TD phénomènes de transport — Diffusion thermique — Partie 2

ARQS et résistance thermique

1 — Chauffage d'un igloo [*]

Pour passer la nuit, un inuit veut construire un igloo fait d'un mur constitué de neige compactée de $4\ \mathrm{m}^2$ de surface. La neige compactée est un bon isolant de conductivité thermique $\lambda = 0{,}25\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$.

1. Exprimer la résistance thermique des parois de l'igloo en fonction de l'épaisseur e de la paroi. On négligera la courbure des parois.

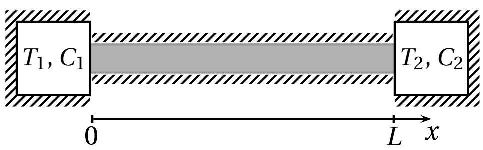
2. Pendant son sommeil, l'inuit dégage 0,5 MJ de chaleur par heure. Exprimer la puissance de l'inuit en tant que source de chaleur dans les unités du système international.

3. Pendant la nuit, quand le feu à l'intérieur de l'igloo s'est éteint, la température intérieure est $T_{\mathrm{int}} = 20\ \mathrm{°C}$, tandis que celle à l'extérieur est $T_{\mathrm{ext}} = -40\ \mathrm{°C}$. Si la conduction thermique à travers les murs de l'igloo est le facteur dominant dans les pertes thermiques, quelle est la valeur de e pour que l'intérieur de l'igloo ne se refroidisse pas ?

4. En fait, l'épaisseur est trop importante pour que l'on puisse négliger la courbure des parois. Faire la bilan thermique en coordonnées sphériques, et trouver la résistance thermique R_{th} en fonction des rayons intérieur et extérieur de l'igloo, demi-sphérique. Étude de la limite si $e \ll R_{\mathrm{int}}$.

2 — Diffusion thermique dans une barre [**]

On considère une barre (représentée en gris sur le schéma) homogène de longueur L, de conductivité thermique λ, de section S et de masse volumique ρ. Deux sources de température sont placées à ses deux extrémités comme indiqué sur le schéma.



1. On suppose les sources idéales.

1.a) Que valent C_1 et C_2 ?

1.b) On se place en régime permanent. Donner $T(x)$.

2. On considère plus que les sources ne sont plus idéales, et on se place en régime quasi-stationnaire.

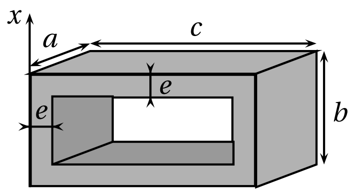
2.a) Discuter de la validité de l'hypothèse.

2.b) Déterminer $T_1(t)$ et $T_2(t)$.

3 — Le parpaing a un petit creux [**]

1. On considère un phénomène de diffusion thermique unidimensionnel dans un matériau de longueur L, de section S et de conductivité thermique λ.
Rappeler la définition de la résistance thermique d'un milieu en précisant les hypothèses nécessaires, puis établir son expression dans le cas du matériau considéré. Préciser son unité.

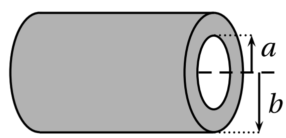
On considère un parpaing creux en béton, dont les dimensions sont indiquées sur la figure ci-dessous (l'épaisseur de la paroi est constante, égale à e). On note λ_{a} la conductivité thermique de l'air et λ_{b} celle du béton.
On donne $a = 20$ cm, $b = 15$ cm, $c = 40$ cm, $e = 2$ cm, $\lambda_{\mathrm{a}} = 2{,}6 \times 10^{-2}\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$ et $\lambda_{\mathrm{b}} = 0{,}92\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$.



2. On impose les températures T_1 à la face $x = 0$ et T_2 à la face $x = b$. Déterminer le flux thermique traversant le parpaing en régime permanent.

3. Quelle serait l'épaisseur b' d'un parpaing de béton plein qui serait traversé par le même flux thermique, les dimensions a et c étant inchangées ? Commenter.

