative

1. La circulation élémentaire $\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}$ représente le travail élémentaire de la force $\vec{F}$.

Cette grandeur est une forme différentielle, mais n'est *a priori* pas une différentielle : on la note donc δW.

➤ Du point de vue du physique, cette grandeur est la *petite quantité* d'énergie cédée par la force au cours du déplacement, d'où la notation « δ ».

2.a) On a

$$\delta W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}\,.$$

Par définition du gradient, on a

$$\mathrm{d}\mathcal{E}_\mathrm{p} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathcal{E}_\mathrm{p}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}\,.$$

Par identification, on en déduit

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathcal{E}_\mathrm{p}\,.$$

2.b) Le travail $W_{A\to B}(\vec{F})$ entre deux points A et B s'écrit alors

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B \delta W = \int_A^B \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = -\int_A^B \mathrm{d}\mathcal{E}_\mathrm{p}$$

soit

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \mathcal{E}_\mathrm{p}(A) - \mathcal{E}_\mathrm{p}(B)\,,$$

indépendant du chemin suivi.

2.c) Le long d'un contour, les points de départ et d'arrivée sont identiques, d'où

$$W = \oint_{M\in\Gamma} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathcal{E}_\mathrm{p}(A) - \mathcal{E}_\mathrm{p}(A) = 0\,.$$

Une force conservative ne travaille pas le long d'un contour.

---

4 — Potentiel de Yukawa

Le potentiel de Yukawa s'écrit en coordonnées sphériques sous la forme

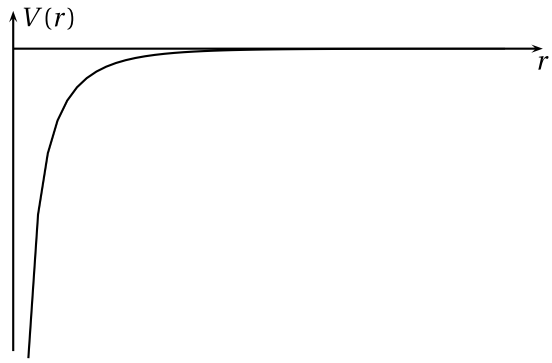
$$V(r) = -g^2\frac{\mathrm{e}^{-mr}}{r}$$

où g et m sont deux constantes positives.

1. On a

$$\lim_{r\to 0} V(r) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{r\to\infty} V(r) = 0\,.$$

De plus $V(R) < 0$, $\forall r$.



2. Le champ de force associé est donné par

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r = -g^2\,\mathrm{e}^{-mr}\left(-\frac{m}{r} - \frac{1}{r^2}\right)\vec{e}_r$$

soit

$$\vec{F} = \frac{mg^2}{r}\,\mathrm{e}^{-mr}\left(1 + \frac{1}{mr}\right)\vec{e}_r\,.$$

---

5 — La divergence

Considérons le cube de côtés $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}z$, de volume $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

Le flux *sortant* de $\vec{A}$ à travers les faces perpendiculaires à $\vec{e}_x$ situées en x et en $x+\mathrm{d}x$ fait intervenir la composante A_x de $\vec{A}$ normale à ces faces et s'écrit

$$\begin{aligned}\delta\Phi_x &= -A_x(x,y,z,t)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + A_x(x+\mathrm{d}x,y,z,t)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.\end{aligned}$$

De même en considérant les faces perpendiculaires à $\vec{e}_y$ situées en y et $y+\mathrm{d}y$:

$$\begin{aligned}\delta\Phi_y &= -A_y(x,y,z,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + A_y(x,y+\mathrm{d}y,z,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\\ &= \frac{\partial A_y}{\partial y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,.\end{aligned}$$

En considérant les faces perpendiculaires à $\vec{e}_z$ situées en z et $z+\mathrm{d}z$:

$$\begin{aligned}\delta\Phi_z &= -A_z(x,y,z,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + A_z(x,y,z+\mathrm{d}z,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \frac{\partial A_z}{\partial z}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.\end{aligned}$$

Finalement, le flux sortant total s'écrit

$$\delta\Phi = \frac{\partial A_x}{\partial x}\,\mathrm{d}\tau + \frac{\partial A_y}{\partial y}\,\mathrm{d}\tau + \frac{\partial A_z}{\partial z}\,\mathrm{d}\tau\,.$$

En identifiant avec

$$\delta\Phi(t) = \mathrm{div}\,\vec{A}(M,t)\,\mathrm{d}\tau$$

on obtient l'expression de la divergence en cartésiennes :

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\,.$$

---

6 — Une colline

1. La variation de la hauteur pour un déplacement élémentaire de dx selon Ox et dy selon Oy est donné par la différentielle

$$\mathrm{d}h = \frac{\partial h}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial h}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

soit

$$\mathrm{d}h = 10(2y-6x-18)\,\mathrm{d}x + 10(2x-8y+28)\,\mathrm{d}y\,.$$

Le sommet de la colline correspond à l'extremum de $h(x,y)$, soit d$h = 0$. On détermine donc sa position en résolvant le système

$$\begin{cases} -6x+2y-18=0 \\ 2x-8y+28=0 \end{cases}$$

On obtient

$$x = -2\text{ km} \quad \text{et} \quad y = 3\text{ km}\,.$$

2. L'altitude de la colline vaut alors $H = h(-2,3)$, soit $H = 720$ m.

3. On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,h &= \frac{\partial h}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial h}{\partial y}\vec{e}_y \\ &= 10(2y-6x-18)\,\vec{e}_x + 10(2x-8y+28)\,\vec{e}_y\end{aligned}$$

Au point $x_0 = 1$ km, $y_0 = 1$ km, on calcule

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,h(x_0,y_0) = -220\,\vec{e}_x + 220\,\vec{e}_y\,.$$

La pente est donnée par

$$\|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,h\| = \sqrt{220^2+220^2} = \sqrt{2\times 220^2} = 220\sqrt{2}$$

soit $\|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,h\| = 311\ \mathrm{m\cdot km^{-1}}$.

On a une pente de $311\ \mathrm{m/km^{-1}}$ au point (x_0,y_0).

La pente est la plus raide dans la direction du gradient, soit $\vec{u} = -\vec{e}_x + \vec{e}_y$: c'est la direction nord-ouest.

---

7 — Retour vers le futur

On a

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t'} = -\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t'^2} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\,.$$

1. L'équation

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x(t) = 0$$

devient alors

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t'^2} + \omega_0^2 x(t') = 0\,.$$

Elle est invariante par renversement du temps.

L'équation

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x(t) = 0$$

devient

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t'^2} - \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t'} + \omega_0^2 x(t') = 0\,.$$

Elle n'est pas invariante par renversement du temps.

2. La première équation est celle de l'oscillateur harmonique. Elle décrit l'évolution d'un système conservatif (par exemple un point matériel soumis à la force conservation $\vec{F} = -kx\vec{e}_x$). En l'absence de phénomène dissipatif, l'évolution d'un tel système est réversible.

La seconde équation est celle d'un oscillateur linéaire **amorti**. L'évolution est donc irréversible (présence de phénomène dissipatif). Le renversement du temps décrit alors un oscillateur linéaire amplifié.