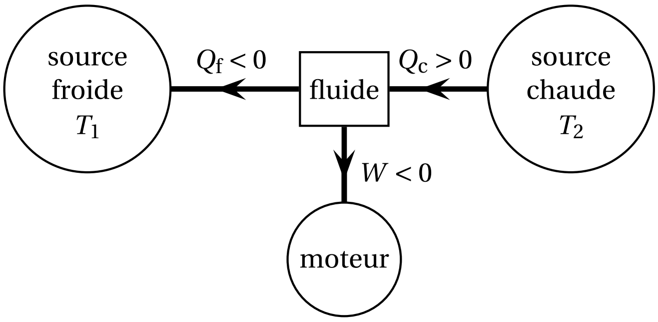
TD de thermodynamique — Formulation infinitésimale des principes — solution

1 — Machine thermique avec pseudo-sources

1. Représentons schématiquemnt le fonctionnement du dispositif, en y indiquant le sens réel des échanges énergétiques :



Le système étudié est le fluide de la machine frigorifique, qui subit une évolution cyclique (en circuit fermé).

On compte positivement les énergies reçues effectivement par le fluide : on a $Q_1 < 0$, $Q_2 > 0$ et $W < 0$.

La source chaude cédant de l'énergie au fluide, elle voit sont énergie interne diminuer, donc (il n'y a pas de changement d'état en son sein) sa température diminue.

La source froide recevant de l'énergie de la part du fluide, elle voit sont énergie interne augmenter, donc (il n'y a pas de changement d'état en son sein) sa température augmente.

On s'attend à ce que le moteur cesse de fonctionner quand les températures des deux sources seront égales.

2. Pour le cycle considéré, l'égalité de Clausius s'écrit

$$\frac{\delta Q_f}{T_1} + \frac{\delta Q_c}{T_2} = 0\,.$$

Lorsque la température de la source froide varie de $\mathrm{d}T_1$, le premier principe appliqué à cette source s'écrit

$$\mathrm{d}U_1 = C\,\mathrm{d}T_1 = \delta Q_1\,,$$

où δQ_1 est le transfert thermique reçu (algébriquement) par la source de la part du fluide. Réciproquement, le transfert thermique reçu par le fluide de la part de la source vaut $\delta Q_f = -\delta Q_1$, soit $\delta Q_f = -C\,\mathrm{d}T_1$.

De même le bilan d'énergie $\mathrm{d}U_2 = C\,\mathrm{d}T_2 = \delta Q_2$ appliqué à la source chaude conduit au transfert thermique reçu par le fluide de la part de cette source : $\delta Q_c = -C\,\mathrm{d}T_2$.

L'égalité de Clausius s'écrit alors

$$\frac{-C\,\mathrm{d}T_1}{T_1} + \frac{-C\,\mathrm{d}T_2}{T_2} = 0\,,$$

soit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}T_1}{T_1} + \frac{\mathrm{d}T_2}{T_2} = 0}\,.$$

Intégrons entre l'état initial, où les températures des deux sources valent $T_{1,0}$ et $T_{2,0}$, et l'état final où les sources ont la même température T_∞ :

$$\int_{T_{1,0}}^{T_\infty} \frac{\mathrm{d}T_1}{T_1} + \int_{T_{2,0}}^{T_\infty} \frac{\mathrm{d}T_2}{T_2} = 0\,,$$

soit

$$\ln\left(\frac{T_\infty}{T_{1,0}}\right) + \ln\left(\frac{T_\infty}{T_{2,0}}\right) = \ln\left(\frac{T_\infty^2}{T_{1,0}T_{2,0}}\right) = 0$$

soit $\dfrac{T_\infty^2}{T_{1,0}T_{2,0}} = 1$, d'où $\boxed{T_\infty = \sqrt{T_{1,0}T_{2,0}}}$.

On calcule $\boxed{T_\infty = 52\ °\mathrm{C}}$.

Le moteur s'arrête alors de fonctionnement.

3. Les transferts thermiques reçu par le fluide pendant toute la durée de fonctionnement du moteur sont

$$Q_1 = -C(T_\infty - T_{1,0}) \quad \text{et} \quad Q_2 = -C(T_\infty - T_{2,0})\,.$$

Le travail échangé est donné par le premier principe : $0 = W + Q_1 + Q_2$, d'où

$$\boxed{W = C\left[2\sqrt{T_{1,0}T_{2,0}} - T_{1,0} - T_{2,0}\right]}\,.$$

On calcule $\boxed{W = -2{,}5 \times 10^6\ \mathrm{J}}$.

