# TD phénomènes de transport — Diffusion de particules

## 1 — Réaction photochimique

**1.** On effectue un bilan de particules entre deux sections $S$ d'abscisses $x$ et $x+\mathrm{d}x$, entre les instants $t$ et $t+\mathrm{d}t$. En régime stationnaire :

$$0=\Phi(x)\,\mathrm{d}t-\Phi(x+\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}t+pS\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

soit

$$0=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+pS\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Avec la loi de Fick, $\Phi(x)=j_N(x)S=-DS\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}$, d'où

$$0=DS\frac{\mathrm{d}^2n}{\mathrm{d}x^2}+pS.$$

La densité particulaire vérifie l'équation différentielle

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2n}{\mathrm{d}x^2}+\frac{p}{D}=0}\,.$$

**2.** L'équation précédente ne doit pas être vue comme une équation différentielle : elle consiste juste en la donnée de la dérivée seconde

$$\frac{\mathrm{d}^2n}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{p}{D}.$$

En intégrant deux fois, on obtient

$$n(x)=-\frac{p}{2D}x^2+Ax+B.$$

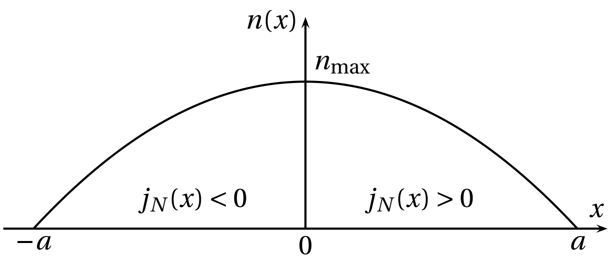
Les conditions aux limites étant paires [1], on a $A=0$. On en déduit

$$-\frac{p}{2D}a^2+B=0$$

d'où

$$\boxed{n(x)=\frac{p}{2D}(a^2-x^2)}\,.$$

Le profil de densité est parabolique, avec un maximum au centre : $n(0)=n_{\max}=\dfrac{pa^2}{2D}$.




1. On impose $n(-a)=n(a)$.

**3.** Le flux est donné par

$$\Phi(x)=j_N(x)S=-DS\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}=Spx.$$

Les particules diffusent du centre vers les extrémités, comme l'indique le signe de $\Phi(x)$ (on a $\Phi(x)>0$ pour $x>0$ et $\Phi(x)<0$ pour $x<0$) ; c'est bien le comportement attendu d'une diffusion des régions de densité élevée vers les régions de faible densité.
Le flux est maximum (en valeur absolue) aux extrémités, où les particules sont absorbées.

## 2 — Réacteur nucléaire

**1.** On considère une section $S$ comprise entre les abscisses $x$ et $x+\mathrm{d}x$.
À l'instant $t$, elle contient $\delta N(x,t)=n(x,t)S\,\mathrm{d}x$ neutrons. Entre $t$ et $t+\mathrm{d}t$, ce nombre varie de

$$\mathrm{d}(\delta N)=(n(x,t+\mathrm{d}t)-n(x,t))\,S\,\mathrm{d}x=\frac{\partial n(x,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}tS\,\mathrm{d}x.$$

Le nombre de neutrons reçu par le système entre $t$ et $t+\mathrm{d}t$ est

$$\begin{aligned}\delta^2N_{\text{reçu}}&=j(x,t)S\,\mathrm{d}t-j(x+\mathrm{d}x,t)S\,\mathrm{d}t\\&=-\frac{\partial j(x,t)}{\partial x}\,\mathrm{d}xS\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

soit avec la loi de Fick $j(x,t)=-D\dfrac{\partial n(x,t)}{\partial x}$ :

$$\delta^2N_{\text{reçu}}=D\frac{\partial^2n(x,t)}{\partial x^2}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Dans le volume $S\,\mathrm{d}x$, le nombre de neutrons absorbés pendant $\mathrm{d}t$ est

$$\frac{n(x,t)}{\tau}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Chaque neutron absorbé produisant $K$ neutrons, on observe l'apparition pendant $\mathrm{d}t$ de $K\dfrac{n(x,t)}{\tau}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ neutron. Le nombre de neutrons créés dans le système pendant $\mathrm{d}t$ est donc

$$\delta^2N_{\text{créé}}=(K-1)\frac{n(x,t)}{\tau}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Le bilan de particules s'écrit

$$\mathrm{d}(\delta N)=\delta^2N_{\text{reçu}}+\delta^2N_{\text{créé}}.$$

Après simplification par $S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$, on obtient

$$\boxed{\frac{\partial n(x,t)}{\partial t}=D\frac{\partial^2n(x,t)}{\partial x^2}+\frac{K-1}{\tau}n(x,t)}\,.$$

**2.** En régime permanent, l'équation précédente devient

$$\frac{\mathrm{d}^2 n(x)}{\mathrm{d}x^2}+\frac{K-1}{D\tau}n(x)=0.$$

Posons $\lambda=\sqrt{\dfrac{D\tau}{K-1}}$, grandeur ayant la dimension d'une longueur. On a $\dfrac{\mathrm{d}^2 n(x)}{\mathrm{d}x^2}+\dfrac{n(x)}{\lambda^2}=0$.
La solution générale est de la forme

$$n(x)=A\cos\left(\frac{x}{\lambda}\right)+B\sin\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

On a $n(0)=A=n_0$.
Les conditions aux limites s'écrivent

$$n(a)=A\cos\left(\frac{a}{\lambda}\right)+B\sin\left(\frac{a}{\lambda}\right)=0$$

et

$$n(-a)=A\cos\left(\frac{a}{\lambda}\right)-B\sin\left(\frac{a}{\lambda}\right)=0.$$

Comme $n(0)=A=n_0\neq 0$, il faut choisir $B=0$, d'où

$$n(x)=n_0\cos\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

On impose $n(\pm a)=0$, soit $\cos\left(\dfrac{a}{\lambda}\right)=0$. Il faut donc $\dfrac{a}{\lambda}=\dfrac{\pi}{2}+p\pi$ avec $p\in\mathbf{N}$. Seule la valeur $p=0$ convient, sinon $n(x)$ prendrait des valeurs négatives ce qui n'est physiquement pas acceptable (c'est un nombre de particules par unité de volume). On a donc

$$\boxed{n(x)=n_0\cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)}.$$

Le régime permanent n'est possible que pour $a=\dfrac{\pi\lambda}{2}$, c'est-à-dire pour une longueur $L_s=2a$ du réacteur donnée par

$$\boxed{L_s=\pi\sqrt{\frac{D\tau}{K-1}}}.$$

**3.** En remplaçant $n(x,t)$ par la forme proposée, l'équation aux dérivées partielles devient

$$-\frac{1}{T}f(x)=Df''(x)+\frac{K-1}{\tau}f(x),$$

soit

$$f''(x)+\left(\frac{K-1}{\tau D}+\frac{1}{TD}\right)f(x)=0. \qquad (1)$$

Compte tenu de la condition $n(\pm a,t)=0$, la fonction $f$ doit s'annuler en $x=-a$ et $x=+a$.
Selon le signe de $k=\dfrac{K-1}{\tau D}+\dfrac{1}{TD}$, la solution générale de (1) est

— affine si $k=0$ ;
— de la forme $\alpha\exp\left(\sqrt{-k}x\right)+\beta\exp\left(-\sqrt{-k}x\right)$ si $k<0$ ;
— de la forme $A\cos(kx)+B\sin(kx)$ si $k>0$.

La solution sinusoïdale est la seule qui peut s'annuler pour deux valeurs de $x$. On ne peut donc avoir que

$$k=\frac{K-1}{\tau D}+\frac{1}{TD}>0$$

et

$$f(x)=A\cos(\sqrt{k}x)+B\sin(\sqrt{k}x).$$

Comme précédemment, la parité de la solution impose $B=0$.
Les conditions aux limites imposent $\cos(\sqrt{k}a)=0$, d'où avec le même raisonnement que précédemment, $\sqrt{k}a=\dfrac{\pi}{2}$. On a donc

$$f(x)=A\cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)\quad\text{et}\quad\frac{\pi}{2a}=\sqrt{\frac{K-1}{\tau D}+\frac{1}{TD}}.$$

Pour que $n(x,t)$ reste fini quand $t\to\infty$, il faut que $T>0$.
D'après le résultat précédent,

$$\frac{1}{TD}=\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2-\frac{K-1}{\tau D}.$$

On a $T>0$ pour $\dfrac{\pi}{2a}>\sqrt{\dfrac{K-1}{\tau D}}$, c'est-à-dire pour une longueur du réacteur

$$L=2a<\pi\sqrt{\frac{\tau D}{K-1}}=L_s.$$

— Pour une longueur $L<L_s$, le réacteur s'éteint : $n(x,t)\to 0$ pour $t\to\infty$.
— Pour $L=L_s$, le réacteur fonctionne en régime permanent.
— Pour $L>L_s$, le réacteur s'emballe : $n(x,t)\to\infty$ pour $t\to\infty$.