4 — Isolation d'une canalisation [**]



On considère une canalisation cylindrique de longueur L, de rayons intérieur a et extérieur b, et de conductivité thermique λ. On étudie la diffusion thermique en régime stationnaire entre la face interne et la face externe en négligeant les effets de bords : la température dans le tube s'écrit $T(r)$ en coordonnées cylindriques d'axe l'axe du tube.
On rappelle que pour $T(r)$ en coordonnées cylindriques, on a $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, T = \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r$ et $\Delta T = \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right)$.

1. Rappeler la définition générale de la résistance thermique.

2. Donner l'expression du flux thermique sortant $\Phi(r)$ à travers un cylindre de rayon $r \in [a, b]$ de de longueur L en fonction des données et de $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}$.

Que peut-on dire de ΔT en régime stationnaire ? En déduire que le flux thermique $\Phi(r) = \Phi$ est indépendant de r.

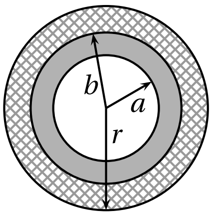
On note T_1 la température de la face interne du tube et T_2 celle de sa face externe. Relier alors $T_1 - T_2$ à Φ et aux données du problème, et en déduire l'expression de la résistance thermique $R_{\text{th},1}$ du tube en fonction de a, b, λ et L.

3. On rappelle la loi de Newton donnant le flux thermique à travers une surface S d'un solide à la température T_S vers un fluide à la température T_e : $\Phi_{S\to e} = hS(T_S - T_e)$, où h est le coefficient de transfert convectif. Montrer que l'on peut associer une résistance thermique R_{conv} à ce transfert convectif, dont on donnera l'expression en fonction de h et S.

4. Un fluide circule dans le tube, qui est entouré d'air ; il se produit donc des transferts convectifs sur les deux faces de la canalisation, caractérisés par les coefficients de transfert h_1 pour la face interne et h_2 pour la face externe.

Donner la résistance thermique totale R_{th} caractérisant le transfert thermique de l'intérieur du tube vers l'air extérieur.

5. On cherche à minimiser les pertes thermique en enveloppant le tube d'un matériau isolant de conductivité λ_{iso}, de rayon r.



Que devient la résistance thermique R'_{th} de l'ensemble ?

Montrer que la résistance thermique passe par un extremum pour une valeur critique r_c de r que l'on déterminera. À quelle condition cette situation sera possible ? Est-ce un minimum ou un maximum ?

6. En étudiant le signe de $R'_{\text{th}} - R_{\text{th}}$, discuter de l'influence de l'isolant sur le flux thermique.

On parle du « paradoxe de l'isolant » : discuter.

5 — Isolation d'une conduite [***]

Version moins guidée de l'exercice précédent.

On considère une conduite entourée d'un isolant.

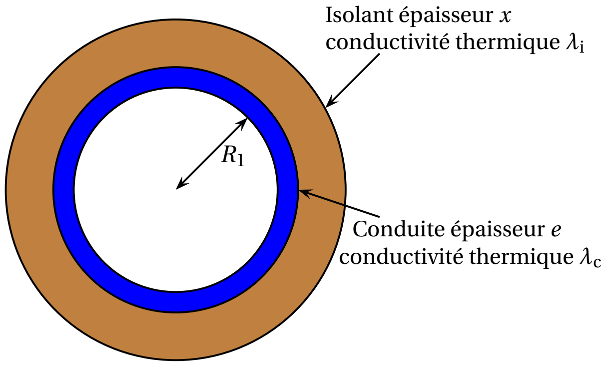
Les phénomènes de convection sont modélisés par la loi de Newton : $\mathrm{d}\Phi = h(T - T_e)\,\mathrm{d}S$.

On note h_1 le coefficient d'échange air/conduite et h_2 le coefficient d'échange isolant/air.

