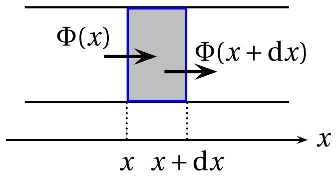
Méthode — Bilans de particules (diffusion)

Ce document expose des propositions de rédaction pour établir un bilan de particule (sans sources internes).

Phénomène unidimensionnel en cartésiennes

On considère un phénomène diffusif tel que $n(M,t) = n(x,t)$ et $\vec{j}_N(M,t) = j(x,t)\vec{e}_x$.
Le système étudié est la tranche de section S comprise entre les abscisses x et $x+\mathrm{d}x$, de volume $\mathrm{d}\tau = S\,\mathrm{d}x$:



Il contient [1] $\delta N_x(t) = n(x,t)S\,\mathrm{d}x$ particules.
Entre t et $t+\mathrm{d}t$, en l'absence de sources internes, le bilan de particules s'écrit [2]

$$\mathrm{d}(\delta N_x) = \delta N^2_{\text{reçu}}. \tag{1}$$

Entre t et $t+\mathrm{d}t$, le nombre de particules varie de

$$\mathrm{d}(\delta N_x) = \delta N_x(t+\mathrm{d}t) - \delta N_x(t) = [n(x,t+\mathrm{d}t) - n(x,t)]\,S\,\mathrm{d}x = \frac{\partial n(x,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}t\,S\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Le nombre de particules reçues entre t et $t+\mathrm{d}t$ est donné par [3]

$$\delta N^2_{\text{reçu}} = \Phi(x,t)\,\mathrm{d}t - \Phi(x+\mathrm{d}x,t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = -\frac{\partial j_N(x,t)}{\partial x}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

car $\Phi(x,t) = j_N(x,t)S$.
Le bilan (1) s'écrit alors

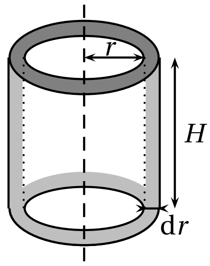
$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}t\,S\,\mathrm{d}x = -\frac{\partial j_N(x,t)}{\partial x}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

soit

$$\boxed{\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial j_N(x,t)}{\partial x}}.$$

Phénomène unidimensionnel en cylindriques

On considère $n(M,t) = n(r,t)$ et $\vec{j}_N(M,t) = j(r,t)\vec{e}_r$ en coordonnées cylindriques.
Le système étudié est le tube de hauteur H arbitraire, de rayon r et d'épaisseur $\mathrm{d}r$, de volume $\mathrm{d}\tau = 2\pi r H\,\mathrm{d}r$.



Il contient $\delta N_r(t) = n(r,t)\,\mathrm{d}\tau = n(r,t)2\pi r H\,\mathrm{d}r$ particules.
Entre t et $t+\mathrm{d}t$, en l'absence de sources internes, le bilan de particules s'écrit

$$\mathrm{d}(\delta N_r) = \delta^2 N_{\text{reçu}}. \tag{3}$$

1. Je propose la notation $\delta N_x(t)$ pour indiquer que la tranche est prise à l'abscisse x, mais on pourra se contenter de noter $\delta N(t)$.
2. On pourra noter $\delta^2 N_{\text{reçu}}$ pour préciser l'ordre des infiniment petits : ici d'ordre 2 (en $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$), car c'est un nombre de particules reçues par un système infiniment petit pendant une durée infiniment petite.
3. Le flux en x est entrant, donc $+\Phi(x,t)$, tandis que le flux en $x+\mathrm{d}x$ est sortant, donc $-\Phi(x+\mathrm{d}x,t)$.

Entre t et $t+\mathrm{d}t$, le nombre de particules varie de

$$\mathrm{d}(\delta N_r) = \delta N_r(t+\mathrm{d}t) - \delta N_r(t) = [n(r,t+\mathrm{d}t) - n(r,t)]\,2\pi r H\,\mathrm{d}r = \frac{\partial n(r,t)}{\partial t} 2\pi H r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t\,. \tag{4}$$

Le nombre de particules reçues entre t et $t+\mathrm{d}t$ est donné par

$$\delta N_{\text{reçu}} = \Phi(r,t)\,\mathrm{d}t - \Phi(r+\mathrm{d}r,t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\partial \Phi(r,t)}{\partial r}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t$$

avec $\Phi(r,t) = 2\pi r H j_N(r,t)$, soit

$$\delta N_{\text{reçu}} = -\frac{\partial\left[r\, j_N(r,t)\right]}{\partial r} 2\pi H\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t\,.$$

Le bilan (1) s'écrit alors

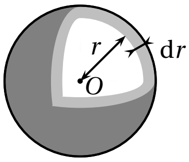
$$\frac{\partial n(r,t)}{\partial t} 2\pi H r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t = -\frac{\partial\left[r\, j_N(r,t)\right]}{\partial r} 2\pi H\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t$$

soit

$$\boxed{\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\left[r\, j_N(r,t)\right]}{\partial r}}\,.$$

Phénomène unidimensionnel en sphériques

On considère un phénomène diffusif tel que $n(M,t) = n(r,t)$ et $\vec{j}_N(M,t) = j(r,t)\,\vec{e}_r$ en coordonnées sphériques.
Le système étudié est la coquille de rayon r et d'épaisseur $\mathrm{d}r$:



Le système de volume $\mathrm{d}\tau = 4\pi r^2\,\mathrm{d}r$ contient $\delta N_r(r,t) = n(r,t) 4\pi r^2\,\mathrm{d}r$ particules.
Entre t et $t+\mathrm{d}t$, en l'absence de sources internes, le bilan de particules s'écrit

$$\mathrm{d}(\delta N_r) = \delta^2 N_{\text{reçu}}\,. \tag{5}$$

Entre t et $t+\mathrm{d}t$, le nombre de particules varie de

$$\mathrm{d}(\delta N_r) = \delta N_r(t+\mathrm{d}t) - \delta N_r(t) = [n(r,t+\mathrm{d}t) - n(r,t)]\,4\pi r^2\,\mathrm{d}r = \frac{\partial n(r,t)}{\partial t} 4\pi r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t\,. \tag{6}$$

Le nombre de particules reçues entre t et $t+\mathrm{d}t$ est donné par

$$\delta N_{\text{reçu}} = \Phi(r,t)\,\mathrm{d}t - \Phi(r+\mathrm{d}r,t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\partial \Phi(r,t)}{\partial r}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t$$

avec $\Phi(r,t) = 4\pi r^2 j_N(r,t)$, soit

$$\delta N_{\text{reçu}} = -\frac{\partial\left[r^2 j_N(r,t)\right]}{\partial r} 4\pi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t\,.$$

Le bilan (5) s'écrit alors

$$\frac{\partial n(r,t)}{\partial t} 4\pi r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t = -\frac{\partial\left[r^2 j_N(r,t)\right]}{\partial r} 4\pi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t$$

soit

$$\boxed{\frac{\partial n(r,t)}{\partial t} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left[r^2 j_N(r,t)\right]}{\partial r}}\,.$$

> En coordonnées cylindriques ou sphériques, il est important de faire apparaître la dérivée partielle du flux *avant* de remplacer son expression en fonction de $j_N(r,t)$ dans l'expression de $\delta N_{\text{reçu}}$.