## 3 — Source sphérique de neutrons

**1.** Sans absorption.

**1.a)** La densité de particules ne dépend que de $r$ et du temps : $n(r,t)$. Le vecteur $\vec{j}$ est donc radial, et sa composante ne dépend que de $r$ et du temps :

$$\vec{j}(M,t)=j(r,t)\vec{e}_r.$$

En effet, la loi de Fick s'écrit

$$\vec{j}=-D\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,n=-D\frac{\partial n}{\partial r}\vec{e}_r.$$

Le flux de $\vec{j}$ à travers une sphère de rayon $r$ s'écrit[2] :

$$\Phi(r,t)=\oiint_{M\in\Sigma(r)}\vec{j}(M,t)\cdot\mathrm{d}\vec{S}=4\pi r^2 j(r,t).$$

En remplaçant $j(r,t)$ par son expression à partir de la loi de Fick, on obtient

$$\boxed{\Phi(r,t)=-4\pi Dr^2\frac{\partial n}{\partial r}}.$$

2. Il faut savoir écrire ce résultat directement.

**1.b)** En régime stationnaire, écrivons le bilan de particules pour une sphère de centre $O$ et de rayon $r > r_0$ :

$$0 = \delta N_{\text{reçu}} + \delta N_{\text{créé}}$$

avec

$$\delta N_{\text{reçu}} = -\Phi(r)\,\mathrm{d}t$$

et

$$\delta N_{\text{créé}} = 4\pi N_0 r_0^2\,\mathrm{d}t\,,$$

d'où

$$0 = -\Phi(r)\,\mathrm{d}t + 4\pi N_0 r_0^2\,\mathrm{d}t\,.$$

On a donc

$$\boxed{\Phi(r) = 4\pi N_0 r_0^2}$$

**Le flux est indépendant de *r*.**

En utilisant l'expression de $\Phi$ établie en 1.a) à partir de la loi de Fick, on obtient [3]

$$-4\pi D r^2 \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r} = 4\pi N_0 r_0^2$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r} = -\frac{N_0 r_0^2}{D}\frac{1}{r^2}\,.$$

On en déduit

$$n(r) = \frac{N_0 r_0^2}{D}\frac{1}{r} + A$$

où $A$ est une constante. Physiquement, la densité de particules diffusantes tend vers 0 quand on s'éloigne à l'infini de la source : $\lim\limits_{r\to\infty} n(r) = A = 0$. On a donc

$$\boxed{n(r) = \frac{N_0 r_0^2}{D}\frac{1}{r}}\,.$$

**2.** Avec absorption.

**2.a)** La couche sphérique considérée a pour volume $\mathrm{d}\tau = 4\pi r^2\,\mathrm{d}r$. La densité $n(r,t)$ étant uniforme (au premier ordre) sur ce volume, le nombre de particules diffusantes présentes à l'instant $t$ est

$$\delta N(t) = n(r,t)\,\mathrm{d}\tau = 4\pi r^2 n(r,t)\,\mathrm{d}r\,.$$

Sa variation pendant $\mathrm{d}t$ vaut

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\delta N) &= \delta N(t+\mathrm{d}t) - \delta N(t)\\ &= 4\pi r^2\left[n(r,t+\mathrm{d}t) - n(r,t)\right]\mathrm{d}r = 4\pi r^2 \frac{\partial n}{\partial t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r\,.\end{aligned}$$

Le nombre de particules reçues pendant $\mathrm{d}t$ a été calculé à la question 1.b) :

$$\delta^2 N_{\text{éch}} = \Phi(r,t)\,\mathrm{d}t - \Phi(r+\mathrm{d}r,t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\partial\Phi}{\partial r}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t\,,$$

soit en utilisant l'expression de $\Phi(r,t)$ établie en 1.b)

$$\delta^2 N_{\text{éch}} = 4\pi D\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial n}{\partial r}\right)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t$$

Le nombre de neutrons « produits » (algébriquement ; il s'agit ici de capture, ce terme est donc négatif) est

$$\delta^2 N_{\text{prod}} = -K\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t = -4\pi K r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t\,.$$

Le bilan s'écrit

$$\mathrm{d}(\delta N) = \delta^2 N_{\text{éch}} + \delta^2 N_{\text{prod}}$$

soit

$$4\pi r^2\frac{\partial n}{\partial t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r = 4\pi D\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial n}{\partial r}\right)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t - 4\pi K r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t$$

soit après simplification

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{D}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial n}{\partial r}\right) - K}\,.$$

**2.b)** Dans le cas du régime stationnaire, l'équation aux dérivées partielles précédente ce ramène à une équation différentielle vérifiée par $n(r)$ :

$$\frac{D}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r}\right) - K = 0\,,$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{K}{D}r^2\,.$$

Une première intégration conduit à

$$r^2\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r} = \frac{K}{3D}r^3 + A\,,$$

où $A$ est une constante. Le flux est donné par

$$\Phi(r) = -4\pi D r^2\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r} = -\frac{4\pi K}{3}r^3 - 4\pi D A\,.$$

On sait exprimer le flux en $r = r_0$, à la surface de la source : $\Phi(r_0) = 4\pi N_0 r_0^2$, soit

$$-\frac{4\pi K}{3}r_0^3 - 4\pi D A = 4\pi N_0 r_0^2\,.$$

On en déduit

$$-4\pi D A = 4\pi N_0 r_0^2 + \frac{4\pi K}{3}r_0^3$$

que l'on remplace dans l'expression de $\Phi(r)$, et l'on obtient

$$\boxed{\Phi(r) = \frac{4\pi K}{3}\left(r_0^3 - r^3\right) + 4\pi N_0 r_0^2}\,.$$

Le flux n'est plus constant du fait des captures des neutrons : il décroît avec $r$, c'est-à-dire quand on s'éloigne de la source. Le flux s'annule pour $r = r_1$ tel que

$$\Phi(r_1) = \frac{4\pi K}{3}\left(r_0^3 - r_1^3\right) + 4\pi N_0 r_0^2 = 0\,,$$

3. On note une dérivée droite car en régime stationnaire, $n$ ne dépend que de la seule variable $r$.

soit

$$\boxed{r_1 = \left(r_0^3 + \frac{3N_0 r_0^2}{K}\right)^{1/3}}.$$

Même si ce n'est pas demandé dans l'énoncé, une saine habitude est de discuter de l'influence des divers paramètres dans l'expression obtenue, et justifiant par des considérations physiques simples, si c'est possible, les effets observés.

Ici, $r_1$ dépend de $r_0$, $N_0$ et $K$. Il est intéressant de discuter de l'influence de $N_0$ et $K$.

Le rayon $r_1$ est une fonction croissante de $N_0$ : si $N_0$ augmente, la source émet plus de particules ; il est logique qu'il faille une plus grande épaisseur de milieu absorbant pour annuler le flux.

Le rayon $r_1$ est une fonction décroissante de $K$ : si $K$ augmente, le milieu absorbe plus efficacement les neutrons ; il est logique qu'une épaisseur plus petite de ce milieu suffit pour annuler le flux.

## 4 — Résoudre l'équation de la diffusion

**1.** On remplace $n(x,t) = n_0 + f(x)h(t)$ dans l'équation de la diffusion :

$$f(x)g'(t) = Df''(x)g(t)$$

On écrit en séparant les variables :

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{D}\frac{g'(t)}{g(t)}.$$

Le membre de gauche ne dépend pas de $t$ ; le membre de droite ne dépend pas de $t$. Ces deux membres étant égaux, ils ne dépendent donc ni de $x$ ni de $t$, et se réduisent donc à une constante $A$. On a donc un système de deux équations différentielles :

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = A \qquad (2)$$

$$\frac{1}{D}\frac{g'(t)}{g(t)} = A. \qquad (3)$$

La forme générale de ma solution de chacune de ces équations différentielles dépend du signe de $A$. Nous allons éliminer certaines formes par des considérations physiques.