On donne également l'expression de la résistance thermique en coordonnées cylindriques

$$R_{\text{th}} = \frac{1}{2\pi\lambda L}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right),$$

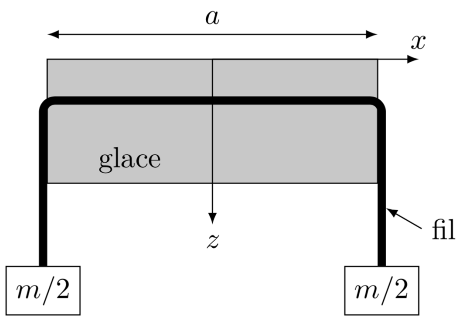
où R_1 est le rayon intérieur, R_2 le rayon extérieur, λ la conductivité thermique du cylindre de longueur L.



Est-il vrai que plus il y a d'isolant, meilleure est l'isolation ? Si non, quelle est la condition sur x pour avoir la meilleure isolation ?

6 — Expérience de regel [***]

On pose un fil métallique de section rectangulaire de côtés b selon (Oy) et c selon (Oz) aux extrémités duquel sont fixées deux masses $m/2$ sur un gros bloc de glace. On constate que la glace fond sous le fil, que le fil descend doucement à vitesse constante v et que l'eau regèle au-dessus du fil.



1. Évaluer, à l'aide notamment du diagramme (P, T) et des données, la différence de température $T_i - T_s$ entre le dessous (indice i)et le dessus (indice s).

On donne $m = 5\,\text{kg}$; $a = 20\,\text{cm}$; $b = 0{,}5\,\text{mm}$ et $c = 5\,\text{mm}$.

2. On suppose que le régime de diffusion thermique dans le fil est stationnaire.

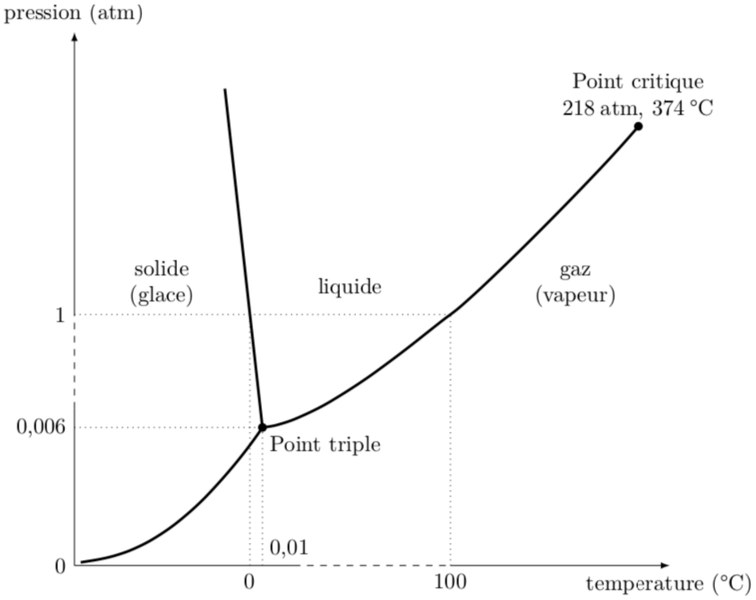
En appliquant le premier principe à la couche d'eau solide d'épaisseur $\mathrm{d}z$ qui fond sous le fil, en déduire la vitesse $v = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

Données : $\lambda = 80\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$; enthalpie massique de fusion de l'eau à 0 °C : $\Delta_{\text{fus}}H = 330\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$.

➤ On appelle *enthalpie massique de changement d'état* $\Delta h_{1\to2}(T)$, ou *chaleur latente de changement d'état* $\ell_{1\to2}(T)$, la variation d'enthalpie massique du corps pur lors de la transition de phase $1 \to 2$. Cette grandeur est tabulée en, fonction de la température car *elle ne dépend que de* T.

