TD phénomènes de transport — Diffusion thermique — Partie 1

Conduction thermique — cas général

1 — Nombre de Fourier [*]

On définit le nombre de Fourier par

$$\mathrm{Fo} = \frac{a\Delta t}{L^2}$$

où $a = \dfrac{\lambda}{\mu c}$ est la diffusivité thermique, Δt la durée étudiée et L la longueur caractérsitique d'étude.

1. Quelle est la dimension de Fo ?

2. Montrer que l'on peut écrire $\mathrm{Fo} = \dfrac{\Delta t}{\Delta t_c}$ où l'on donnera l'interprétation de la durée Δt_c.
À quelle condition sur Fo peut-on considérer un processus comme adiabatique ?

3. On étudie la compression du mélange {air+carburant} dans le cylindre d'un moteur à 4 temps en acier. Avec un régime moteur d'environ 2000 $\mathrm{tr \cdot min^{-1}}$, la durée de la compression est d'environ $1{,}5 \times 10^{-2}$ s.
Données :
$\lambda_{acier} = 13\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$
$\mu_{acier} = 7800\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$
$c_{acier} = 480\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$
L'hypothèse d'une compression adiabatique habituellement utilisée est-elle valide ?

2 — Métabolisme d'un mammifère [*]

Les mammifères sont des êtres thermorégulés, dits homéothermes (improprement « à sang chaud »), contrairement aux reptiles ou aux poissons, dit poïkilothermes (improprement « à sang froid »). On modélise un mammifère par une sphère de rayon R dont le métabolisme dégage la puissance thermique volumique p_v, uniformément dans tout son volume. L'air extérieur a une conductivité thermique λ, et sa température loin de l'animal est $T_0 = 20$ °C. On s'intéresse à la température de l'air (donc pour $r \geqslant R$) en régime stationnaire. On considère le contact parfait entre l'animal et le milieu extérieur (continuité de la température).

1. Exprimer le flux thermique $\Phi(r)$ à travers une sphère de rayon $r > R$. Que remarque-t-on ?
En déduire l'expression de $j_Q(r)$ en fonction de p_v, R et r.

2. En déduire l'expression de la température $T(r)$ pour $r \geqslant R$.

3. Quelle est la température cutanée T_c de l'animal ? Commenter la variation de T_c d'une part quand λ varie à R fixé, d'autre part quand R varie à λ fixée.

4. Quelle doit être la valeur du métabolisme volumique p_v pour avoir $T_c = 30$ °C dans l'air puis dans l'eau ?
Pourquoi n'existe-t-il pas de petits mammifères marins ?

Données :
$\lambda_{air} = 5\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$ et $\lambda_{eau} = 500\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$.
On prendra $R = 25$ cm.

3 — Modèle d'un fusible [*]

Un fusible est constitué d'un fil conducteur cylindrique de section droite d'aire S, de longueur L, de masse volumique μ et de capacité thermique massique c. Il possède une conductivité thermique λ et une conductivité électrique γ.
Il est traversé par un courant électrique d'intensité I. Ce fil est enfermé dans une capsule remplie d'une substance assurant une isolation thermique et électrique parfaite.
Les températures en $x = 0$ et $x = L$ sont imposées et égales à la température T_0 du milieu ambiant.
Données :
$\lambda = 65\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$,
$\gamma = 1{,}2 \times 10^6\ \mathrm{S \cdot m^{-1}}$,
$c = 460\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$,
$\mu = 2{,}7 \times 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.
On prend $T_0 = 290$ K et $L = 2{,}5$ cm
On rappelle que la résistance électrique d'un conducteur cylindrique de conductivité électrique γ, de longueur ℓ et de section S, parcouru par un courant I est

$$R = \frac{\ell}{\gamma S}.$$

On se place en régime stationnaire.

1. Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par la température $T(x)$ le long du fusible. Représenter graphiquement $T(x)$.

2. Le matériau constituant le fil fond à $T_F = 390$ K. On veut fabriquer un fusible qui admet une intensité maximale $I_{max} = 16$ A. Préciser l'endroit de la rupture en cas de dépassement de I_{max}. Déterminer littéralement puis numériquement l'aire S_{16} à prévoir.

3. On fixe $I = 10$ A. Le fil a la section S_{16}. Évaluer littéralement puis numériquement la puissance thermique $P_{th}(0)$ transférée par conduction en $x = 0$. Préciser si elle est reçue ou fournie par le fil. Même question pour la puissance thermique $P_{th}(L)$ en $x = L$. Quelle relation a-t-on entre $P_{th}(0)$, $P_{th}(L)$ et la puissance électrique P_e fournie à l'ensemble du fil ? Commenter.

