TD phénomènes de transport — Diffusion de charge

1 — Vitesse moyenne des électrons de conduction

On étudie la conduction électrique dans un fil de cuivre. Données :

— section $S = 1{,}0\ \mathrm{mm}^2$;

— intensité du courant $I = 1{,}0\ \mathrm{A}$;

— conductivité électrique $\gamma = 58 \times 10^6\ \mathrm{S \cdot m^{-1}}$;

— densité du cuivre $d = 8{,}95$;

— masse molaire du cuivre $M = 63{,}5\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$;

— masse volumique de l'eau $\mu_0 = 1{,}0\ \mathrm{kg \cdot L^{-1}}$;

— nombre d'Avogadro $\mathcal{N}_\mathrm{A} = 6{,}02 \times 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$.

Chaque atome de cuivre libère un électron de conduction de charge $q = -\mathrm{e}$ avec $\mathrm{e} = 1{,}6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$.

1. Quelle est l'expression et la valeur de la densité volumique des porteurs de charges mobiles n ?

2. Quelle est l'expression et la valeur de la densité volumique de courant j ?

3. En déduire la valeur de la vitesse moyenne des électrons de conduction dans le cuivre.

---

2 — Courant de convection

On considère un cylindre infini d'axe Oz et de rayon R, uniformément chargé en volume avec la densité volumique de charges $\rho > 0$. Ce cylindre est mis en rotation autour de son axe avec la vitesse angulaire constante ω.

1. Exprimer le vecteur densité volumique de courant $\vec{j}$ de cette distribution.

2. Pourquoi parle-t-on de courant de convection ?

---

3 — Modèle de Drude

On modélise le cuivre par un réseau cristallin constitué d'ions positifs fixes dans lequel des électrons de conduction se déplacent.

On appelle n le nombre d'atomes de cuivre par unité de volume et on suppose que chaque élément cuivre libère un électron de conduction. On note e la charge élémentaire.

Les collisions des élections sur les ions du réseau sont modélisés par une force de frottement fluide

$$\vec{F}_\mathrm{v} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}\,.$$

On applique au cuivre un champ électrique extérieur $\vec{E} = E\vec{u}_z$.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la vitesse de l'électron.

2. On se place en régime permanent. Montrer que l'on retrouve la loi d'Ohm locale et exprimer la conductivité électrique γ_0 en fonction de e, m, τ et n ;

3. On suppose maintenant que le champ électrique varie sinusoïdalement dans le temps :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t)\,\vec{u}_z\,.$$

Montrer que l'on peut définir une conductivité électrique complexe de la forme

$$\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 + \mathrm{i}\frac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}}$$

où l'on exprimera ω_c en fonction des données.

4. Que devient la conductivité dans la limite des basses fréquences $\omega \ll \omega_\mathrm{c}$? En considérant la puissance volumique moyenne (temporelle) volumique reçue par le conducteur, justifier la dénomination de « régime dissipatif » adoptée alors.

5. Que devient la conductivité dans la limite des hautes fréquences $\omega \gg \omega_\mathrm{c}$?

Calculer alors la puissance volumique moyenne reçue par le milieu. Comment qualifier ce régime ?

---

4 — Modèle collisionnel de Drude

On considère le modèle collisionnel de Drude : les électrons de conduction sont sans interaction entre eux et avec le réseau de cations, et subissent des chocs avec les défauts du réseau. La durée moyenne entre deux chocs est τ, et la vitesse après un choc est aléatoire.

On note m la masse d'un électron de charge $-\mathrm{e}$. Les électrons sont soumis à un champ électrique $\vec{E}$.

1. On considère deux collisions successives subies par un électrons, aux instants t_i et t_{i+1}.
Exprimer $\vec{v}(t_{i+1})$ en fonction de $\vec{v}(t_i)$ et des données.
En déduire la valeur moyenne $\vec{u} = \langle \vec{v}(t_{i+1}) \rangle$.

2. En déduire l'expression de $\vec{j}$ et montrer que l'on retrouve la loi d'Ohm locale, en exprimant la conductivité électrique en fonction des données.