La solution générale de (3) est de la forme

$$g(t) = g_0\,\mathrm{e}^{ADt},$$

où $g_0$ est une constante. La densité $n(x,t)$ ne pouvant devenir infinie, il faut nécessairement que $A < 0$, soit $A = -k^2$. On a donc

$$g(t) = g_0\,\mathrm{e}^{-k^2Dt}.$$

L'équation (3) s'écrit alors $f''(x) + k^2 f(x) = 0$. La solution générale est de la forme

$$f(x) = \alpha \sin kx + \beta \cos kx$$

où $\alpha$ et $\beta$ sont deux constantes. On en déduit alors

$$n(x,t) = n_0 + g_0(\alpha \sin kx + \beta \cos kx)\,\mathrm{e}^{-k^2Dt}$$

Simplifions l'écriture des constantes en posant $a_1 = g_0\alpha$ et $a_2 = g_0\beta$ :

$$\boxed{n(x,t) = n_0 + (a_1 \sin kx + a_2 \cos kx)\,\mathrm{e}^{-k^2Dt}} \qquad (4)$$

**2.** Écrivons la condition initiale à partir de l'expression (4) (prise à $t = 0$ donc) :

$$n_0 + a_1 \sin kx + a_2 \cos kx = n_1 + n_2 \sin px$$

En identifiant chaque terme, on en déduit

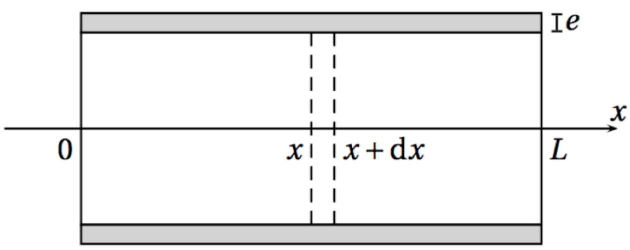
$$n_0 = n_1\,; \quad a_1 = n_2\,; \quad a_2 = 0\,; \quad p = k.$$

La densité a donc pour expression

$$\boxed{n(x,t) = n_1 + n_2 \sin(px)\,\mathrm{e}^{-p^2Dt}}.$$

La densité initiale fluctue sinusoïdalement autour de la valeur moyenne $n_1$. Sous l'effet de la diffusion, on observe un « étalement » des fluctuations, qui conduit à $\lim\limits_{t\to\infty} n(x,t) = n_0$ uniforme. Cette uniformisation se fait avec un temps caractéristique $\tau = \dfrac{1}{p^2D}$. Elle est d'autant plus rapide ($\tau$ petit) que $D$ est grand (prévisible : la diffusion est efficace), et que $p$ est grand, ce qui constitue à des ondulations de concentration initiale resserrées. La diffusion doit uniformiser les concentrations entre deux maxima successifs, c'est-à-dire sur une plus petite distance : le phénomène est plus rapide.

## 5 — Diffusion dans un tuyau poreux




Nous étudions le régime stationnaire ; il est donc inutile de chercher à exprimer la quantité de particules contenues dans ce volume : sa variation est nulle pendant $\mathrm{d}t$ : $\mathrm{d}(\delta N) = 0$. Comme il n'y a pas production de particules, le bilan s'écrit simplement

$$0 = \delta N_{\text{éch}}.$$

Le terme d'échange fait apparaître 3 flux :

**1.** le flux « entrant » à travers la section $S = \pi a^2$ située en $x$, soit $\Phi(x)$ ;

**2.** le flux « sortant » à travers la section $S = \pi a^2$ située en $x + \mathrm{d}x$, soit $\Phi(x + \mathrm{d}x)$ ;

**3.** le flux « sortant » à travers la surface latérale $2\pi a\,\mathrm{d}x$, soit[4] $\delta\Phi_{\mathrm{lat}}(x)$.

On a donc

$$\begin{aligned}0 &= \Phi(x)\,\mathrm{d}t - \Phi(x+\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}t - \delta\Phi_{\mathrm{lat}}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \delta\Phi_{\mathrm{lat}}(x)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Attention, il y a deux flux à considérer :

**1.** le flux « principal », qui décrit la diffusion selon $Ox$ dans le tuyau. Il est décrit par le vecteur densité de courant de particules $\vec{j}(x) = j(x)\vec{e}_s$. Ce phénomène est caractérisé par un coefficient de diffusion $D$ ;

**2.** le flux radial décrivant la fuite à travers la paroi poreuse ; le vecteur densité de courant correspondant est $\vec{j}_{\mathrm{lat}} = j_{\mathrm{lat}}\vec{e}_r$ (coordonnées cylindriques d'axe $Ox$). Ce phénomène est caractérisé par un coefficient de diffusion $D'$.

On a donc

$$\Phi(x) = j(x) \times \pi a^2 \quad \text{et} \quad \delta\Phi_{\mathrm{lat}}(x) = j_{\mathrm{lat}} \times 2\pi a\,\mathrm{d}x.$$

La loi de Fick s'écrit, pour le flux principal

$$j(x) = -D\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}.$$

Le flux secondaire est radial ; la loi de Fick s'écrit donc à l'intérieur de la paroi[5]

$$j_{\mathrm{lat}} = -D'\frac{\partial n}{\partial r}.$$

L'énoncé précise que la densité moléculaire est linéaire dans la paroi (de $r = a$ à $r = a + e$), soit

$$\frac{\partial n}{\partial r} = \frac{n(a+e,x) - n(a,x)}{e}.$$

La densité étant supposée nulle à l'extérieur, on a $n(a+e,x) = 0$. Sur la face intérieure de la paroi, la densité est égale à la densité dans le tube à la côte $x$ considérée, soit $n(a,x) = n(x)$. On a donc

$$\frac{\partial n}{\partial r} = -\frac{n(x)}{e}$$

et la loi de Fick s'écrit

$$j_{\mathrm{lat}} = D'\frac{n(x)}{e}.$$

On a donc

$$\Phi(x) = -\pi a^2 D\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x} \quad \text{et} \quad \delta\Phi_{\mathrm{lat}}(x) = 2\pi a D'\frac{n(x)}{e}\,\mathrm{d}x$$

et le bilan s'écrit

$$0 = \pi a^2 D\frac{\mathrm{d}^2 n}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x - 2\pi a D'\frac{n(x)}{e}\,\mathrm{d}x.$$

soit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 n}{\mathrm{d}x^2} - \frac{2D'}{aeD}n(x) = 0}.$$

Par analyse dimensionnelle, l'équation différentielle peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2 n}{\mathrm{d}x^2} - \frac{n(x)}{d^2} = 0$$

en posant

$$\boxed{d = \sqrt{\frac{aeD}{2D'}}}$$

homogène à une longueur.
On peut écrire la solution générale de cette équation différentielle sous la forme d'exponentielles ou de fonctions trigonométriques hyperboliques. L'une des conditions aux limites portant en $x = 0$, et le milieu n'étant pas infini, la détermination des constantes d'intégrations sera plus simple avec les fonctions trigonométriques hyperboliques :

$$n(x) = \alpha\cosh\left(\frac{x}{d}\right) + \beta\sinh\left(\frac{x}{d}\right).$$

La condition en $x = 0$ conduit à

$$n(0) = \alpha = n_0.$$

La condition en $x = L$ s'écrit alors

$$n(L) = n_0\cosh\left(\frac{L}{d}\right) + \beta\sinh\left(\frac{L}{d}\right) = n_1,$$

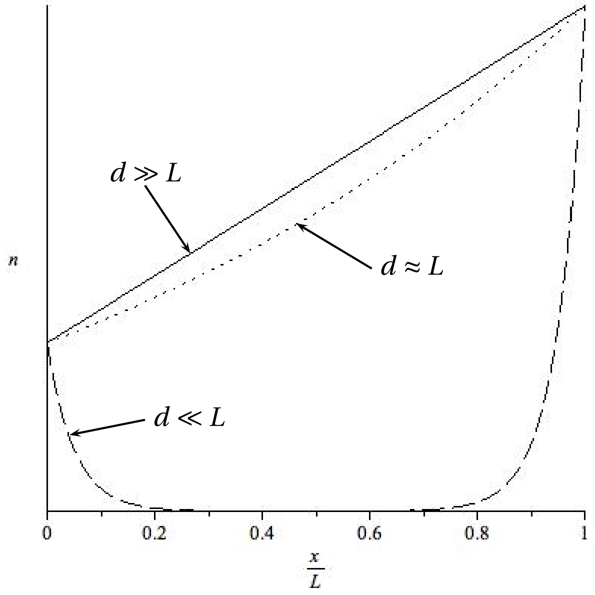
d'où

$$\beta = \frac{n_1 - n_0\cosh\left(\frac{L}{d}\right)}{\sinh\left(\frac{L}{d}\right)}.$$

On a finalement

$$\boxed{n(x) = n_0\cosh\left(\frac{x}{d}\right) + \frac{n_1 - n_0\cosh\left(\frac{L}{d}\right)}{\sinh\left(\frac{L}{d}\right)}\sinh\left(\frac{x}{d}\right)}.$$

4. La surface latérale étant un infiniment petit, on note $\delta\Phi_{\mathrm{lat}}$ le flux correspondant qui est aussi infiniment petit.
5. Dans la paroi, la densité de particules dépend de $r$, soit $n(x,r)$.




