TD phénomènes de transport — Diffusion de particules

1 — Réaction photochimique

Une réaction photochimique produit p radicaux libres par unité de volume et par unité de temps dans un récipient réactionnel cylindrique délimité par des parois d'abscisses $x = -a$ et $x = a$.
On note S la section du récipient, de longueur $2a$, $n(x)$ la densité particulaire de radicaux libres et D leur coefficient de diffusion dans le milieu réactionnel. On suppose qu'il y a absorption totale sur les bases du récipient cylindrique, ce qui impose $n(-a) = n(a) = 0$.
On se place en régime permanent.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la densité particulaire $n(x)$.

2. En déduire l'expression de $n(x)$.

3. Déterminer le flux de radicaux traversant une section d'aire S à l'abscisse x du récipient. Commenter.

2 — Réacteur nucléaire

On étudie un réacteur nucléaire à une dimension : la densité volumique de neutrons est $n(x,t)$. Dans le milieu, $\dfrac{n(x,t)}{\tau}$ neutrons sont absorbés par unité de temps et de volume; pour chaque neutron absorbé, K neutrons sont produits ($K > 1$). La loi de Fick est supposée vérifiée, le coefficient de diffusion étant noté D.
Le réacteur est situé entre les plans d'abscisses $x = -a$ et $x = +a$. On impose $n(\pm a) = 0$.

1. Établir l'équation aux dérivées partielles, notée (1), vérifiée par $n(x,t)$.

2. On se place en régime permanent. Déterminer $n(x)$ en fonction de n_0, x et a, où $n(0) = n_0$.

Montrer que le régime stationnaire n'est possible que pour une valeur L_s de la longueur du réacteur à déterminer.

3. On se place en régime quelconque. On cherche une solution de l'équation (1) sous la forme

$$n(x,t) = f(x)\,\mathrm{e}^{-t/T}\,.$$

Déterminer $f(x)$ et T, et discuter de la stabilité du réacteur suivant les valeurs de sa longueur $L = 2a$.

3 — Source sphérique de neutrons

Une source sphérique, de centre O et de rayon r_0 émet de façon continue N_0 neutrons par unité de surface et par seconde. La densité particulaire de neutrons n ne dépend que du rayon $r \in [r_0, +\infty[$ et du temps t.

1. On suppose le milieu non absorbant.

1.a) Déterminer l'expression du flux de diffusion à travers une sphère de rayon r en fonction de la densité particulaire n. On note D le coefficient de diffusion des neutrons.

1.b) Que peut-on dire de ce flux en régime stationnaire? Donner alors son expression en fonction de N_0 et r_0, puis déterminer la loi $n(r)$.

2. En fait, la source de neutrons est placée dans une enceinte sphérique de rayon $r_1 > r_0$, et le milieu compris entre r_1 et r_0 absorbe les neutrons à raison de K captures radiatives par seconde et par unité de volume.

2.a) Faire un bilan en considérant la tranche d'espace comprise entre r et $r + \mathrm{d}r$ dans le cas général $n(r,t)$.

2.b) Dans le cas du régime stationnaire, quelle est la valeur de r_1 qui annule le flux de diffusion?

4 — Résoudre l'équation de la diffusion

On considère un processus de diffusion unidimensionnel suivant la direction Ox. Pour certaines conditions initiales, il est possible de chercher une solution de l'équation de diffusion sous la forme

$$n(x,t) = n_0 + f(x)g(t)\,,$$

où n_0 est une constante, et f et g des fonctions respectivement de x et de t.

1. Déterminer les fonctions f et g. On ne cherchera pas à déterminer les constantes qui apparaîtront dans le calcul.

2. La condition initiale, à $t = 0$, est $n(x,0) = n_1 + n_2 \sin px$, où n_1, n_2 et p sont des constantes.

Montrer que la solution trouvée ci-dessus convient et déterminer complètement cette solution.