---

5 — Résistance d'un manchon cylindrique ohmique

On considère un conducteur ohmique, de conductivité électrique γ, de forme cylindrique, limité par deux cylindres concentriques de rayons R_1 et $R_2 > R_1$ et de hauteur h.
On impose les potentiels électriques V_1 sur l'armature intérieure et V_2 sur l'armature extérieure. On note $U = V_1 - V_2$ la différence de potentiel correspondante. On se place en régime stationnaire.

1. Montrer que l'intensité électrique $I(r)$ traversant un cylindre de rayon $r \in [R_1, R_2]$ est indépendant de r. En déduire l'expression de la densité volumique de courant $\vec{j}$ en coordonnées cylindriques, puis celle du champ électrique $\vec{E}$ dans le conducteur.

2. On rappelle la relation locale $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$. Déterminer l'expression de la résistance électrique R du manchon cylindrique.

3. Discuter du cas où $R_2 = R_1 + e$ avec $e \ll R_1$.

---

6 — Résistance électrique d'une coquille sphérique

On considère un conducteur ohmique, de conductivité électrique γ, de forme sphérique, limité par deux sphères concentriques de rayons R_1 et $R_2 > R_1$.
On impose les potentiels électriques V_1 sur l'armature intérieure et V_2 sur l'armature extérieure. On note $U = V_1 - V_2$ la différence de potentiel correspondante. On se place en régime stationnaire.

1. Montrer que l'intensité électrique $I(r)$ traversant une sphère de rayon $r \in [R_1, R_2]$ est indépendant de r. En déduire l'expression de la densité volumique de courant $\vec{j}$ en coordonnées sphériques, puis celle du champ électrique $\vec{E}$ dans le conducteur.

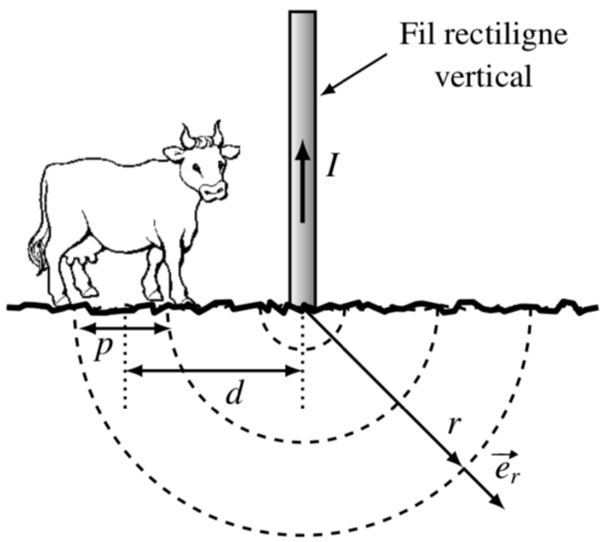
2. On rappelle la relation locale $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$. Déterminer l'expression de la résistance électrique R de la coquille sphérique.

3. Discuter du cas où $R_2 = R_1 + e$ avec $e \ll R_1$.

---

7 — Tension de pas

Par temps orageux, il peut être dangereux de chercher à s'abriter sous un arbre. Nous allons tenter d'en comprendre la raison.
On modélise l'éclair traversant l'arbre par un fil rectiligne vertical semi-infini, parcouru par un courant électrique ascendant d'intensité $I = 15$ kA. Cette demi-droite prend fin au niveau du sol, où l'on suppose que la densité volumique de courant est radiale, de la forme $\vec{j} = j(r)\,\vec{e}_r$ en coordonnées sphériques.



L'étude est menée en régime stationnaire, et on note $\gamma = 1\ \text{S} \cdot \text{m}^{-1}$ la conductivité électrique du sol.

1. Exprimer $j(r)$ en fonction de I et r.

2. En déduire l'expression du champ électrique $\vec{E} = E(r)\,\vec{e}_r$ dans le sol.

3. On rappelle la relation locale $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$. Exprimer le potentiel électrique $V(r)$ dans le sol, en le supposant nul à l'infini.