La longueur $d = \sqrt{\dfrac{aeD}{2D'}}$ représente la distance caractéristique des variations de $n(x)$ dues aux fuites latérales. La paroi est d'autant plus poreuse que le coefficient de diffusion $D'$ est grand ; la distance caractéristique $d$ est alors plus petite : la diminution de $n(x)$ due aux fuites s'observe plus rapidement.
Si $d \gg L$, on a dans le tube

$$\cosh\left(\frac{x}{d}\right) \approx 1 \quad \text{et} \quad \sinh\left(\frac{x}{d}\right) \approx \frac{x}{d}.$$

L'expression de la densité s'écrit alors

$$n(x) \approx n_0 + (n_1 - n_0)\frac{x}{L}.$$

On retrouve alors le profil linéaire caractéristique du régime stationnaire unidimensionnel en l'absence de fuites latérales.
Ce résultat était prévisible : le cas $d \gg L$, que l'on peut considérer[6] comme $d \to \infty$, soit $D' \to 0$, correspond à une absence de fuite.
*Remarque :* le cas $d \ll L$ correspond à un tuyau très poreux. Comme on peut le voir qualitativement sur le graphe, la concentration en particules diffusantes est quasiment nulle à l'intérieur du tuyau du fait des fuites ; elle ne prend de valeur notable qu'au voisinage des extrémités où on lui impose une valeur non nulle.

## 6 — Sédimentation

**1.** La vitesse des particules s'écrit $\vec{v} = -v\,\vec{e}_z$ ; elles sont donc soumises à la force de frottement visqueux

$$\vec{F} = -6\pi\eta R\vec{v} = 6\pi\eta R v\,\vec{e}_z,$$

Ainsi qu'à leur poids

$$\vec{P} = -\frac{4}{3}\pi R^3 \rho g\,\vec{e}_z$$

et à la poussée d'Archimède

$$\vec{\Pi}_{\mathrm{A}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0 g\,\vec{e}_z.$$

Lorsque les particules ont atteint leur vitesse limite $\vec{v}_\ell = -v_\ell\,\vec{e}_z$, le principe de la dynamique appliqué à une particule s'écrit alors, en projection selon $\vec{e}_z$ :

$$0 = \frac{4}{3}\pi R^3(\rho_0 - \rho) + 6\pi\eta R v_\ell,$$

d'où

$$\boxed{\vec{v}_\ell = -\frac{2}{9}\frac{R^2}{\eta}(\rho - \rho_0)g\,\vec{e}_z}.$$

Dans ce problème, les particules chutent car $\rho > \rho_0$ (elles sont plus denses que l'eau) ; il s'agit d'un phénomène de sédimentation.

**2.** Si $n(z)$ est la densité particulaire à la cote $z$, le vecteur densité de courant correspondant à ce mouvement de sédimentation[7] est $\vec{j}_{\mathrm{e}} = n(z)\vec{v}_\ell$, soit

$$\boxed{\vec{j}_{\mathrm{e}} = -\frac{2}{9}\frac{n(z)R^2}{\eta}(\rho - \rho_0)g\,\vec{e}_z}.$$

**3.** La chute des particules conduit à une densité qui augmente vers le fond du récipient ($\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z} > 0$). Ce gradient de densité donne naissance à un courant de diffusion, vers le haut, donc le vecteur densité de courant est donné par la loi de Fick

$$\boxed{\vec{j}_{\mathrm{d}} = -D\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z}\vec{e}_z}.$$

**4.** Le flux de particules résultant du mouvement de chute et de la diffusion ascendante est décrit par le vecteur densité de flux

$$\vec{J} = J(z)\vec{e}_z = \vec{j}_{\mathrm{e}} + \vec{j}_{\mathrm{d}}.$$

En régime permanent, $J(z)$ est indépendant de $z$. Il suffit en effet de faire un bilan sur une tranche de section $S$, comprise entre $z$ et $z + \mathrm{d}z$ : le nombre de particules qu'elle contient ne varie pas au cours du temps, et

$$\delta N_{\text{reçu}} = J(z)S\,\mathrm{d}t - J(z+\mathrm{d}z)S\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}z}S\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t = 0,.$$

On a donc $\dfrac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}z} = 0$, soit $J(z) = J = \text{cte}$.
Les conditions aux limites imposent $J(0) = 0$ dans le fond du récipient. On a donc pour toute valeur de $z$

$$J(z) = 0 = -\frac{2}{9}\frac{n(z)R^2}{\eta}(\rho - \rho_0)g - D\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z}.$$

6. Une grandeur ne peut être considérée comme « très grande » qu'en la comparant à une grandeur caractéristique du système.
7. Ce n'est pas un vecteur densité de courant de *diffusion*, mais un vecteur densité de courant associé au mouvement de sédimentation.

La densité vérifie l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z}+\frac{2R^2(\rho-\rho_0)g}{9\eta D}n(z)=0\,.$$

On peut faire apparaître une longueur caractéristique[8]

$$h=\frac{9\eta D}{2R^2(\rho-\rho_0)g}\,.$$

La solution s'écrit alors

$$\boxed{n(z)=n_0\exp\left(-\frac{z}{h}\right)}\,.$$

**5.** Les particules sont soumises à leur « poids apparent », résultante de leur poids et de la poussée d'Archimède

$$\vec{P}_\mathrm{a}=\vec{P}+\vec{\Pi}_\mathrm{A}=-\frac{4}{3}\pi R^3(\rho-\rho_0)g\,\vec{e}_z=P_\mathrm{a}\,\vec{e}_z\,.$$

Cette force dérive d'une énergie potentielle déterminée par[9] $\delta W=P_\mathrm{a}\,\mathrm{d}z=-\mathrm{d}E_\mathrm{p}$, d'où

$$E_\mathrm{p}=\frac{4}{3}\pi R^3(\rho-\rho_0)gz\,.$$

À l'équilibre, la distribution des particules suit la loi de Boltzmann[10]

$$n(z)=n_0\exp\left(-\frac{E_\mathrm{p}}{k_\mathrm{B}T}\right).$$

En identifiant avec l'expression de la question précédente, on a

$$\frac{9\eta D}{2R^2(\rho-\rho_0)g}=\frac{3k_\mathrm{B}T}{4\pi R^3(\rho-\rho_0)g}$$

d'où

$$\boxed{D=\frac{k_\mathrm{T}}{6\pi R\eta}}\,.$$

---

## 7 — Taille critique d'une bactérie

### 1. Étude préliminaire

**1.a)** La loi de Fick s'écrit $\vec{j}=-D\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,n$, soit en projetant selon $\vec{e}_r$ :

$$\boxed{j(r)=-D\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r}}\,.$$

**1.b)** Soit $\Sigma$ la sphère de rayon $r$ ; le flux $\oiint_\Sigma \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$ est un flux *sortant* (convention pour une surface fermée). Il représente donc le nombre de particules sortant par unité de temps dans la sphère. Le nombre de particules entrant par unité de temps s'écrit donc

$$\Phi(r)=-\oiint_\Sigma \vec{j}(r)\cdot\mathrm{d}\vec{S}\,,$$

soit $\boxed{\Phi(r)=-4\pi r^2 j(r)}$.

On est en régime permanent ; on peut écrire que le nombre de molécules comprises entre deux sphères de rayons $r_1$ et $r_2$ ne varie pas pendant $\mathrm{d}t$, soit

$$\Phi(r_1)-\Phi(r_2)=0\quad\forall(r_1,r_2)\,.$$

Le flux $\Phi$ ne dépend donc pas du rayon $r$ de la sphère considérée.