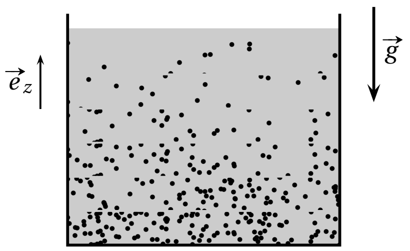
5 — Diffusion dans un tuyau poreux

On étudie l'état stationnaire de diffusion gazeuse dans un tuyau cylindrique d'axe Ox, de rayon a, de longueur L très grande. Les concentrations des molécules sont maintenues constantes aux deux extrémités : $n(x = 0) = n_0$ et $n(x = L) = n_1$. On note D le coefficient de diffusion des molécules.
Le tube est légèrement poreux : les molécules s'échappent vers l'extérieur à travers la paroi latérale du tube; d'épaisseur $e \ll a$. Cette diffusion est caractérisée par un coefficient $D' \ll D$. Avec ces hypothèses, nous pouvons supposer que la densité moléculaire est linéaire dans la paroi latérale du tube. Elle est en outre supposée nulle à l'extérieur.

Établir l'équation différentielle vérifiée par $n(x)$ et la résoudre. On introduira une longueur caractéristique d. Discuter le cas $L \ll d$.

6 — Sédimentation

On étudie un équilibre de sédimentation mettent en jeu la diffusion, mais aussi un champ extérieur, ici celui de pesanteur. Des particules sphériques de rayon R, de masse volumique ρ, sont en suspension dans un fluide de masse volumique ρ_0. Leur densité volumique n ne dépend que de la hauteur z par rapport au fond du récipient.
Au cours de leur chute les particules sphériques sont soumises à une force visqueuse $-6\pi\eta R\vec{v}$, où η est la viscosité du liquide et $\vec{v}$ la vitesse des particules.
Les particules sont aussi soumises au poids et à la poussée d'Archimède.



1. Au cours de leur chute dans le liquide, les particules atteignent rapidement une vitesse limite. La déterminer.

2. À ce mouvement de chute on associe un vecteur densité de courant d'entraînement. En déduire son expression.

3. Montrer alors qu'il apparaît un vecteur densité de courant diffusif dont on rappellera l'expression générale. On note D le coefficient de diffusion des sphères dans le liquide.

4. Déduire des deux questions précédentes l'expression de la densité volumique $n(z)$ en régime permanent.

5. Question pour les étudiants issus de PCSI uniquement.
Cette expression peut aussi s'interpréter à l'aide du facteur de Boltzmann. En déduire une relation entre le coefficient de diffusion D, la constante de Boltzmann k_B, la température T, le rayon R et la viscosité η.

7 — Taille critique d'une bactérie

Une bactérie est modélisée par une sphère fixe, de rayon R, et sa masse volumique μ est assimilée à celle de l'eau. Le régime est considéré comme stationnaire et on note $n(r)$ la densité de dioxygène dissous à la distance r du centre de la bactérie. La diffusion du dioxygène dans l'eau obéit à la loi de Fick avec un coefficient de diffusion D. À grande distance de la bactérie, la densité de dioxygène dissous est notée n_0 et est supposée constante.
On admet que la consommation en oxygéné de la bactérie est proportionnelle à sa masse et on introduit $\mathcal{A}$ le taux horaire de consommation de dioxygène par unité de masse, mesuré en $\mathrm{mol} \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

1. Étude préliminaire

1.a) Exprimer $\vec{J}(r)$, le vecteur densité de flux de particules diffusées, en fonction de D en $n(r)$.

1.b) Exprimer le nombre $\Phi(r)$ de molécules de dioxygène entrant par unité de temps dans une sphère de rayon $r > R$ en fonction de $J(r)$. Le flux de particules Φ dépend-il de r pour le cas étudié ?

1.c) Déterminer l'expression de n_s, densité particulaire en dioxygène dissous sur la surface extérieure de la bactérie. On exprimera le résultat en fonction de Φ, D, R et n_0.