4. La vache se trouve à la distance moyenne d de l'arbre ; la distance entre ses pattes avant et arrière est p. Exprimer la différence de potentiel U_p entre ses pattes.

En supposant $p \ll d$, montrer que cette tension s'écrit

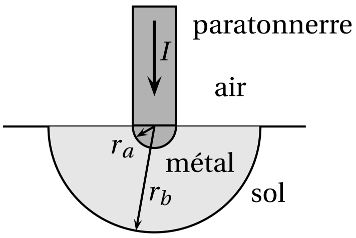
$$U_\text{p} \approx \frac{Ip}{2\pi\gamma d^2}.$$

5. La résistance entre les pattes avant et arrière de la vache, distantes de $p \approx 1{,}5$ m, est $R \approx 2{,}5$ kΩ. À quelle distance minimale d_m du point d'impact la vache doit-elle se trouver pour que son corps soit traversé par un courant électrique d'intensité inférieure à $I_\mathrm{max} = 25$ mA ? On donnera l'expression de d_m en fonction de I, I_max, p, R et γ. Évaluer numériquement d_m.

6. Expliquer pourquoi cette *tension de pas* est plus dangereuse pour une vache que pour l'homme.

8 — Prise de terre d'un paratonnerre

Une prise de terre d'un paratonnerre est modélisée par une coque hémisphérique métallique de centre O, de rayon intérieur r_a et de rayon extérieur r_b. On note γ_m la conductivité électrique du métal qui la constitue. Cette coque est enfoncée dans le sol, assimilé au demi-espace $z > 0$ (où Oz est la verticale descendante), et de conductivité électrique γ_s.



La prise de terre se décompose ainsi en deux résistances hémisphériques R_m et R_s, la première en métal de rayon intérieur r_a et de rayon extérieur r_b, la seconde associée au sol de rayon intérieur r_b et de rayon extérieur infini. Elle est destinée à recevoir un courant I, supposé indépendant du temps et descendant, provenant d'un paratonnerre.
On suppose que le courant qui traverse la prise de terre est radial. Son vecteur densité est de la forme $\vec{j} = j(r)\,\vec{e}_r$ en coordonnées sphériques.

1. Rappeler l'unité de la grandeur $j(r)$ et établir son expression en fonction de I et de r.

2. Exprimer le champ électrique $\vec{E}$ au sein du métal en fonction de I, r et γ_m.

3. On rappelle la relation locale entre le champ et le potentiel électrique : $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$. Exprimer R_m en fonction de γ_m, r_a et r_b.

4. Exprimer R_s en fonction de γ_s et r_b.

5. En déduire l'expression de la résistance totale R_T de la prise de terre.

6. On donne $r_a = 1$ cm, $r_b = 35$ cm, $\gamma_\mathrm{m} = 60 \times 10^6\ \mathrm{S\cdot m^{-1}}$ et $\gamma_\mathrm{s} = 10^{-3}\ \mathrm{S\cdot m^{-1}}$ pour un sol argileux. Évaluer R_T.

7. La législation impose $R_\mathrm{T} < 25\ \Omega$. L'installation du paratonnerre est-elle conforme aux règles de sécurité ? Sinon, que préconisez-vous pour remédier à ce problème ?

9 — Magnétorésistance

Un matériau conducteur, de conductivité σ, a la forme d'un cylindre creux de hauteur h, de rayon interne a et de rayon externe b. Son axe de symétrie définit l'axe (Oz), le point O étant situé dans le plan séparant le conducteur en deux moitiés identiques.
Le matériau comporte n porteurs de charges par unité de volume, chacun de charge $\mathrm{e} > 0$, responsables de la conduction électrique sous l'effet d'un champ électrique permanent. L'action du matériau sur ces porteurs de charges est modélisé par une force de type $-\dfrac{m\vec{v}}{\tau}$, où m désigne leur masse, $\vec{v}$ leur vitesse et τ un temps caractéristique.
La tension U est appliquée entre les bords interne et externe du conducteur : $U = V_a - V_b$.