**1.c)** D'après la question précédente, on a

$$\Phi=4\pi Dr^2\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r}\,,$$

soit

$$\mathrm{d}n=\frac{\Phi}{4\pi D}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}\,.$$

Pour $r\to\infty$, on a $n\to n_0$ ; on a donc, en notant $n(R)=n_\mathrm{s}$ :

$$\int_{n_\mathrm{s}}^{n_0}\mathrm{d}n=\frac{\Phi}{4\pi D}\int_R^{+\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}\,,$$

d'où

$$\boxed{n_\mathrm{s}=n_0-\frac{\Phi}{4\pi DR}}\,.$$

### 2. Taille critique de la bactérie

**2.a)** Le nombre de molécules d'oxygène consommées par unité de temps et par unité de masse de bactérie est $\mathcal{N}_\mathrm{A}\mathcal{A}$ (car $\mathcal{A}$ est compté en moles). La masse de la bactérie étant $\frac{4}{3}\mu\pi R^3$, on a donc

$$\boxed{\Phi=\frac{4}{3}\pi\mu R^3\mathcal{N}_\mathrm{A}\mathcal{A}}\,.$$

**2.b)** En remplaçant $\Phi$ par son expression, $n_\mathrm{s}$ s'écrit

$$\boxed{n_\mathrm{s}=n_0-\frac{\mu\mathcal{N}_\mathrm{A}\mathcal{A}}{3D}R^2}\,.$$

Discussion sur l'influence des paramètres :

- si $\mu$ ou $R$ augmente, la masse de la bactérie augmente ; il en est de même pour la consommation de dioxygène. La densité en $O_2$ au niveau de la surface de la bactérie est donc plus faible ;
- de même si $\mathcal{A}$ augmente, la consommation totale de $O_2$ de la bactérie augmente, d'où une valeur plus faible de $n_\mathrm{s}$ ;
- si $D$ augmente, le transport par diffusion de $O_2$ jusqu'à la surface de la bactérie est plus efficace ; on obtient donc une valeur plus élevée de $n_\mathrm{s}$.

Pour que la bactérie ne suffoque pas, il faut $n_\mathrm{s}>0$, d'où

$$\boxed{R<R_\mathrm{c}\quad\text{avec}\quad R_\mathrm{c}=\sqrt{\frac{3Dn_0}{\mu\mathcal{N}_\mathrm{A}\mathcal{A}}}}\,.$$

8. Les deux termes de l'équation différentielle ont même dimension.
9. On peut aussi considérer que les particules ont une masse apparente $m'=\frac{4}{3}\pi R^3(\rho-\rho_0)$, d'où $\vec{P}\mathrm{a}=m'\vec{g}=-m'g\vec{e}_z$ et $E_\mathrm{p}=m'gz$.
10. Vue en PCSI en thermodynamique…

## 8 — Diffusion à travers un tuyau

**1.** En régime stationnaire, le profil de concentration (ou de densité volumique de particules, ce qui est la même chose ici) est affine dans le tube.

Le flux du gaz $A$ dans le tube est donné par

$$\Phi_A = j_N(A)S = -D\frac{\mathrm{d}C_A}{\mathrm{d}x}S.$$

Le profil étant affine, on peut identifier la dérivée et le taux d'accroissement, soit

$$\frac{\mathrm{d}C_A}{\mathrm{d}x} = \frac{C_{2A}-C_{1A}}{L}$$

en considérant le récipient (1) en $x=0$ et le récipient (2) en $x=L$. On a donc

$$\boxed{\Phi_A = \frac{DS}{L}(C_{1A}-C_{2A})}.$$

On établit de même pour le gaz $B$ :

$$\boxed{\Phi_B = \frac{DS}{L}(C_{1B}-C_{2B})}.$$

**2.** Le compartiment (1) contient $N_{1A}(t) = C_{1A}(t)V$ particules du gaz $A$. Le bilan de particules de gaz $A$ dans le compartiment (1) pendant $\mathrm{d}t$ s'écrit

$$\mathrm{d}N_{1A} = \delta N_{A,\text{reçu}}\,\mathrm{d}t = -\Phi_A\,\mathrm{d}t$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}C_{1A}}{\mathrm{d}t} = -\frac{DS}{VL}[C_{1A}(t)-C_{2A}(t)]. \tag{5}$$

Le nombre total de particules de gaz $A$ dans les deux compartiments est

$$N_A = N_{1A}(t)+N_{2A}(t) = [C_{1A}(t)+C_{2A}(t)]V.$$

La quantité totale est conservée et vaut $N_A = C_0V$. On a donc

$$C_{1A}(t)+C_{2A}(t) = C_0. \tag{6}$$

On en déduit $\dfrac{\mathrm{d}C_{1A}}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}C_{2A}}{\mathrm{d}t}=0$, d'où

$$\frac{\mathrm{d}C_{2A}}{\mathrm{d}t} = \frac{DS}{VL}[C_{1A}(t)-C_{2A}(t)]. \tag{7}$$

En soustrayant l'équation (7) de l'équation (5), on a

$$\frac{\mathrm{d}(C_{1A}-C_{2A})}{\mathrm{d}t} = -\frac{2DS}{VL}[C_{1A}(t)-C_{2A}(t)].$$

Le temps caractéristique de l'évolution régie par cette équation différentielle est

$$\boxed{\tau = \frac{VL}{2DS}}.$$

En posant $f_A(t) = C_{1A}(t)-C_{2A}(t)$, on a donc

$$\frac{\mathrm{d}f_A}{\mathrm{d}t}+\frac{f_A(t)}{\tau}=0,$$

d'où

$$f_A(t) = f_A(0)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

soit

$$C_{1A}(t)-C_{2A}(t) = C_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}.$$

En additionnant cette équation à l'équation (6) on obtient

$$2C_{1A}(t) = C_0 + C_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

d'où

$$\boxed{C_{1A}(t) = \frac{C_0}{2}\left[1+\mathrm{e}^{-t/\tau}\right]}.$$

L'équation (6) permet d'en déduire

$$\boxed{C_{2A}(t) = \frac{C_0}{2}\left[1-\mathrm{e}^{-t/\tau}\right]}.$$

On fait les mêmes calculs pour le gaz $B$, seules les conditions initiales changent. On a donc

$$C_{1B}(t)-C_{2B}(t) = [C_{1B}(0)-C_{2B}(0)]\,\mathrm{e}^{-t/\tau} = -C_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

et

$$C_{1B}(t)+C_{2B}(t) = C_0$$

On en déduit

$$\boxed{C_{1B}(t) = \frac{C_0}{2}\left[1-\mathrm{e}^{-t/\tau}\right]}$$

et

$$\boxed{C_{2B}(t) = \frac{C_0}{2}\left[1+\mathrm{e}^{-t/\tau}\right]}.$$

**3.** On calcule

$$\tau = \frac{14\times10^{-3}\times0{,}1}{2\times1{,}7\times10^{-5}\times10^{-4}}$$

soit $\tau = 4{,}1\times10^5$ s (ou $\tau = 114$ h).

➤ Discussion non demandée : validité de l'hypothèse du régime quasi-stationnaire.

Lorsque les particules de gaz $A$ diffusion du compartiment (1) au compartiment (2), les conditions aux limites aux extrémités du tube varient avec un temps caractéristique $\tau$.

Dans l'hypothèse du régime quasi-stationnaire, on suppose que le profil de concentration reste affine à chaque instant dans le tube. Lorsque les valeurs aux extrémités sont modifiées, le profil dans le tube évolue vers un profil affine avec un temps $\tau_{\text{diff}}$ caractéristique de la diffusion dans un milieu de longueur $L$; on a vu en cours que $\tau_{\text{diff}} = \dfrac{L^2}{D}$. On peut considérer que à chaque instant la concentration a eu le temps d'évoluer vers un profil affine si $\tau_{\text{diff}}$ est très petit devant $\tau$, soit

$$\frac{L^2}{D} \ll \frac{VL}{2DS}$$

ou $SL \ll V/2$. Cela revient à dire qu'il faut que le volume du tube soit très petit devant le volume des compartiments.

On a ici $SL = 0{,}01$ L, donc $SL \ll V/2$ : l'hypothèse du régime quasi-stationnaire est justifiée.

## 9 — Élargissement d'une tache d'encre

**1.** Il s'agit de calculer les dérivées partielles pour voir si la fonction proposée vérifie l'équation de la diffusion.