➤ Pour une masse m de corps pur, passant de l'état initial $\{\text{phase } 1, T, P_{\text{éq}}(T)\}$ à l'état final $\{\text{phase } 2, T, P_{\text{éq}}(T)\}$ on peut calculer la variation d'enthalpie due au changement d'état par

$$\Delta H_{1\to 2} = m\ell_{1\to 2}(T)\,.$$



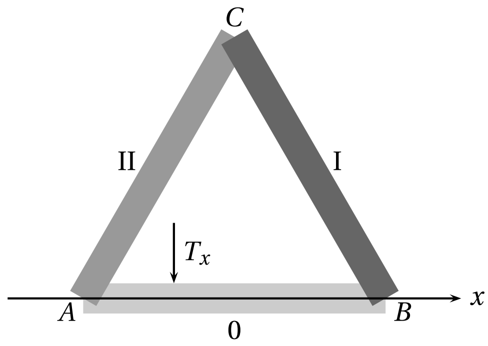
1 atm = 1,01325 bar = 101 325 Pa

Pression (bar)	Température (°C)
1,01325	0,0026
50	-0,362
100	-0,741
150	-1,125
200	-1,517
250	-1,9151
300	-2,321
400	-3,153
500	-4,016
600	-4,91
800	-6,79
1000	-8,80

Figure 1

7 — Trois barres en contact [***]

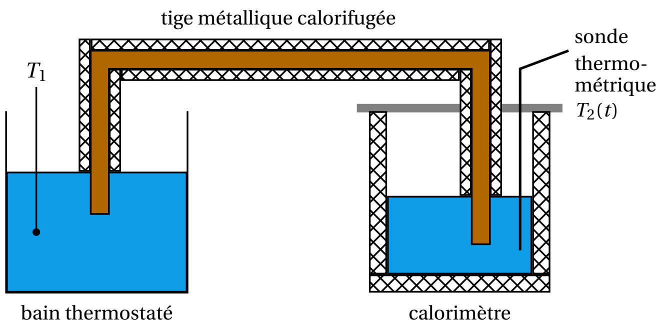
On considère le dispositif représenté ci-dessous dans lequel les deux extrémités A et B sont maintenues aux températures stationnaires T_A et T_B. Les trois barres (d'indices 0, I et II) sont caractérisées respectivement par des sections d'aires respectives S_0, S_{I} et S_{II} et par des conductivités thermiques λ_0, λ_{I} et λ_{II} et de même longueur notée L_0.
On note T_C la température à la jonction C et T_x la température en un point d'abscisse x de la barre 0, de longueur totale $L_0 = 20$ cm.



On mesure $T_x = T_C$ pour $x = 4$ cm. En déduire la conductivité thermique de la barre II.
Données numériques
Les aires sont toutes égales à 1 cm^2
Les barres 0 et I sont en acier, pour lequel $\lambda = 50{,}2\ \text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.
$T_A = 273$ K et $T_B = 373$ K.

8 — Détermination d'une conductivité thermique [**]

On souhaite déterminer la conductivité thermique λ d'une barre cylindrique de section S et de longueur L. On utilise le dispositif suivant :



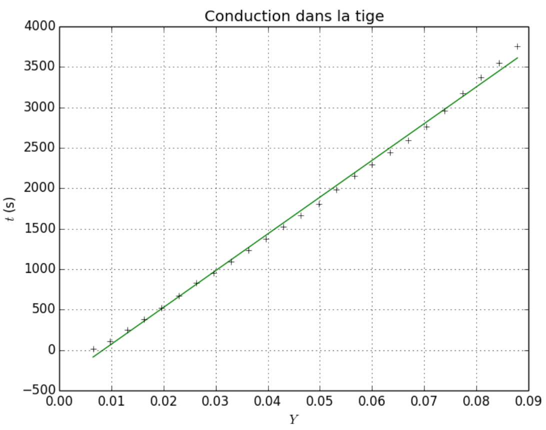
La tige, calorifugé latéralement, plonge d'un côté dans un bain thermostaté maintenu à la température T_1 constante, et de l'autre dans un calorimètre de capacité thermique C, rempli d'une masse $m = 400$ g d'eau. Initialement, $T_2(0) < T_1$, et on relève l'évolution de $T_2(t)$ au cours du temps.