4. Le rendement est défini par

$$\eta = \frac{-W}{Q_2} = \frac{T_{1,0} + T_{2,0} - 2\sqrt{T_{1,0}T_{2,0}}}{T_{2,0} - \sqrt{T_{1,0}T_{2,0}}}\,.$$

On calcule $\boxed{\eta = 13\ \%}$.

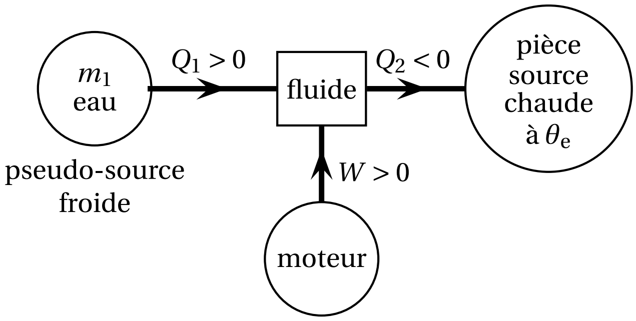
Le rendement du cycle de Carnot utilisant deux sources de températures $T_{1,0}$ et $T_{2,0}$ est donné par

$$\eta = 1 - \frac{T_{1,0}}{T_{2,0}} = 24\ \%\,.$$

La valeur finie de la capacité thermique des sources, en plus de limiter la durée de fonctionnement du moteur, diminue significativement son rendement.

2 — Congélation d'une masse d'eau

Représentons schématiquement le fonctionnement du dispositif, en y indiquant le sens réel des échanges énergétiques :



Le système étudié est le fluide de la machine frigorifique, qui subit une évolution cyclique (en circuit fermé).
On compte positivement les énergies reçues effectivement par le fluide : on a $Q_1 > 0$, $Q_2 < 0$ et $W > 0$.
La transformation totale est cyclique (constituée d'un grand nombre de cycles) ; le premier principe s'écrit donc

$$\Delta U = Q_1 + Q_2 + W = 0\,.$$

On peut calculer directement Q_1, en calculant le transfert thermique $-Q_1 = \Delta U = \Delta H$ reçu par la masse m_1 d'eau [1].
La transformation subie par l'eau se décompose en trois étapes :

1re étape : refroidissement de θ_1 à θ_{fus}, avec $\Delta H' = mc_1(\theta_{\text{fus}} - \theta_1)$

2e étape : solidification isotherme à θ_{fus}, avec $\Delta H'' = -mL_{\text{fus}}$;

3e étape : refroidissement de θ_{fus} à θ_2, avec $\Delta H''' = mc_2(\theta_2 - \theta_{\text{fus}})$.

La variation de l'enthalpie de l'eau est donc

$$\Delta H = \Delta H' + \Delta H'' + \Delta H''' = -Q_1\,,$$

d'où

$$\boxed{Q_1 = -mc_1(\theta_{\text{fus}} - \theta_1) + mL_{\text{fus}} - mc_2(\theta_2 - \theta_{\text{fus}})}\,.$$

On calcule numériquement $\boxed{Q_1 = 439\ \text{kJ}}$.
La masse m_1 joue ici le rôle d'une pseudo-source de chaleur. On ne peut donc appliquer l'égalité de Clausius sans précaution, car sa température varie au cours du fonctionnement du congélateur. Il faut raisonner sur un « cycle élémentaire », c'est-à-dire un cycle unique du fluide (il fait une tour dans les tuyaux). En effet, quand le fluide ne parcours qu'un seul cycle dans la machine, la variation de température de la masse m_1 d'eau est négligeable ; on peut la considérer comme constante, et la masse d'eau se comporte alors comme une source de chaleur. Le second principe s'écrit alors sous la forme de l'égalité de Clausius [2]

$$\frac{\delta Q_2}{T_e} + \frac{\delta Q_1}{T} = 0\,,$$

où T est la température de la masse d'eau. Attention, il faut ici passer aux températures absolues en kelvin.
On intègre cette relation sur la transformation totale (refroidissement et congélation de la masse d'eau), en distinguant 3 étapes pour la transformation de l'eau :

entre T_1 et T_{fus} : refroidissement, pour lequel $\delta Q_1 = -mc_1\,\mathrm{d}T$ quand la température varie de $\mathrm{d}T$;

à T_{fus} : solidification pour laquelle le transfert thermique total vaut mL_{fus} ;

entre T_{fus} et T_2 : refroidissement, pour lequel $\delta Q_1 = -mc_2\,\mathrm{d}T$ quand la température varie de $\mathrm{d}T$.