1. Interpréter qualitativement la force $-\dfrac{m\vec{v}}{\tau}$. Que représente τ ?

2. Déterminer le champ électrique $\vec{E}$ dans le matériau en fonction de U, a, b et r.

3. On définit la conductivité électrique σ du matériau en régime permanent par $\vec{j}_0 = \sigma\vec{E}$.
Établir l'expression de σ en fonction de n, e, m et τ.

4. Quelle est la résistance électrique R_0 du conducteur dans ces conditions ?

5. Le conducteur est plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0\,\vec{e}_z$.

5.a) En régime permanent, établir une relation entre $\vec{E}$, $\vec{B}$ et la nouvelle densité de courant électrique $\vec{j}$ faisant intervenir σ et $R_\mathrm{h} = \dfrac{1}{n\mathrm{e}}$.

5.b) Montrer que les lignes de courant font avec $\vec{E}$ un angle α constant. Exprimer $\tan\alpha$ en fonction des composantes de $\vec{j}$.

5.c) En déduire que la composante radiale de $\vec{j}$ peut s'écrire

$$j_r = \frac{j_0}{1 + (\sigma R_\mathrm{h} B_0)^2}.$$

5.d) Quelle est la nouvelle résistance électrique R du conducteur ? Calculer le rapport $\dfrac{R-R_0}{R_0}$ dans le cas du cuivre et dans le cas de l'arséniure d'indium si $B_0 = 1$ T. Commenter.

Données
charge élémentaire : $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C
conductivité du cuivre : $\sigma = 6 \times 10^{7}\ \Omega^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-1}$
pour le cuivre : $R_\mathrm{h} = -7 \times 10^{-11}\ \mathrm{m}^{-3} \cdot \mathrm{C}^{-1}$
conductivité de l'arséniure d'indium : $\sigma = 1\ \Omega^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-1}$
pour l'arséniure d'indium : $R_\mathrm{h} = 0{,}7\ \mathrm{m}^{-3} \cdot \mathrm{C}^{-1}$

10 — Conductivité d'un électrolyte

La mobilité μ d'un porteur de charge est définie par la relation $\vec{v} = \mu \vec{E}$, où $\vec{v}$ est la vitesse moyenne du porteur et $\vec{E}$ est le champ électrique dans le matériau. Les porteurs de charge ont une masse m, une charge q, et leur densité volumique est n.

1. Établir la relation entre la conductivité électrique σ et la mobilité (ainsi que les autres paramètres mentionnés ci-dessus).

2. Montrer que d'après la relation obtenue, la conductivité est toujours positive.

3. Généraliser cette relation au cas où l'on a plusieurs types de porteurs de charge caractérisés par (q_i, n_i, μ_i).

4. Application à l'eau pure : quels sont les porteurs de charge ? Quelles sont leurs concentrations molaire, et leurs densités volumiques ? Calculer la conductivité électrique de l'eau pure.

5. Application à une solution d'acide chlorhydrique de concentration $0{,}1\ \mathrm{mol} \cdot \mathrm{L}^{-1}$. Calculer les concentrations de tous les ions, puis la conductivité électrique de la solution. Y a-t-il un ion qui joue un rôle prépondérant ?

On donne les mobilités :
$\mu(H_3O^+) = 3{,}75 \times 10^{-7}\ \Omega^{-1} \cdot \mathrm{m}^2\mathrm{C}^{-1}$
$\mu(HO^-) = -2{,}12 \times 10^{-7}\ \Omega^{-1} \cdot \mathrm{m}^2\mathrm{C}^{-1}$
$\mu(Cl^-) = -0{,}82 \times 10^{-7}\ \Omega^{-1} \cdot \mathrm{m}^2\mathrm{C}^{-1}$
$\mu(Na^+) = 0{,}54 \times 10^{-7}\ \Omega^{-1} \cdot \mathrm{m}^2\mathrm{C}^{-1}$
Nombre d'Avogadro : $\mathcal{N}_\mathrm{A} = 6{,}02 \times 10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}$.