TD phénomènes de transport — Diffusion thermique — Partie 3

Ondes de température

1 — Oscillations thermiques

Le plan $x = 0$ sépare l'air ($x < 0$) d'un milieu ($x > 0$) de conductivité thermique λ, de masse volumique ρ, de masse volumique μ et de capacité thermique massique c. La température en $x = 0$ est

$$T(0,t) = T_\mathrm{a} + \theta_0 \cos(\omega t)\,.$$

1. Établir l'équation aux dérivées partielles régissant $T(x,t)$ dans le milieu.

2. La solution est recherchée en complexe sous la forme

$$\underline{T}(x,t) = \underline{\theta}(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + Cx + D\,.$$

Trouver $\underline{\theta}(x)$ en introduisant une longueur caractéristique δ. Déterminer complètement $T(x,t)$. Commenter.

3. On donne $a = \dfrac{\lambda}{\rho c} = 7 \times 10^{-7}\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$. Calculer δ pour la variation jour-nuit. Commenter.

4. Quelle doit être l'épaisseur d'un mur pour atténuer les variations de température d'un facteur 10 ?

2 — Diffusion thermique dans un câble

On considère un câble cylindrique de section S, de rayon a, de longueur L, de masse volumique μ, de conductivité thermique λ et de capacité thermique massique c. On le suppose parfaitement calorifugé ; son état de dépend que l'abscisse x et du temps t.

1. Une perturbation thermique a lieu à l'extrémité $x = 0$. Établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la température $T(x,t)$.

2. L'extrémité en $x = 0$ est maintenue à la température T_1 alors que l'autre est maintenue à la température $T_2 < T_1$. Calculer λ sachant que le flux thermique à travers une section S est de $2400\ \mathrm{J \cdot min^{-1}}$. On donne $S = 100\ \mathrm{cm^2}$, $T_1 = 300$ K, $T_2 = 280$ K et $L = 1$ m. Commenter la valeur obtenue.

3. On impose des variations sinusoïdales de température autour d'une température moyenne T_0 :

$$T(x=0,t) = T_0 + A\cos(\omega t)\,.$$

L'expression de la température en un point d'abscisse x est de la forme

$$T(x,t) = T_0 + A\,\mathrm{e}^{-mx}\cos(\omega t - \alpha x + \varphi)\,.$$

3.a) Commenter, et déterminer φ, m et α en fonction de ω, μ, λ et c.

3.b) On a relevé expérimentalement les amplitudes d'oscillation suivantes pour un câble de longueur $L = 10$ m :

x (m)	0	1	2	3
amplitude (K)	19,5	11,5	6,8	4

Quel paramètre caractérisant l'évolution de la température peut-on en déduire ?

3.c) On appelle profondeur d'inversion l'abscisse minimale pour laquelle les oscillations thermiques sont en opposition de phase avec celles de l'origine. Calculer cette profondeur.

3 — Effet de cave

Une cave a été creusée en sous-sol d'une vieille propriété du XIXe siècle, dans la vallée de la Loire. Une couche de tuffeau la sépare de la surface terrestre. Cette cave permettait historiquement de conserver les aliments et boissons à l'abri du gel.
Le tuffeau est une pierre tendre dont la masse volumique vaut $1{,}31\ \mathrm{kg \cdot L^{-1}}$, la conductivité thermique $0{,}41\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$ et la capacité thermique massique $1{,}0\ \mathrm{kJ \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$.
On suppose que la température en surface varie entre –15 °C au premier janvier ($t = 0$) et 40 °C au premier juillet, sinusoïdalement.

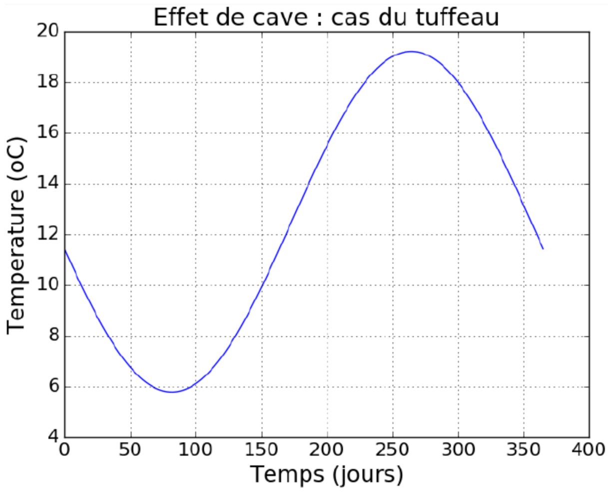
1. Déterminer l'équation aux dérivées partielles, dite équation de la chaleur, pour le champ de température $T(x,t)$, $x > 0$ repérant un point dans le sol pris sur un axe descendant. On fera apparaître la diffusivité du tuffeau et on effectuera une application numérique.

2. Proposer une expression pour $T(x=0,t)$.

3. En régime forcé, on pose

$$T(x,t) = T_0 + u(x,t) \quad \text{avec} \quad \underline{u}(x,t) = \underline{f}(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,.$$

Déterminer l'expression de $u(x,t)$ et par suite de $T(x,t)$, compte tenu des conditions aux limites. On fera apparaître le paramètre $\delta = \sqrt{\dfrac{2\lambda}{\rho c \omega}}$ dont on calculera la valeur.



4. On fournit ci-après un relevé de la température dans la cave. Déterminer l'épaisseur du sol en tuffeau.

5. Expliquer pourquoi certaines caves à Champagne sont enterrées à plusieurs dizaines de mètres.