2. Taille critique de la bactérie

2.a) Exprimer Φ en fonction de R, $\mathcal{N}_a$, μ et $\mathcal{A}$.

2.b) En déduire l'expression de n_s. Quelle inégalité doit être vérifiée afin que la bactérie ne suffoque pas ? En déduire l'expression du rayon critique d'une bactérie aérobie.

8 — Diffusion à travers un tuyau

Deux récipients de même volume V contiennent deux gaz purs notés A et B sous la même pression et à la même température. Ils sont reliés par un tube rectiligne de longueur L et de section S. Les gaz diffusent à travers le tube et l'on suppose qu'ils ont la même coefficient de diffusion D. On admet que le régime est quasi-stationnaire dans le tube et que les concentrations en A et B sont à tout instant uniformes dans dans les récipients.
On note $C_{1A}(t)$ et $C_{1B}(t)$ les concentrations de A et B dans le récipient 1, avec $C_{1A}(0) = C_0$ et $C_{1B}(0) = 0$.
On note de même $C_{2A}(t)$ et $C_{2B}(t)$ les concentrations de A et B dans le récipient 2, avec $C_{2A}(0) = 0$ et $C_{2B}(0) = C_0$.

1. Trouver le lien entre le flux de gaz (A ou B) dans le tuyau et la différence de concentration entre les deux réservoirs.

2. En déduire l'évolution des différentes concentrations avec t, et exprimer la constante de temps τ du phénomène.

3. Calculer τ avec $V = 14\ \mathrm{L}$, $S = 1\ \mathrm{cm}^2$, $L = 10\ \mathrm{cm}$ et $D = 1{,}7 \times 10^{-5}\ \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

9 — Élargissement d'une tache d'encre

On considère un modèle unidimensionnel de la diffusion d'une tache d'encre sur un papier filtre : le colorant est placé initialement en $x = 0$.

La conditions initiale est $n(x,0) = 0$ si $x \neq 0$.
Les conditions aux limites sont

$$n(\infty, t) = n(-\infty, t) = 0, \quad \forall t.$$

La solution de l'équation de la diffusion s'écrit alors pour $t > 0$:

$$n(x,t) = \frac{A}{\sqrt{Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right),$$

où A est une constante qui dépend du nombre initial de molécules de colorant déposées sur le papier.

1. Vérifier $n(x,t)$ satisfait à l'équation de la diffusion.

2. La solution proposée vérifie-t-elle les conditions initiale et aux limites ?

3. On peut définir la largeur $L(t)$ de la tâche à l'instant t par

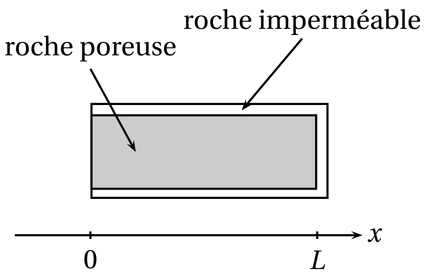
$$n\left(\frac{L(t)}{2}, t\right) = \frac{n(0,t)}{10}.$$

Exprimer $L(t)$ en fonction des données et discuter du résultat obtenu.

4. Représenter $n(x,t)$ en fonction de x pour diverses valeurs de t.

10 — Extraction d'un gaz naturel

On modélise un gisement de gaz naturel par une roche poreuse de volume total V comprenant un volume qV de méthane gazeux, la constante q étant la porosité de la roche. Cette roche poreuse a la forme d'un cylindre de section circulaire S et de longueur L, limité sur ses bords et sur sa section $x = L$ par une roche imperméable.



La section $x = 0$ modélise le puits d'extraction du méthane et on admettra que la pression y est maintenue constante, égale à $p_0 = 1$ bar. On fait les hypothèses suivantes :

— l'influence de la pesanteur est négligeable ;

— le problème est unidimensionnel selon Ox et le champ de pression du méthane est noté $p(x,t)$;

— la température et uniforme à $T = 300$ K ;

— le méthane est assimilé à un gaz parfait de masse molaire $M = 16\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$.