L'intégration de l'égalité de Clausius pour la totalité de la transformation s'écrit alors

$$\frac{Q_2}{T_e} + \int_{T_1}^{T_{\text{fus}}} -mc_1\frac{\mathrm{d}T}{T} + \frac{mL_{\text{fus}}}{T_{\text{fus}}} + \int_{T_{\text{fus}}}^{T_2} -mc_2\frac{\mathrm{d}T}{T} = 0\,,$$

soit

$$\frac{Q_2}{T_e} - mc_1\ln\left(\frac{T_{\text{fus}}}{T_1}\right) + \frac{mL_{\text{fus}}}{T_f} - mc_2\ln\left(\frac{T_2}{T_{\text{fus}}}\right) = 0\,.$$

On en déduit

$$\boxed{Q_2 = mT_e\left[c_1\ln\left(\frac{T_{\text{fus}}}{T_1}\right) + c_2\ln\left(\frac{T_2}{T_{\text{fus}}}\right) - \frac{L_{\text{fus}}}{T_{\text{fus}}}\right]}\,.$$

On calcule $\boxed{Q_2 = -477\ \text{kJ}}$.
Le premier principe nous permet de calculer le travail reçu par le fluide :

$$W = -Q_1 - Q_2 = 37{,}5\ \text{kJ}\,.$$

La puissance fournie par le moteur est donnée par $P = \dfrac{W}{\tau}$, d'ou $\tau = \dfrac{W}{P} = \dfrac{37\,500}{50}$. On obtient

$$\boxed{\tau = 750\ \text{s} = 12{,}5\ \text{min}}\,.$$

Discussion : Il s'agit en réalité de la durée minimale, calculée dans le cas idéal d'un fonctionnement réversible. La durée réelle sera plus grande.

3 — Pompe à chaleur

1. La source froide est ici un vrai thermostat (la température de l'atmosphère extérieure ne varie pas lors du fonctionnement de la pompe à chaleur).

La source chaude, représentée par la masse d'eau à chauffer, a une capacité thermique C finie, et n'est donc pas un thermostat : sa température varie lors du fonctionnement (c'est d'ailleurs le but, on cherche à élever sa température!). Un volume de $1\ \text{m}^3$ d'eau ayant une masse d'une tonne, on a $C = 1000c$.

On raisonne sur *un* cycle du fluide dans la pompe, considéré comme ditherme (T_1 reste quasi-constante sur un cycle).

1. Pour une phase condensée idéale, on assimile $\Delta U \approx \Delta H$.
2. Il s'agit bien d'une égalité car on précise que le fonctionnement est réversible.

L'égalité de Clausius s'écrit alors

$$\frac{\delta Q_1}{T_1}+\frac{\delta Q_2}{T_2}=0\,.$$

Le transfert thermique reçu par le fluide de la part de l'eau s'écrit $\delta Q_1=-C_1\,\mathrm{d}T_1$, d'où

$$-C_1\frac{\mathrm{d}T_1}{T_1}+\frac{\delta Q_2}{T_2}=0\,.$$

La température T_2 étant constante, l'intégration entre l'état initial et l'état final où la température de l'eau est $T_{1\mathrm{f}}$ s'écrit

$$-C_1\ln\left(\frac{T_{1\mathrm{f}}}{T_1}\right)+\frac{Q_2}{T_2}=0\,.$$

On a donc

$$Q_2=C_1T_2\ln\left(\frac{T_{1\mathrm{f}}}{T_1}\right)=156\ \mathrm{MJ}\,.$$

Le transfert thermique reçu par le fluide de la part de l'eau est donné par

$$Q_1=-C_1(T_{1\mathrm{f}}-T_1)=-167\ \mathrm{MJ}\,.$$

D'après le premier principe $0=W+Q_1+Q_2$, on en déduit le travail reçu

$$\boxed{W=-Q_2-Q_1=10{,}9\ \mathrm{MJ}}\,.$$

2. L'efficacité de la pompe est définie par $\eta=\dfrac{-Q_1}{W}$. On calcule $\boxed{\eta=15{,}3}$.

4 — Moteur

1. La température est uniforme lorsque le système $S_1\cup S_2$ est à l'équilibre ; les deux systèmes atteignent donc la même température finale T_f.