On calcule d'une part

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = \frac{A}{\sqrt{D}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)\left[-\frac{1}{2t^{3/2}} + \frac{x^2}{4Dt^{5/2}}\right]$$

soit

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = n(x,t)\left[-\frac{1}{2t} + \frac{x^2}{4Dt^2}\right].$$

D'autre part

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial x} = \left(-\frac{2x}{4Dt}\right) n(x,t)$$

et

$$\frac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2} = \frac{4x^2}{16D^2t^2} n(x,t) - \frac{2n(x,t)}{4Dt} = \left[\frac{x^2}{4D^2t^2} - \frac{1}{2Dt}\right] n(x,t).$$

On a donc

$$D\frac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2} = \left[\frac{x^2}{4D^2t^2} - \frac{1}{2Dt}\right] n(x,t) = \frac{\partial n(x,t)}{\partial t}.$$

La solution proposée vérifie bien l'équation de la diffusion.

**2.** La condition initiale est $n(x,0) = 0$. En s'intéressant à la dépendant temporelle de l'expression, on constate qu'étudier $\lim\limits_{t\to 0} n(x,t)$ revient à étudier, si $x \neq 0$

$$\lim_{u->0} \frac{1}{\sqrt{u}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{u}}$$

soit en posant $y = 1/\sqrt{u}$

$$\lim_{y\to\infty} \frac{y}{\mathrm{e}^{y^2}} = 0.$$

On a bien $n(x,0) = 0$.

Les conditions aux limites $n(\pm\infty, t) = 0$ reviennent à considérer

$$\lim_{x\to\pm\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) = 0.$$

La solution proposée vérifie les conditions aux limites.

**3.** On a $n(0,t) = \dfrac{A}{\sqrt{Dt}}$. La définition de la largeur de la goutte s'écrit

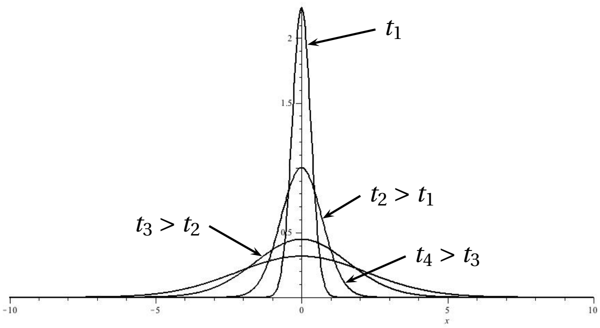
$$\frac{A}{\sqrt{Dt}} \exp\left(-\frac{L^2}{16Dt}\right) = \frac{A}{100\sqrt{Dt}}$$

soit $\exp\left(\dfrac{L^2}{16Dt}\right) = 100$, d'où $L^2 = 16 \ln 100 Dt = 32 \ln 10 Dt$. On a donc

$$L(t) = 4\sqrt{2\ln 10}\sqrt{Dt}.$$

On retrouve bien la variation $L(t) \propto \sqrt{Dt}$ vue en cours par analyse dimensionnelle.

**4.** Représentons $n(x,t)$ en fonction de $x$ pour diverses valeurs de $t$ :




On observe un étalement de l'encre au cours du temps.

## 10 — Extraction d'un gaz naturel

**1.** On nous donne le vecteur densité de courant **massique**; nous allons donc effectuer un bilan de masse (grandeur extensive).

Le système considéré est le gaz contenu dans la tranche comprise entre les abscisses $x$ et $x + \mathrm{d}x$. Le volume de roche est $S\mathrm{d}x$, et le volume de gaz contenu dans cette tranche est $qS\mathrm{d}x$. L'équation d'état du gaz parfait s'écrit alors

$$p(x,t)qS\,\mathrm{d}x = \delta n(x,t)RT$$

où $\delta n(x,t)$ est la quantité de gaz (en moles) contenue dans cette tranche, soit

$$\delta n(x,t) = \frac{p(x,t)qS\,\mathrm{d}x}{RT}.$$

La masse de gaz contenue dans la tranche est donnée par $\delta m(x,t) = n(x,t)M$, soit

$$\delta m(x,t) = p(x,t)\frac{MqS}{RT}\,\mathrm{d}x.$$

Pendant $\mathrm{d}t$, la masse de gaz dans la tranche varie de

$$\mathrm{d}(\delta m) = \delta m(x, t+\mathrm{d}t) - m(x,t) = \big(p(x,t+\mathrm{d}t) - p(x,t)\big)\frac{MqS}{RT}\,\mathrm{d}x$$

soit

$$\mathrm{d}(\delta m) = \frac{Mq}{RT}\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

La masse de gaz reçue par la tranche pendant $\mathrm{d}t$ s'écrit

$$\delta^2 m_{\text{reçu}} = j(x,t)S\,\mathrm{d}t - j(x+\mathrm{d}x,t)S\,\mathrm{d}t = -\frac{\partial j(x,t)}{\partial x}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

soit en utilisant la loi de Darcy

$$\delta^2 m_{\text{reçu}} = \frac{k}{\nu}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Le bilan de masse s'écrit

$$\mathrm{d}(\delta m) = \delta^2 m_{\text{reçu}},$$

soit

$$\frac{Mq}{RT}\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = \frac{k}{\nu}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}.$$

On a

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = \frac{kRT}{Mq\nu}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}.$$

La pression vérifie bien l'équation

$$\boxed{\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}} \quad \text{avec} \quad \boxed{D = \frac{kRT}{Mq\nu}}.$$

On retrouve **l'équation de la diffusion**.

**2.** On remplace $p(x,t)$ par l'expression proposée dans l'équation de la diffusion.

On a d'une part

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{\tau}p_1\sin(\alpha x)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

et d'autre part

$$\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} = -\alpha^2 p_1 \sin(\alpha x)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}.$$

On en déduit $\frac{1}{\tau} = \alpha^2 D$, d'où

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{\sqrt{D\tau}}}.$$

On retrouve la distance caractéristique du phénomène de diffusion.

**3.** La solution proposée vérifie la condition

$$p(0,t) = p_0.$$

La roche imperméable située en $x = L$ impose un flux nul à cette abscisse, soit

$$j(L,t) = 0.$$

En utilisant la loi de Darcy, cette condition s'écrit

$$\frac{\partial p}{\partial x}(L,t) = 0 p_1 \alpha\cos(\alpha L)\,\mathrm{e}^{-t/\tau},$$

soit $\cos(\alpha L) = 0$. Il faut donc

$$\alpha L = \frac{\pi}{2} + n\pi\,; \quad n \in \mathbf{N}.$$

La plus petite valeur est $\boxed{\alpha = \frac{\pi}{2L}}$. On a alors

$$p(x,t) = p_0 + p_1\sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\mathrm{e}^{-t/\tau}.$$

**4.** La masse contenue dans la tranche comprise entre $x$ et $x + \mathrm{d}x$ est

$$\begin{aligned}\delta m(x,t) &= \frac{MqS}{RT}p(x,t)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{MqS}{RT}\left[p_0 + p_1\sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\mathrm{e}^{-t/\tau}\right]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

La masse totale est

$$\begin{aligned}m(t) &= \int_0^L \frac{MqS}{RT}\left[p_0 + p_1\sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\mathrm{e}^{-t/\tau}\right]\mathrm{d}x\\ &= \frac{MqS}{RT}\left(p_0 L - p_1\frac{2L}{\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right]_0^L \mathrm{e}^{-t/T}\right)\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{m(t) = \frac{MqSL}{RT}\left(p_0 + \frac{2p_1}{\pi}\mathrm{e}^{-t/\tau}\right)}.$$

**5.** La masse initialement contenue dans le gisement est

$$m(0) = \frac{MqSL}{RT}\left(p_0 + \frac{2}{\pi}p_1\right).$$

On a donc

$$\frac{m(t)}{m(0)} = \frac{p_0 + \frac{2}{\pi}p_1\,\mathrm{e}^{-t/\tau}}{p_0 + \frac{2}{\pi}p_1}.$$

On cherche l'instant $t^*$ tel que

$$m(t^*) = 0{,}05\,m(0) = \frac{m(0)}{20},$$

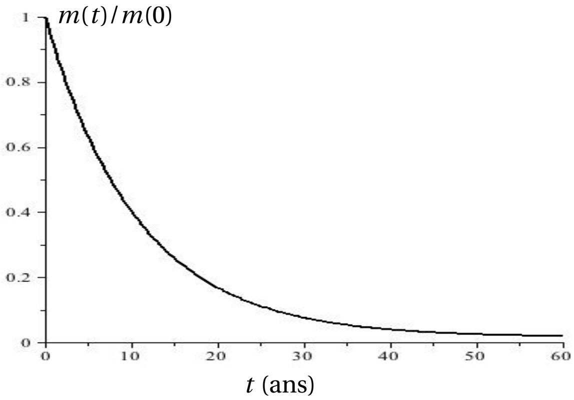
soit comme $p_1 = 100 p_0$ :