On suppose que l'écoulement de méthane obéit à la loi de Darcy : le vecteur densité de courant massique associé vérifie

$$\vec{J} = -\frac{k}{\nu}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p,$$

où ν est la viscosité cinématique du méthane et k la perméabilité de la roche poreuse.

1. Montrer que $p(x,t)$ vérifie l'équation

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

où l'on exprimera D en fonction de k, ν, R (constante des gaz parfaits), T, M et q. Quel est ce type d'équation ?

2. On cherche une solution de la forme

$$p(x,t) = p_0 + p_1 \sin(\alpha x)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}},$$

où α et τ sont des constantes positives. Exprimer α en fonction de D et τ.

3. Montrer que α ne peut prendre que des valeurs particulières que l'on exprimera. Dans la suite, on adopte la plus petite valeur de α.

4. Exprimer la masse $m(t)$ de méthane contenue dans le gisement à la date t en fonction des données.

5. Sachant que $p_1 = 100p_0$, $L = 5{,}0$ km, $D = 3{,}0 \times 10^{-2}\,\mathrm{m^2\cdot s^{-1}}$ et $q = 0{,}15$, calculer en années la date t^* à laquelle 95 % du méthane contenu dans le gisement a été récupérée. Commenter.
Tracer l'allure de $m(t)$ et de $p(x,t)$ en fonction de x pour $t = 1$, 10, 30 et 40 ans.

11 — Évaporation de l'éther

Un tube cylindrique de hauteur totale L est rempli sur une hauteur h d'éther liquide. À la surface de l'éther, la pression partielle d'éther est égale à la pression de vapeur saturante de l'éther à la température ambiante $T_0 = 293$ K. À la sortie du tube, la pression partielle de l'éther est négligeable.
On donne les grandeur suivantes :

— masse molaire de l'éther $M = 74{,}1\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$;

— masse volumique de l'éther $\mu = 626\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$;

— coefficient de diffusion de l'éther dans l'air $D = 1{,}5 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^2\cdot s^{-1}}$;

— pression de vapeur saturante de l'éther à 293 K : $P\mathrm{s} = 0{,}583$ bar.

1. On suppose que la durée caractéristique de variation de la hauteur $h(t)$ est beaucoup plus lente que la durée caractéristique de diffusion de l'éther dans l'air, de telle sorte que l'on puisse considérer que la diffusion de l'éther dans l'air se fait en régime quasi-permanent. En déduire la densité moléculaire $n(z,t)$ de la vapeur d'éther dans l'air en fonction de L, $h(t)$, z et de données. L'axe Oz sera pris dirigé vers le bas avec son origine en haut du tube.

2. Exprimer le nombre de molécules d'éther qui s'évaporent entre t et $t + \mathrm{d}t$.

3. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la hauteur d'éther $h(t)$. En déduire le temps nécessaire à l'évaporation de l'éther contenu sur une hauteur de 15 cm dans un tube de 20 cm.

4. Vérifier l'hypothèse de régime quasi permanent effectuée à la première question.

12 — Diffusion d'atomes dans les solides

On considère un phénomène de diffusion unidimensionnel, suivant la direction Ox, dans un milieu occupant tout le demi-espace $x > 0$. On appelle D le coefficient de diffusivité et $n(x, t)$ la concentration de particules en x à l'instant t. On note $\vec{j}$ le vecteur densité de courant particulaire.
À l'instant initial, la concentration en atomes est nulle partout sauf dans une faible épaisseur située en $x = 0$, où l'on implante une quantité Q d'atomes par unité de surface du matériau. Au cours de la diffusion, la quantité Q de particules présentes dans le matériau reste constante.

1. Établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $n(x, t)$.