---

4 — Température de la planète Mars [*]

La température moyenne sur le sol martien est de −50 °C. Le rayon de la planète est $R_2 = 3400$ km et on suppose pour simplifier qu'elle est formée de deux parties bien distinctes à symétrie sphérique :

— un noyau homogène d'un mélange, entre autres, de fer et de nickel à la température uniforme de 2500 °C, de rayon $R_1 = 1500$ km ;

— un manteau homogène composé essentiellement de silice solide jusqu'à la surface, de conductivité thermique λ.

1. Comment varie la température à l'intérieur de Mars ? Tracer l'allure de $T(r)$ pour $0 \leqslant r \leqslant R_2$.

2. Quelle est la puissance dissipée par le noyau de Mars si $\lambda = 1{,}2\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$? Quelle est l'origine de cette énergie ?

3. Une autre théorie plus fine consiste à dire que Mars a été formée il y a environ 4 milliards d'années par une très grande quantité de grains de poussière identiques qui, en s'agglomérant, ont fini par créer la planète que l'on connaît de nos jours. Pour modéliser $T(r)$, on suppose qu'il se dégage au sein de la planète une puissance volumique P_v constante. On élimine donc la distinction entre le noyau et le manteau.

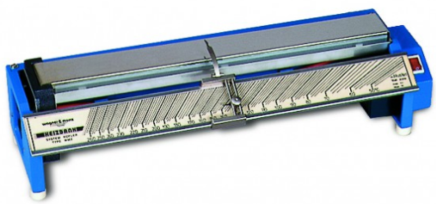
Justifier pourquoi on peut admettre que $T(r)$ ne dépend pas du temps.

Déterminer la nouvelle expression de $T(r)$.

---

5 — Banc de Kofler [**]

Un banc de Kofler permet de mesurer avec précision la température de fusion de cristaux solides en poudre. C'est une barre parallélépipédique horizontale de longueur L et de section $a \times b$ (avec $b \ll a$), constituée d'un matériau de conductivité thermique λ et de chaleur massique à pression constante c. À l'une des extrémités du banc est insérée une résistance électrique R. Quand on branche le banc de Kofler, la résistance R est soumise à une tension U. On admet que la totalité de la puissance dégagée par effet Joule est transmise au banc. Les échanges thermiques entre l'air et le banc sont modélisés par une puissance $P = h(T - T_a)S$, où T est la température du banc, T_a la température de l'air et S la surface d'échange. On considère la face inférieure isolée : le transfert thermique avec l'extérieur s'effectue à travers la face supérieure du banc. On applique une tension de valeur efficace U aux bornes de la résistance R.



1. Trouver l'équation différentielle vérifiée par la température du banc en régime stationnaire, en supposant le problème unidimensionnel. Donner la forme du profil de température.

2. À quelle condition sur L peut-on supposer le banc comme semi-infini. Montrer que dans le cadre de cette approximation le profil de température dans le banc est de la forme

$$T(x) = A + B\,\mathrm{e}^{-x/\delta}\,.$$

Exprimer A, B et δ en fonction des données du texte.

3. Si la tension U est la tension électrique délivrée par le réseau domestique, à quelle condition la température du banc peut-elle être considérée comme stationnaire ?

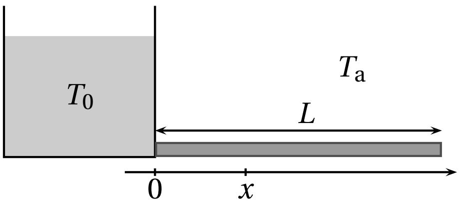
4. On saupoudre les cristaux à étudier dans le sens de la longueur L. Expliquer ce que l'on observe et comment on en déduit la température de fusion.

Justifier la nécessité d'un étalonnage et montrera que le choix de la résistance R caractérise la plage de température de fusion détectable.

5. La précision des mesures de distance le long du banc est de 0,5 mm. Discuter de la précision obtenue sur la mesure d'une température de fusion : dépend-elle de T_{fusion} ? de R ?

6 — Conduction thermique [**]

Une tige cylindrique de longueur L et de rayon R est constituée d'un métal de conductivité thermique λ. Elle est encastrée à une de ses extrémités dans un récipient contenant de l'eau portée à ébullition, imposant en $x = 0$ la température constante $T_0 = 100$ °C.