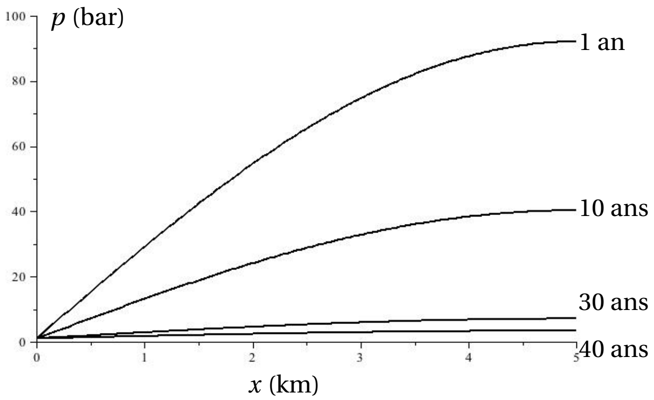
$$1 + \frac{200}{\pi}\mathrm{e}^{-t/\tau} = 0{,}05\left(1 + \frac{200}{\pi}\right).$$

On en déduit $\mathrm{e}^{-t/\tau} = \frac{1}{20} - \frac{00{,}95}{200}\pi$, d'où

$$t \approx 3{,}4\tau \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{1}{\alpha^2 D} = \frac{4L^2}{D\pi^2}.$$

On calcule $\tau \approx 1{,}1 \times 10^9$ s soit $\boxed{\tau \approx 36\ \text{ans}}$.

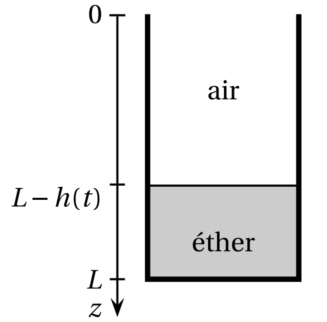





## 11 — Évaporation de l'éther

**Analyse préliminaire :**

Nous avons dans un tube de l'air au-dessus d'éther liquide. À la surface du liquide, on a de la vapeur d'éther à la pression de vapeur saturante ; en haut du tube, il n'y a pas de vapeur d'éther dans l'air. On a donc un gradient de concentration de vapeur d'éther, décroissant vers le haut. Il apparaît alors un phénomène de diffusion de l'éther vers le haut dans l'air, alimenté en bas par l'évaporation de l'éther. Nous observons donc un phénomène dynamique (variable dans le temps) où la quantité d'éther liquide diminue au cours du temps.
L'évaporation étant « lente », nous pourrons utiliser les résultats établis en régime stationnaire.




**1.** En régime permanent, la concentration d'éther (particules diffusantes) varie de façon affine avec la hauteur[11] : $n(z) = Az + B$.
Comme on néglige la quantité d'éther en haut du tube : $n(0) = 0 = B$.
À la surface du liquide (à la cote $z = h(t)$ avec l'orientation imposée pour l'axe $Oz$), l'éther est à la pression $P_s$ et à la température $T_0$. La quantité de molécule dans le volume $V$ est $n(z)V$, soit en moles $\dfrac{n(z)}{\mathcal{N}_A}V$. L'équation d'état du gaz parfait s'écrit

$$P_s V = \frac{n(L-h(t))}{\mathcal{N}_A} V R T_0 .$$

On a donc

$$n(L-h(t)) = \frac{P_s \mathcal{N}_A}{RT_0} = A(L-h(t))$$

d'où $A = \dfrac{P_s\mathcal{N}_A}{RT_0(L-h(t))}$ et

$$\boxed{n(z) = \frac{P_s\mathcal{N}_A}{RT_0}\frac{z}{L-h(t)}} .$$

**2.** Il existe un vecteur densité de courant de diffusion donné par la loi de Fick :

$$\vec{j} = -D\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z}\vec{e}_z$$

soit

$$\vec{j} = -\frac{D}{L-h(t)}\frac{P_s\mathcal{N}_A}{RT_0}\vec{e}_z .$$

Pour chercher la quantité de particule traversant la surface de l'éther *vers le haut* (évaporation), nous orientons cette surface vers le haut : $\vec{S} = -S\vec{e}_z$. Le nombre de molécules d'éther qui s'évaporent entre $t$ et $+\mathrm{d}t$ est alors donné par

$$\mathrm{d}n = \vec{j}\cdot\vec{S}\,\mathrm{d}t$$

soit

$$\boxed{\mathrm{d}n = \frac{D}{L-h(t)}\frac{P_s\mathcal{N}_A}{RT_0}S\,\mathrm{d}t} .$$

**3.** Les $\mathrm{d}n$ molécules d'éther qui s'évaporent occupaient dans l'état liquide le volume $\mathrm{d}V$. Nous avons $\frac{\mathrm{d}n}{\mathcal{N}_A}$ moles, qui ont une masse

$$\mathrm{d}m = \frac{\mathrm{d}n}{\mathcal{N}_A}M = \mu\,\mathrm{d}V .$$

Le volume de l'éther qui s'évapore pendant $\mathrm{d}t$ est donc

$$\mathrm{d}V = \frac{M\,\mathrm{d}n}{\mu\mathcal{N}_A} .$$

La hauteur de liquide diminuant, on a $\mathrm{d}h < 0$ ; le volume d'éther qui s'évapore est donc donné par

$$\mathrm{d}V = -S\,\mathrm{d}h .$$

On a donc

$$\mathrm{d}h = -\frac{M\,\mathrm{d}n}{\mu\mathcal{N}_A S} = -\frac{DM}{L-h(t)}\frac{P_s}{\mu RT_0}\,\mathrm{d}t .$$

On en déduit l'équation différentielle

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{DMP_s}{\mu RT_0}\frac{1}{h(t)-L}} .$$

On peut écrire

$$[h(t)-L]\,\mathrm{d}h = \frac{DMP_s}{\mu RT_0}\,\mathrm{d}t .$$

11. Résultat vu en cours, caractéristique du régime stationnaire en régime unidimensionnel en cartésiennes.

En notant $h_0$ la hauteur initiale d'éther, on a

$$\int_{h_0}^{h(t)} [h'-L]\,\mathrm{d}h' = \frac{DMP_\mathrm{s}}{\mu RT_0}\int_0^t \mathrm{d}t\,,$$

d'où

$$\left[\frac{(h'-L)^2}{2}\right]_{h_0}^{h(t)} = \frac{DMP_\mathrm{s}}{\mu RT_0}\,t\,,$$

soit

$$(h(t)-L)^2-(h_0-L)^2 = \frac{2DMP_\mathrm{s}}{\mu RT_0}\,t\,.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}(h(t)-L)^2 &= (h_0-L)^2+\frac{2DMP_\mathrm{s}}{\mu RT_0}\,t\\ &= (h_0-L)^2\left[1+\frac{2DMP_\mathrm{s}}{\mu RT_0(h_0-L)^2}\,t\right] = (h_0-L)^2\left[1+\frac{t}{\tau}\right],\end{aligned}$$

en posant

$$\tau = \frac{\mu RT_0(h_0-L)^2}{2DMP_\mathrm{s}}\,,$$

grandeur caractéristique homogène à un temps.
On a donc

$$h(t) = L+(h_0-L)\sqrt{1+\frac{t}{\tau}}\,.$$

L'éther est entièrement évaporé à l'instant $t_\mathrm{f}$ tel que $h(t_\mathrm{f})=0$, soit

$$t_\mathrm{f} = \tau\left[\frac{L^2}{(L-h_0)^2}-1\right].$$

*Application numérique* : on a

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{626\times 8{,}31\times 293\times 0{,}05^2}{2\times 1{,}5\times 10^{-5}\times 74{,}1\times 10^{-3}\times 0{,}583\times 10^5}\\ &= 2{,}94\times 10^4\ \mathrm{s}\,.\end{aligned}$$

On trouve alors $t_\mathrm{f}\approx 4{,}41\times 10^5$ s, ce qui fait un peu plus de 5 jours (122 heures et 30 minutes).

**4.** La durée caractéristique de la diffusion sur une distance $L=20$ cm est $\tau_\mathrm{diff}=\dfrac{L^2}{D}\approx 44$ minutes.
On a $\tau_\mathrm{diff}\ll t_\mathrm{f}$ : l'évolution (variation de la hauteur d'éther) est très lente par rapport au phénomène de diffusion, et l'hypothèse de régime quasi-permanent est justifiée.