1. On fait l'hypothèse d'un état quasi-stationnaire : l'évolution de $T_2(t)$ est « suffisamment lente » pour que l'on puisse considérer le régime stationnaire atteint à chaque instant dans la tige.
Établir alors l'expression de la résistance thermique de la tige en fonction de L, S et λ. En déduire l'expression du flux thermique traversant la barre dans le sens thermostat → calorimètre en fonction des températures T_1 et $T_2(t)$.

2. En effectuant un bilan d'énergie au système {eau + calorimètre}, établir l'équation différentielle vérifiée par $T_2(t)$. On notera C_2 la capacité thermique totale de l'eau et du calorimètre.

Montrer que l'évolution est décrite par une constante de temps τ que l'on exprimera, et en déduire l'expression de $T_2(t)$.

3. On donne le graphe de t en fonction de $\ln\left(\dfrac{T_2(0)-T_1}{T_2(t)-T_1}\right)$, sur lequel on représente la régression linéaire effectuée avec les points expérimentaux.



La tige a pour longueur $L = 68$ cm et pour diamètre $D = 1{,}2$ cm. La capacité du calorimètre est $C = 180\ \mathrm{J\cdot K^{-1}}$; on y a placé $m = 400$ g d'eau, et on donne $c_{\text{eau}} = 4{,}186\ \mathrm{J\cdot g^{-1}K^{-1}}$.

En déduire une estimation de la conductivité λ de la tige.

On donne :

$\lambda_{\text{Al}} = 237\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$;

$\lambda_{\text{Cu}} = 401\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$.

De quel métal est constituée la tige ?

4. On rappelle l'équation de la chaleur unidimensionnelle : $\rho c\dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$. Par analyse dimensionnelle, donner l'expression du temps caractéristique du phénomène de diffusion thermique dans la barre en fonction des grandeurs physiques en jeu.

On a considéré l'évolution quasi-stationnaire (cf. question 1). À quoi revient cette approximation en raisonnant sur les échelles de temps du problème ?

Est-elle vérifiée ici ?

Données :

— pour l'aluminium $\rho_{\text{Al}} = 2{,}7\ \mathrm{g\cdot cm^{-3}}$ et $c_{\text{Al}} = 897\ \mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$;

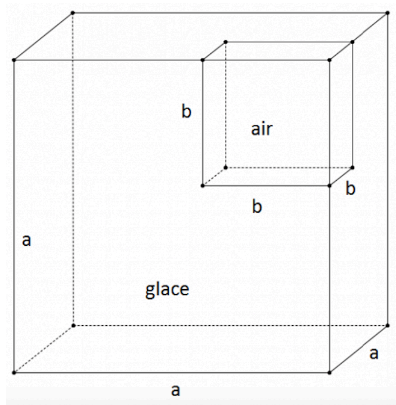
— pour le cuivre $\rho_{\text{Cu}} = 8{,}9\ \mathrm{g\cdot cm^{-3}}$ et $c_{\text{Cu}} = 386\ \mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$.

5. Si l'évolution ne peut être considérée comme quasi-statique, notre évaluation expérimentale de λ serait-elle sur-estimée ou sous-estimée par rapport à la valeur réel ?

9 — Conductivité du givre [***]

Exercice calculatoire…

On modélise le givre comme la répétition d'un même motif : un cube de côté a, comprenant un sous-cube d'air de côté b, le reste de la matière du motif étant de la glace.



Conductivités thermique : $\lambda_{\text{glace}} = 2{,}1\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$ et $\lambda_{\text{air}} = 0{,}022\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$.

1. Exprimer la résistance thermique du motif.

2. Exprimer la conductivité thermique λ du givre.

3. Tracer la courbe $\lambda = F\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

4. Calculer la conductivité thermique du givre pour une fraction volumique de l'air dans le givre de 0,4. Conclure sur la nécessité de dégivrer régulièrement un congélateur.

10 — Igloo de survie [**]

Un alpiniste, surpris par le mauvais temps, dévide de construire un igloo de survie.

Le volume de son igloo doit valoir $1\ \mathrm{m^{-3}}$. Il utilise des blocs de neige d'épaisseur $e = 10$ cm et de conductivité thermique $\lambda = 0{,}2\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$.