Le reste de la tige est en contact avec l'atmosphère de température constante $T_a = 20$ °C. On prend en compte les transferts thermiques conducto-convectifs entre la tige et l'air ambiant par la loi de Newton : un élément de surface latérale dS à la température T fournit à l'extérieur une puissance thermique

$$\mathrm{d}P = h(T - T_a)\,\mathrm{d}S.$$

On se place en régime stationnaire.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par $T(x)$. On introduira une longueur caractéristique δ dont on donnera l'expression. Donner la forme générale de la solution $T(x)$.

2. Écrire les conditions aux limites qui permettent de déterminer les constantes d'intégration (le calcul n'est pas demandé).

3. Déterminer complètement l'expression de $T(x)$ dans le cas où la tige est infiniment longue (préciser cette hypothèse).

4. On dispose de deux barres (1) et (2) de dimensions identiques, constituées respectivement de cuivre et d'étain, recouvertes d'une fine couche de paraffine dont la température de fusion est $T_f = 60$ °C. Sur chacune des barres, on observe la fusion de la paraffine aux abscisses $x_1 = 15{,}6$ cm et $x_2 = 6{,}4$ cm. On admet que le coefficient h est inchangé.

Sur quelle partie de la tige la paraffine est-elle fondue ?

La conductivité thermique du cuivre étant $\lambda_1 = 390\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$, déterminer la valeur λ_2 de celle de l'étain.

5. Comment sont modifiés les résultats précédents si l'on place un ventilateur dirigé vers la tige ?

7 — Barre parcourue par un courant [**]

Soit une barre de conductivité thermique λ, de longueur L et section S. Sa surface latérale est calorifugée. Ses extrémités sont en contact avec deux sources à des températures T_1 en $x = 0$ et T_2 en $x = L$.

1. Déterminer $T(x)$ et la puissance P_2 fournie à la source de température T_2 en régime permanent.

2. La barre est de plus parcourue par un courant d'intensité I. On note ρ la résistivité électrique de la barre.

On rappelle l'expression de la résistance électrique d'un cylindre de résistivité électrique ρ, de longueur ℓ et de section S :

$$R = \frac{\rho\ell}{S}.$$

Déterminer $T(x)$ et $P(x)$, puissance traversant la section de la barre

3. Déterminer P_2. La mettre sous forme de deux termes. Commenter.

4. Quelle est la puissance P_1 sortant en $x = 0$?

5. Que se passe-t-il si on interrompe le courant d'intensité I et que l'on calorifuge les extrémités ? Déterminer la température finale.

8 — Compost [**]

Du fait de la décomposition, un bloc de compost de grande surface S et de hauteur H produit une puissance volumique

$$p_v = Q\sin\left(\frac{\pi z}{H}\right),$$

l'axe des z étant choisi ascendant.

La surface en $z = 0$ est parfaitement isolée, celle en $z = H$ subit un échange conducto-convectif avec l'extérieur. On rappelle la loi de Newton : $j_{th} = h(T - T_0)$, où h désigne le coefficient de transfert thermique de surface.

1. Déterminer le profil de température $T(z)$ en régime stationnaire et le tracer.

2. Calculer la puissance dégagée par le compost.

9 — Diffusion thermique instationnaire [**]

Deux plaques sont séparées d'une distance L. Il règne à l'extérieur une température T_0 ; on note $T(x,t)$ la température à l'intérieur (pour $0 \leqslant x \leqslant L$).
Le profil initial de température entre les plaques est

$$T(x,0) = T_0 + \theta \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad \text{avec} \quad \theta > 0\,.$$

1. Vérifier que $T(x,0)$ vérifie les conditions aux limites.

2. On cherche des solution sous la forme $T(x,t) = T_0 + f(x)g(t)$. Déterminer $f(x)$ et $g(t)$.

3. Calculer le flux thermique en x à l'instant t.

---

10 — Solidification d'une goutte [**]

On considère une goutte d'eau à la température $T_e = 10$ °C que l'on pulvérise dans l'air à $T_a = -15$ °C. Le rayon de la goutte est $R = 0{,}1$ cm.
À l'interface eau-air, le flux thermique de la goutte de surface S et de température $T(t)$ vers l'extérieur est donné par $\Phi = hS[T(t) - T_a]$, avec $h = 50\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$.
On note $\rho = 1{,}0 \times 10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ la masse volumique de la goutte, supposée uniforme, $c = 4{,}18 \times 10^3\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$ la capacité calorifique massique de l'eau et $\Delta_{\text{fus}}h = 335\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$ l'enthalpie massique de fusion de la glace.