2. On montre alors que la concentration de particules dans la matériau au cours de la diffusion est de la forme

$$n(x,t) = B(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{A(t)}},$$

où $A(t)$ et $B(t)$ sont des fonctions du temps.
On donne l'intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Déterminer les fonctions $A(t)$ et $B(t)$ en fonction de Q, D et t;

3. Déterminer la profondeur de diffusion h pour laquelle $n(h, t) = \frac{n(0,t)}{\mathrm{e}}$.

4. Au bout d'une heure, h vaut 5 µ m. Donner l'allure du profil des concentrations à $t_1 = 1$ heure et à $T_2 = 3$ heure.

13 — Bombe nucléaire

Des neutrons diffusent dans un barreau de plutonium cylindrique de section S et de longueur L. Du fait de réactions nucléaires, à chaque collision entre neutron et noyau de plutonium, il y a production de neutrons. Le taux de production par unité de temps et de volume est : $\sigma_\mathrm{n} = Kn$ où $n(x, t)$ est la densité de neutrons et $K = 104$ USI une constante positive. On admet que n s'annule aux extrémités, en $x = 0$ et $x = L$. On donne le coefficient de diffusion des neutrons : $D = 22\ \mathrm{m^2\cdot s^{-1}}$

1. Quelle est l'unité de K ? Établir l'équation différentielle vérifiée par la densité $n(x, t)$.

2. La résoudre et déterminer $n(x)$ en régime stationnaire. Montrer que seule une valeur de L est possible.

3. On considère maintenant un régime quelconque. Chercher $n(x, t)$ sous la forme $n(x, t) = f(x)g(t)$. Déterminer l'expression générale de $n(x, t)$ en fonction des données.

4. Si suite aux réactions en chaîne n diverge, la production d'énergie thermique diverge. À partir de quelle taille le système peut-il exploser s'il n'est pas contrôlé ?

14 — Évaporation d'un lac

On étudie la diffusion de la vapeur d'eau au-dessus d'un lac. La densité volumique $n(z)$ de molécules d'eau en phase vapeur ne dépend que de l'altitude z par rapport au lac. La pression partielle de vapeur d'eau à la surface du lac est $p(0) = 3{,}3$ kPa. Elle vaut $p(L) = 0{,}75p(0)$ à l'altitude $L = 10$ m.
La température est uniforme et égale à $T = 300$ K. LA vapeur d'eau est assimilée au gaz parfait. Le coefficient de diffusion de la vapeur d'eau dans l'air est $D = 2{,}2\times 10^{-5}\ \mathrm{m^2\cdot s^{-1}}$. On se place en régime permanent, alors que le déséquilibre entre $z = 0$ et $z = L$ est entretenu.

1. Déterminer la densité volumique de molécules d'eau $n(z)$ à une altitude z comprise entre 0 et L.

2. En déduire la masse d'eau s'évaporant du lac par unité de temps et par unité de surface.

15 — Diffusion de bactéries

On étudie une population de bactéries de densité $n(x, t)$ et de diffusivité $D = 10^{-10}$ SI.

1. Quelle est l'unité de D ? Calculer le temps de diffusion sur une longueur de 10 cm. Commenter.

2. On suppose que tous les $\tau = 1200$ s, une bactérie donne naissance à une autre. Établir l'équation vérifiée par $n(x, t)$.

3. Déterminer la solution $n(t)$ indépendante de x et telle que $n(0) = n_0$. Commenter.

4. On suppose maintenant que tous les $\tau = 1200$ s, une bactérie meurt proportionnellement au nombre moyen de bactéries présentes présentes à une distance a d'elle. Montrer que

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + d_1 n - d_2 n^2,$$

où l'on définira les constantes d_1 et d_2.

5. Quelles sont les solutions n_1 et n_2 indépendantes du temps et de l'espace ($n_1 < n_2$) ? Que représentent-elles physiquement ?

6. On suppose wque $n(x, t) = f(x - ct)$ avec $\lim\limits_{u\to-\infty} f(u) = n_2$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} f(u) = n_1$. Interpréter.

7. Trouver l'expression de c en fonction de

$$\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(u)^2\,\mathrm{d}u.$$

Interpréter.