Le système étant isolé (c'est implicite dans l'énoncé...), son énergie est conservée. Le bilan entre l'état initial et l'état final s'écrit donc

$$C_1(T_\mathrm{f}-T_{01})+C_2(T_\mathrm{f}-T_{02})=0$$

d'où

$$\boxed{T_\mathrm{f}=\frac{C_1T_{01}+C_2T_{02}}{C_1+C_2}}\,.$$

L'entropie d'une phase condensée s'écrit

$$S(T)=S^\circ+C\ln\left(\frac{T}{T^\circ}\right)\,.$$

L'entropie étant extensive, sa variation pour le système $S_1\cup S_2$ vaut donc

$$\boxed{\Delta S=C_1\ln\left(\frac{T_\mathrm{f}}{T_{01}}\right)+C_2\ln\left(\frac{T_\mathrm{f}}{T_{02}}\right)}\,.$$

Le système étant isolé, on a $S_\text{reçu}=0$, et le bilan d'entropie s'écrit

$$\Delta S=S_\text{créé}\,.$$

Pour $S_\text{créé}>0$ pour cette évolution irréversible, on en déduit $\boxed{\Delta S>0}$.

2. Le système est le fluide subissant une évolution dans le moteur. Cette évolution n'est pas rigoureusement cyclique (les températures des « sources » que sont les solides varient, cependant en considérant *un* cycle, on peut considérer que l'évolution est cyclique ditherme (les températures des solides restent quasi-constantes).

Sur un tel cycle « élémentaire », le premier principe s'écrit

$$\mathrm{d}U=\delta W+\delta Q_1+\delta Q_2$$

soit en intégrant sur toute l'évolution

$$\Delta U=W+Q_1+Q_2\,.$$

En supposant la limite d'une évolution réversible, l'égalité de Clausius s'écrit

$$\frac{\delta Q_1}{T_1}+\frac{\delta Q_2}{T_2}=0\,.$$

Quand la température du solide S_1 varie de $\mathrm{d}T_1$, le fluide reçoit le transfert thermique

$$\delta Q_1=-C_1\,\mathrm{d}T_1\,.$$

De même, on a $\delta T_2=-C_2\,\mathrm{d}T_2$, et l'égalité de Clausius devient

$$C_1\frac{\mathrm{d}T_1}{T_1}+C_2\frac{\mathrm{d}T_2}{T_2}=0\,.$$

Lorsque l'état d'équilibre final est atteint, la température du système est uniforme, égale à T'_f. Intégrons l'égalité de Clausius entre l'état initial et l'état final :

$$C_1\ln\left(\frac{T'_\mathrm{f}}{T_{01}}\right)+C_2\ln\left(\frac{T'_\mathrm{f}}{T_{02}}\right)=0\,,$$

soit

$$\ln\left(\frac{{T'_\mathrm{f}}^{C_1}\,{T'_\mathrm{f}}^{C_2}}{T_{01}^{C_1}\,T_{02}^{C_2}}\right)=0\,.$$

On en déduit [3]

$$\boxed{T'_\mathrm{f}=T_{01}^{\frac{C_1}{C_1+C_2}}\,T_{02}^{\frac{C_2}{C_1+C_2}}=T_{01}^{\frac{C_1}{C_1+C_2}}\,T_{02}^{\frac{C_2}{C_1+C_2}}}\,.$$

On a $T'_\mathrm{f}\neq T_\mathrm{f}$. On pourrait montrer que $T'_\mathrm{f}<T_\mathrm{f}$, mais le calcul me semble bien lourd dans ce cas général où $C_1\neq C_2$...

Pendant toute l'évolution, le fluide reçoit de la part de S_1 le transfert thermique $Q_1=-C_1(T_\mathrm{f}-T_{01})$ et de la part de S_2 le transfert thermique $Q_2=-C_2(T_\mathrm{f}-T_{02})$.