1. À l'aide du premier principe de la thermodynamique, montrer que

$$\rho c R \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -3h[T(t) - T_a]\,.$$

2. Déterminer $T(t)$. On pourra poser $\tau = \dfrac{\rho c R}{3h}$.

3. Déterminer le temps t_1, en fonction de τ, T_e, T_a et T_f au bout duquel $T(t_1) = T_f = -5$ °C.

4. On considère que la goutte est liquide à T_f et que la température remonte à $T_0 = 0$ °C où elle se solidifie partiellement. On considère la réaction isobare et réversible. Déterminer la proportion x de liquide restant.

5. Déterminer le temps t_2 au bout duquel la goutte est entièrement solide.

---

11 — Neige artificielle [**]

La neige artificielle est obtenue en pulvérisant de fines gouttes d'eau liquide supposées sphériques de rayon $R = 0{,}2$ mm à $T_i = 10$ °C dans l'air ambiant à la température $T_e = -15$ °C.
À l'interface eau-air, le flux thermique $\mathrm{d}\phi$ à travers une surface $\mathrm{d}S$ dans le sens de la normale extérieure $\vec{n}$ est donné par la loi

$$\mathrm{d}\phi = h[T(t) - T_e]\,\mathrm{d}S\,.$$

1. Établir l'équation différentielle régissant l'évolution temporelle de la température de la goutte $T(t)$.

2. Déterminer le temps t_0 mis par la goutte liquide pour atteindre la température de surfusion $T(t_0) = -5$ °C.

3. Lorsque la goutte a atteint la température de -5 °C, il y a rupture de la surfusion : la température remonte brutalement à 0 °C et la goutte est partiellement solidifiée (phénomène également brutal). Moyennant des hypothèses que vous expliciterez, calculer la fraction x de liquide restant à solidifier après la rupture de la surfusion.

4. Calculer le temps nécessaire à la solidification du reste de l'eau liquide.

Données

Coefficient conducto-convectif : $h = 65\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$
Chaleur latente de changement de phase solide-liquide : $\ell_f = 333\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$
Capacité thermique massique de l'eau liquide : $c_\ell = 4{,}2\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$
Capacité thermique massique de l'eau solide : $c_s = 2{,}1\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$

---

12 — Transfert thermique dans une poutre [**]

Soit une poutre de longueur L, de section circulaire de rayon a et de conductivité thermique λ, contenue entre deux murs de température T_m. On note T_a la température de l'air entourant la poutre et h le coefficient de transfert convecto-conductif. On considère le régime permanent atteint. Le point O est placé au milieu de la poutre et on définit un axe (Oz) dans le sens de la poutre.

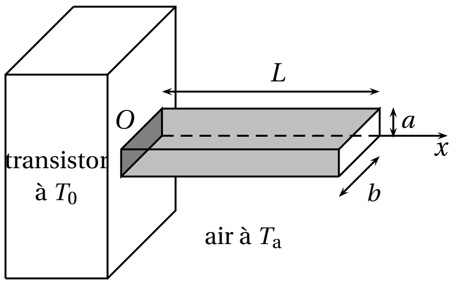
1. Déterminer le profil de température $T(z)$.

2. Quel est le transfert thermique entre la poutre et l'air

---

13 — La fine ou l'épaisse ? [**]

On considère un transistor de puissance qui dissipe de l'énergie lors de son fonctionnement, et se comporte alors comme une source de chaleur. Afin d'éviter une montée en température trop importante, on utilise une ailette de refroidissement pour favoriser les échanges thermiques avec le milieu extérieur.
On étudie une ailette de longueur L, de section rectangulaire $S = a \times b$, dont la face en $x = 0$ est en contact avec le transistor à la température $T_0 = 65$ °C.



On se place en régime stationnaire, et on suppose que le phénomène est unidimensionnel selon Ox : la température dans l'ailette est $T(x)$. La température de l'air ambiant est T_a. Le transfert thermique de l'ailette vers l'air ambiant est tel que la puissance thermique échangée par un élément de surface latérale dS de longueur dx est donnée par $\mathrm{d}P = h[T(x) - T_\mathrm{a}]\,\mathrm{d}S$, où h est une constante caractéristique de cet échange thermique.
La conductivité thermique de l'ailette est λ.