---

## 15 — Diffusion de bactéries

**1.** Le coefficient $D$ s'exprime en $\mathrm{m^2\cdot s^{-1}}$ (cf. cours).
En raisonnant sur l'équation de la diffusion $\dfrac{\partial n}{\partial t}=D\dfrac{\partial n}{\partial x}$ en ordre de grandeur, on a

$$D\approx\frac{L^2}{T}\,.$$

Le temps caractéristique pour que la diffusion se réalise sur une distance $L=10$ cm est donc

$$T\approx\frac{L^2}{D}=\frac{10^{-2}}{10^{-10}}$$

soit $T\approx 1\times 10^8$ s $\approx 3$ ans.
La diffusion de bactérie est très lente à l'échelle macroscopique, et ne peut être la cause de leur étalement dans l'espace. Ce dernier sera causé par un déplacement du milieu (convection) ou par un déplacement propre des bactéries (c'est vivant !).

**2.** D'après l'énoncé, le nombre de bactérie est doublé tous les $\tau=1200$ s. Une bactérie donnant naissance à une bactérie, le nombre de bactéries « créées » pendant $\mathrm{d}t$ dans un volume $\mathrm{d}\tau$ est proportionnel au nombre de bactéries présentes dans ce volume, soit une variation du nombre de bactéries (on ne prend en compte que les naissances)

$$\mathrm{d}N = \mathrm{d}n\,\mathrm{d}\tau = r\,n\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t\,.$$

Le terme de naissances est donc décrit par

$$\mathrm{d}n = r\,n\,\mathrm{d}t$$

d'où $n(t)=n(0)\,\mathrm{e}^{rt}$.
Par définition de $\tau$, on a $n(\tau)=2n(0)$, donc $\mathrm{e}^{r\tau}=2$ et $r=\dfrac{\ln 2}{\tau}$.
Le nombre de naissances par unité de temps et de volume est donc $\dfrac{\ln 2}{\tau}n$.
Effectuons un bilan de « particules » (de bactéries !) sur un tranche de section $S$ comprise entre $x$ et $x+\mathrm{d}x$ :

$$\mathrm{d}(\delta N) = \delta^2 N_\text{reçu}+\delta^2 N_\text{créé}$$

avec

$$\mathrm{d}(\delta N) = [n(x,t+\mathrm{d}t))n(x,t)]S\,\mathrm{d}x = \frac{\partial n}{\partial t}\,\mathrm{d}tS\,\mathrm{d}x\,,$$

$$\begin{aligned}\delta^2 N_\text{reçu} &= \phi(x,t)\,\mathrm{d}t-\phi(x+\mathrm{d}x,t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\partial\phi}{\partial x}\,\mathrm{d}xS\,\mathrm{d}t\\ &= D\frac{\partial^2 j}{\partial x^2}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

et

$$\delta^2 N_\text{créé} = \frac{\ln 2}{\tau}nS\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,.$$

Après simplification, le bilan conduit à

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}+\frac{\ln 2}{\tau}n(x,t)}\,.$$

On suppose que tous les $\tau=1200$ s, une bactérie donne naissance à une autre. Établir l'équation vérifiée par $n(x,t)$.

**3.** Si $n(t)$ est indépendant de $x$, l'équation précédente se ramène à
$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = \frac{\ln 2}{\tau} n(x,t)$$
La solution est donc
$$n(t) = n(0)\,\mathrm{e}^{\frac{\ln 2}{\tau}t} = \left(e^{\ln 2}\right)^{t/\tau}$$
soit
$$\boxed{n(t) = 2^{t/\tau}}.$$
On obtient bien une population qui double toutes les $\tau$ secondes.

**4.** Si une bactérie mourrait toutes les $\tau$ secondes, un raisonnement similaire au précédent (en changeant de signe pour passer de la naissance au décès) donnerait un nombre de décès par unité de temps et de volume égal à
$$\frac{\ln 2}{\tau} n.$$
Cependant, on préciser que tous les $\tau$ secondes, le nombre de bactéries mourant est proportionnel au nombre moyen de bactéries présente à une distance $a$, c'est-à-dire en considérant en première approximation la densité uniforme sur une distance $a$, à $na$.

On a donc un nombre de décès par unité de temps et de volume de la forme
$$\gamma\frac{\ln 2}{\tau} n \times n = \gamma\frac{\ln 2}{\tau} n^2,$$
où $\gamma$ est un coefficient de proportionnalité, non précisé ici. Le bilan s'écrit alors pour la tranche considérée précédemment
$$\frac{\partial n}{\partial t}\mathrm{d}t S\,\mathrm{d}x = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \frac{\ln 2}{\tau} n(x,t) S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \gamma\frac{\ln 2}{\tau} n^2 S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$
soit
$$\frac{\partial n}{\partial =} D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\ln 2}{\tau} n - \gamma\frac{\ln 2}{\tau} n^2$$
de la forma
$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + d_1 n - d_2 n^2.$$

**5.** Si $(x)$ est indépendant du temps, l'équation précédente devient
$$d_1 n - d_2 n^2 = 0.$$
Les solutions sont
$$\boxed{n_1 = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{n_2 = \frac{d_1}{d_2}}.$$
La solution $n_1$ correspond à l'absence de bactéries (qui est bien un état stationnaire !), la seconde à une population stable (les naissances compensent exactement les morts).

**6.** La zone $u \to -\infty$ correspond à $x \to -\infty$ : « loin à gauche » (en $x < 0$), on a une population stable et uniforme $n_2$ de bactéries.

La zone $u \to +\infty$ correspond à $x \to +\infty$ : « loin à droite » (en $x > 0$), on n'a aucune bactérie (on a montré $n_1 = 0$).

La population de bactéries va donc évoluer dans le sens des $x$ croissants (elles vont coloniser la zone vide de bactéries), ce que l'on modélise par une onde progressive dans le sens des $x$ croissants, qui avance avec la célérité $x$.

**7.** En dérivant la fonction composée $n(x,t) = f(u) = f(x-ct)$, on a
$$\frac{\partial n}{\partial t} = -cf'(u) \quad \text{et} \quad \frac{\partial 2}{\partial n}x = f''(u).$$
L'équation aux dérivées partielles vérifiée par $n(x,t)$ s'écrit alors
$$-cf'(u) = Df''(u) + d_1 f(u) - d_2\left(f(u)\right)^2.$$
Multiplions par $f'(u)$ :
$$-cf'(u)^2 = Df''(u)f'(u) + d_1 f(u)f'(u) - d_2 f(u)^2 f'(u).$$
Intégrons de $u = -\infty$ à $u = +\infty$ :
$$-c\int_{-\infty}^{+\infty} f'(u)^2\,\mathrm{d}u = D\int_{-\infty}^{+\infty} f''(u)f'(u)\,\mathrm{d}u + d_1\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)f'(u)\,\mathrm{d}u - d_2\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)^2 f'(u)\,\mathrm{d}u.$$
Avec la notation proposée, on peut écrire
$$-\alpha c = D\left[\frac{f'(u)^2}{2}\right]_{-\infty}^{+\infty} + d_1\left[\frac{f(u)^2}{2}\right]_{-\infty}^{+\infty} - d_2\left[\frac{f(u)^3}{3}\right]_{-\infty}^{+\infty} = D\left[\frac{f'(u)^2}{2}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{d_1}{2}(n_1^2 - n_2^2) - \frac{d_2}{3}(n_1^3 - n_2^3).$$
Comme $f(u)$ tend à être uniforme pour $u \to -\infty$ et $u \to +\infty$, on peut considérer que sa dérivée est nulle :
$$f'(-\infty) = f'(+\infty)$$
d'où
$$-\alpha c = \frac{d_1}{2}(n_1^2 - n_2^2) - \frac{d_2}{3}(n_1^3 - n_2^3).$$
Avec $n_1 = 0$ et $n_2 = d_1/d_2$, on peut écrire
$$-\alpha c = -\frac{d_1}{2}\frac{d_1^2}{d_2^2} - \frac{d_2}{3}\frac{d_1^3}{d_2^3} = -\frac{d_1^3}{2d_2^2} - \frac{d_1^3}{3d_2^2} = -\frac{d_1^3}{6d_2^2}$$
d'où
$$\boxed{c = \frac{d_1^3}{6\alpha d_2^2}}.$$
La vitesse d'invasion des bactéries est d'autant plus grande que $d_1$ est grand, c'est-à-dire que le terme de naissance est important, et que $d_2$ est faible, c'est-à-dire que le terme de mort est faible, ce qui est logique.