Il hésite entre trois formes : un igloo cubique de côté a, un igloo cylindrique dont la hauteur est égale à son rayon R_c et un igloo hémisphérique de rayon R_h.

1. Quel igloo présente la résistance thermique la plus élevée ?

2. L'alpiniste dégage une puissance thermique de 100 W. En considérant l'igloo choisi à la question précédente, déterminer la différence de température entre l'intérieur et l'extérieur de l'igloo.

11 — Dauphin — oral CCINP MP 2024

On considère un dauphin de longueur 2 m et de masse 220 kg. Les poissons qu'il mange apportent 100 kilo calories par jour pour 100 g de poisson (1 kcal = 4 kJ).

La température corporelle du dauphin est de 36 °C.

Le dauphin possède une couche de graisse de conductivité thermique $\lambda = 0{,}2\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$ et d'épaisseur $e = 3$ cm (considérée fine).

Quelle masse de poisson doit-il manger par jour pour lutter contre le froid de l'eau dans laquelle il vit à 10 °C ? *Il s'agit d'un problème ouvert. On pourra considérer en première approximation que la masse volumique du dauphin est à peu près égale à celle de l'eau.*

12 — Double vitrage — oral CCINP MP 2023

On considère une pièce à la température T_i séparée de l'extérieur à la température T_e par une vitre en verre d'épaisseur e, de surface S orthogonale à l'axe Ox, de conductivité thermique λ.
On se place en régime permanent.

1. Exprimer le flux ϕ_1 qui sort de la pièce et la résistance thermique R_th de la vitre.

2. On rajoute une deuxième vitre identique à la première, séparée de celle-ci par une couche d'air d'épaisseur e' et de conductivité thermique λ'.
Calculer le flux sortant ϕ_2 puis le rapport ϕ_2/ϕ_1.

13 — Isolation d'une pièce — oral Mines-Ponts MP

Une pièce a une température de 20 °C et la température extérieure est de 10 °C. La résistance thermique des murs vaut $10 \times 10^{-3}\ \mathrm{K \cdot W^{-1}}$, celle du toit $2 \times 10^{-3}\ \mathrm{K \cdot W^{-1}}$.

1. Calculer la puissance P de chauffage à fournir à la pièce pour que sa température soit constante.

2. On procède à une isolation du plafond en ajoutant un isolant de résistance thermique R. Calculer R telle que P soit divisée par 2.

3. On arrête de chauffer. Donner la loi $T(t)$ décrivant l'évolution de la température dans la pièce.

4. Dans quelle mesure ce modèle est-il valide ?

14 — Cylindres concentriques — oral Mines-Ponts 2021

On considère deux cylindres coaxiaux Γ_1 et Γ_2 de rayons respectifs a et $b > a$, séparés par un matériau de conductivité λ. Le cylindre Γ_1 est à la température T_1 et Γ_2 est à la température T_2.

1. Calculer la résistance thermique du matériau entre Γ_1 et Γ_2 en régime permanent.

2. On suppose maintenant que Γ_1 a une capacité thermique C_1 et Γ_2 a une capacité thermique C_2, ces deux capacités étant très grandes. Les températures T_1 et T_2 vont donc varier au cours du temps.
À quelle condition a-t-on le droit de considérer une résistance thermique ?
Calculer alors $T_1(t)$ et $T_2(t)$.

15 — Isolation d'un mur [*]

On donne la conductivité thermique de la brique, $\lambda_1 = 1{,}2\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$, et celle du polystyrène expansé, $\lambda_2 = 4{,}0 \times 10^{-2}\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$. Un mur de brique d'épaisseur $e = 15$ cm sépare l'intérieur d'une pièce à $T_\mathrm{i} = 19$ °C de l'extérieur à $T_\mathrm{e} = 4$ °C. La surface du mur est $S = 8{,}7\ \mathrm{m^2}$.

1. Calculer la puissance thermique perdue à travers le mur de brique.

2. Quelle épaisseur de polystyrène faut-il ajouter pour réduire ces pertes d'un facteur 5 ?