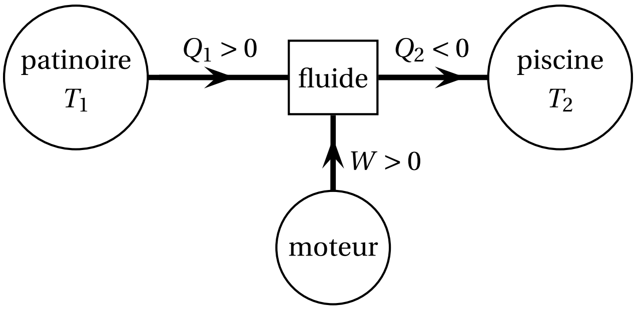
D'après le premier principe le travail fourni donné par $W_\mathrm{u}=-W$ (car W est celui reçu par le fluide) s'écrit

$$\boxed{W_\mathrm{u}=C_1(T_{01}-T_\mathrm{f})+C_2(T_{02}-T_\mathrm{f})}\,.$$

3. Oui, c'est un peu bourrin, mais c'est un oral MP...

6 — Patinoire (bis)

1. Représentons schématiquement le fonctionnement du dispositif, en y indiquant le sens réel des échanges énergétiques :



Le système étudié est le fluide de la machine frigorifique, qui subit une évolution cyclique (en circuit fermé).

On compte positivement les énergies reçues effectivement par le fluide : on a $Q_1 > 0$, $Q_2 < 0$ et $W > 0$: le moteur prélève de l'énergie thermique à la patinoire (reçue par le fluide donc) pour la céder à la piscine.

2. On note T_0 la température initiale commune de l'eau de la piscine et de la patinoire, et $T_{\rm fus}$ la température de fusion de la glace.

L'eau de la patinoire a une masse m_1 ; sa capacité calorifique vaut $C_1' = m_1 c_{\rm eau}$ quand l'eau est liquide et $C_1'' = M_1 c_{\rm glace}$ quand l'eau est solide. Le transfert thermique reçu par le fluide vaut

$$Q_1 = -C_1'(T_{\rm fus} - T_0) + m_1 L_{\rm fus} - C_1''(T_1 - T_{\rm fus})\,.$$

L'eau de la piscine a une masse m_2 ; sa capacité calorifique vaut $C_2 = m_2 c_{\rm eau}$. Le transfert thermique reçu par le fluide vaut

$$Q_2 = -C_2(T_2 - T_0)\,.$$

3. En raisonnant sur un cycle, élémentaire quant aux variations des températures et aux transferts thermiques échangés, l'égalité de Clausius s'écrit

$$\frac{\delta Q'}{T'} + \frac{\delta Q''}{T''} = 0\,,$$

où $\delta Q'$ est le transfert thermique cédé par la patinoire à la température T' et $\delta Q''$ est le transfert thermique cédé par la piscine à la température T''.

Il faut distinguer 3 étapes pour intégrer sur l'ensemble de la transformation : changement de température de T_0 à $T_{\rm fus}$ de l'eau liquide de la patinoire, changement d'état à $T_{\rm fus}$, puis changement de température de $T_{\rm fus}$ à T_1 pour la glace de la patinoire :

$$-C_1' \int_{T_0}^{T_{\rm fus}} \frac{\mathrm{d}T'}{T'} + \frac{m_1 L_{\rm fus}}{T_{\rm fus}} - C_1'' \int_{T_{\rm fus}}^{T_1} \frac{\mathrm{d}T'}{T'} - C_2 \int_{T_0}^{T_2} \frac{\mathrm{d}T''}{T''} = 0\,,$$

soit

$$-C_1' \ln \frac{T_{\rm fus}}{T_0} + \frac{m_1 L_{\rm fus}}{T_{\rm fus}} - C_1'' \ln \frac{T_1}{T_{\rm fus}} - C_2 \ln \frac{T_2}{T_0} = 0$$

On en déduit

$$T_2 = T_0 \exp\left(- \frac{C_1' \ln\left(\frac{T_{\rm fus}}{T_0}\right) - m_1 L_{\rm fus} + C_1'' \ln\left(\frac{T_1}{F_{\rm fus}}\right)}{C_2 T_{\rm fus}} \right).$$

On calcule $T_2 = 297$ K, soit $\boxed{t_2 = 24\ °\mathrm{C}}$.

4. Le premier principe s'écrit

$$\Delta U = Q_1 + Q_2 + W = 0\,.$$

Comme $Q_1 = 8{,}54 \times 10^6$ kJ et $Q_2 = -9{,}18 \times 10^6$ kJ, on calcule

$$W = P\tau = -Q_1 - Q_2 = 6{,}33 \times 10^5\ \mathrm{kJ}\,,$$

d'où $\tau = \frac{W}{P}$; on calcule la durée de fonctionnement $\boxed{\tau = 31{,}6 \times 10^3\ \mathrm{s}}$, soit 8 heures 47 minutes.

5. L'efficacité est définie par

$$\boxed{\eta = \frac{Q_1}{W} = 13{,}5}\,.$$