1. Montrer que la température dans l'ailette vérifie une équation différentielle de la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2 T(x)}{\mathrm{d}x^2} - \frac{T(x) - T_\mathrm{a}}{\delta^2} = 0 \qquad (1)$$

où δ est une grandeur caractéristique dont on donnera l'expression en fonction de λ, a, b et h, dont on précisera la dimension.

2. Quelle est la forme générale de la solution de l'équation différentielle (1) ?

À quelle condition portant sur δ peut-on considérer l'ailette comme infinie ? En se plaçant dans ce cas, déterminer complètement l'expression de $T(x)$.

3. Exprimer en fonction de T_0, T_a, a, b, λ et h la puissance thermique totale évacuée par l'ailette.

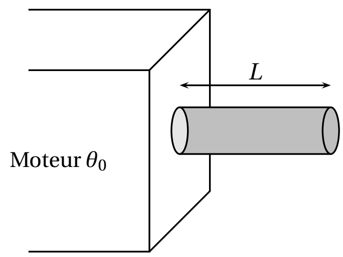
Pour une même section $S = 1$ cm^2, on considère deux profils d'ailette :
— une fine, avec $a = 0{,}1$ cm et $b = 10$ cm ;
— l'autre épaisse, avec $a' = b' = 1$ cm.

Quelle ailette vaut-il mieux choisir pour évacuer une maximum de puissance thermique ?

4. Est-il nécessaire de prendre une ailette aussi longue que possible ? Proposer une longueur L d'ailette dans le cas où $\delta = 1$ cm. Commenter la structure du radiateur sur la photo suivante.

14 — Ailette de refroidissement [***]

On souhaite refroidir un moteur en fixant sur lui un certain nombre d'ailettes de forme cylindrique (rayon R, longueur L), de conductivité thermique λ. Chaque ailette est au contact d'un fluide à la température $\theta_\mathrm{e} < \theta_0$, où θ_0 est la température du moteur.



1. Combien doit-on placer d'ailettes sur le moteur sachant que le flux thermique à évacuer vaut $\Phi_\mathrm{T} = 40$ W ?

2. Comment améliorer le système ?

Données numériques
$\lambda = 400\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$
$h = 100\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$ (coefficient de transfert conducto-convectif de Newton)
$R = 2$ mm
$L = 15$ cm
$\theta_0 = 82$ °C
$\theta_\mathrm{e} = 22$ °C

15 — Production d'entropie [***]

Les extrémités d'une barre calorifugée en acier inox, de conductivité thermique λ, de longueur $L = 1$ m, sont maintenues aux températures $T_1 = 300$ K et $T_2 = 400$ K. On se place en régime stationnaire.
On donne $\lambda = 16\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$.

1. Quelle est la variation d'entropie d'un élément de volume de section A et de longueur $\mathrm{d}x$?
Établir l'expression de l'entropie reçue par cet élément.

2. Calculer l'entropie σ_s produite dans la barre par unité de volume et par unité de temps, au point de la barre où elle est maximale.

16 — Gel d'un lac [***]

Un lac est recouvert d'un épaisseur $z(t)$ de glace, l'axe des z étant orienté vers le bas, son origine étant à la surface de glace en contact avec l'air, cette surface étant à la température $T_s = -30{,}0$ °C. On donne la température de fusion de l'eau $T_f = 0{,}0$ °C, l'enthalpie massique de fusion de la glace $\Delta_{\text{fus}}h = 335\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$, la masse volumique de la classe $\rho_g = 940\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ et le coefficient de transmission thermique de la glace $\lambda_g = 2{,}1\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$.

1. Donner l'équation différentielle vérifiée par la température $T_g(z,t)$ de la glace et les condition aux limites sur $T_g(z,t)$.

2. À l'aide d'un bilan d'enthalpie, obtenir la relation

$$\lambda\left(\frac{\partial T_g}{\partial z}\right)_{\varepsilon(t)} = \rho_g \Delta_{\text{fus}} h \dot{z}.$$

3. On suppose $\dot{z}$ très faible, donc on considère que z est constant : quel est le nom de cette approximation ?

4. Que devient alors la première équation différentielle ? Donner le gradient de T_g.

5. Donner l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$ et la résoudre. Le résultat obtenu est-il cohérent ? Donner son sens physique.

6. Donner l'épaisseur de la couche de glace au bout d'une minute, d'une journée et d'un mois. Est-ce cohérent ?