

TD phénomènes de transport

Diffusion de charge

1 — Vitesse moyenne des électrons de conduction

1. La masse volumique du cuivre est $\mu_{\text{Cu}} = d\mu_0 = 8,95 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Soit N le nombre d'atome de cuivre dans un volume V ; la masse de ce volume s'écrit

$$m = \mu_{\text{Cu}} V = \frac{N}{N_A} M.$$

Le nombre d'électrons de conduction par unité de volume est égal au nombre d'atomes de cuivre par unité de volume (chaque atome libérant un électron), soit

$$n = \frac{N}{V} = \frac{\mu_{\text{Cu}} N_A}{M} = \frac{8,95 \times 10^3 \times 6,02 \times 10^{23}}{63,5 \times 10^{-3}}$$

d'où $n = 8,5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$.

2. La densité volumique de courant vaut

$$j = \frac{I}{S} = \frac{1}{10^{-6}}$$

soit $j = 1,0 \times 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$.

3. La vitesse moyenne des électrons de conduction vérifie (en valeur absolue) $j = nev$ d'où

$$v = \frac{j}{ne} = 7,4 \times 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

On a $v = 74 \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$: cette vitesse est très faible.

3 — Modèle de Drude

On modélise le cuivre par un réseau cristallin constitué d'ions positifs fixes dans lequel des électrons de conduction se déplacent.

On appelle n le nombre d'atomes de cuivre par unité de volume et on suppose que chaque élément cuivre libère un électron de conduction. On note e la charge élémentaire.

Les collisions des électrons sur les ions du réseau sont modélisés par une force de frottement fluide

$$\vec{F}_v = -\frac{m}{\tau} \vec{v}.$$

On applique au cuivre un champ électrique extérieur $\vec{E} = E \vec{u}_z$.

1. On applique le PFD à un électron :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$$

d'où

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m} \vec{E}.$$

2. En régime permanent, l'équation précédente s'écrit

$$\vec{v} = -\frac{e\tau}{m} \vec{E}.$$

Le vecteur densité volumique de courant vaut

$$\vec{j} = -ne\vec{v} = \frac{ne^2\tau}{m} \vec{E}.$$

On a bien $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$ avec $\gamma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$.

3. On se place en notation complexe; le champ électrique est $\vec{E} = E_0 e^{i\omega t} \vec{u}_z$. L'équation différentielle vérifiée par la vitesse s'écrit alors

$$i\omega \vec{v} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m} \vec{E}, \quad \text{d'où} \quad \vec{v} = \frac{-e/m}{i\omega + 1/\tau} \vec{E}.$$

De $\vec{j} = -ne\vec{v}$ on déduit

$$\vec{j} = \frac{\frac{ne^2}{m}}{i\omega + \frac{1}{\tau}} \vec{E} = \frac{ne^2\tau}{m} \frac{1}{1 + i\omega\tau} \vec{E},$$

de la forme $\vec{j} = \underline{\gamma} \vec{E}$.

On peut définir une conductivité électrique complexe :

$$\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 + i\frac{\omega}{\omega_c}} \quad \text{avec} \quad \omega_c = \frac{1}{\tau}.$$

4. Si $\omega \ll \omega_c$, on a $\underline{\gamma} \approx \gamma_0$: la conductivité est réelle.

Avec $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x$, on a $\vec{j} = \gamma_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x$. La puissance volumique instantanée reçue par le conducteur est

$$p(t) = \vec{j}(t) \cdot \vec{E}(t) = \gamma_0 E_0^2 \cos^2(\omega t).$$

La valeur moyenne vaut $\langle p \rangle = \frac{\gamma E_0^2}{2} > 0$.

Le conducteur reçoit bien en moyenne de la puissance, qui sera dissipée par effet Joule.

5. Si $\omega \gg \omega_c$, on a

$$\underline{\gamma} \approx \frac{\gamma_0}{i\omega/\omega_c} = -i \frac{\omega_c \gamma_0}{\omega}.$$

La conductivité est imaginaire pure.

Avec $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x$, on a

$$\vec{j} = -i \frac{\omega_c \gamma_0}{\omega} E_0 [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)] \vec{u}_x$$

d'où en prenant la partie réelle

$$\vec{j} = \frac{\omega_c}{\omega} \gamma_0 E_0 \sin(\omega t) \vec{u}_x.$$

Le champ électrique et la densité de courant sont en quadrature.

La puissance volumique instantanée reçue vaut

$$p(t) = \frac{\omega_c}{\omega} \gamma_0 E_0 \cos(\omega t) \sin(\omega t).$$

En valeur moyenne, on a

$$\langle p \rangle = 0.$$

On est dans un régime non dissipatif.

6 — Résistance électrique d'une coquille sphérique

1. On considère une coquille sphérique de rayon r et d'épaisseur dr . On effectue un bilan de charge entre t et $t + dt$ en régime stationnaire :

$$dQ = 0 = \delta Q_{\text{reçu}} = I(r) dt - I(r + dr) dt = -\frac{dI}{dr} dr dt.$$

On a donc $\frac{dI}{dr} = 0$: l'intensité I ne dépend pas de r .

Le problème étant à symétrie sphérique, on a $\vec{j} = j(r) \vec{e}_r$ en coordonnées sphériques.

À travers une sphère Σ de rayon $r \in [R_1, R_2]$, on a

$$I = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 j(r).$$

Avec la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \gamma \vec{E}$, on en déduit le champ électrique dans le conducteur

$$\vec{E} = \frac{I}{4\pi\gamma r^2} \vec{e}_r.$$

2. Avec $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r$, on a

$$-dV = \frac{I}{4\pi\gamma} \frac{dr}{r^2}$$

d'où

$$-\int_{V_1}^{V_2} dV = \frac{I}{4\pi\gamma} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2}$$

soit

$$V_1 - V_2 = U = \frac{I}{4\pi\gamma} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{I}{4\pi\gamma} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}.$$

De $U = RI$ on déduit la résistance

$$R = \frac{R_2 - R_1}{4\pi\gamma R_1 R_2}.$$

3. Si $R_2 = R_1 + e$ avec $e \ll R_1$, on a $R_1 R_2 \approx R_1^2$, d'où

$$R \approx \frac{e}{4\pi R_1^2 \gamma} = \frac{e}{\gamma S}.$$

On retrouve une expression de la même forme que pour un système unidimensionnel en coordonnées cartésiennes : résultat classique, où l'on peut considérer que la courbure du conducteur est localement négligeable si l'épaisseur de la coquille est très faible devant son rayon.

8 — Prise de terre d'un paratonnerre

1. La densité de courant $j(r)$ s'exprime en $\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$. On a $I = 2\pi r^2 j(r)$ à travers la demi-sphère de rayon r , d'où

$$j(r) = \frac{I}{2\pi r^2}.$$

2. On applique la loi d'Ohm locale :

$$\vec{E} = \frac{I}{2\pi\gamma_m r^2} \vec{e}_r.$$

3. Avec $\vec{E} = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r$, on obtient

$$-dV = \frac{I}{2\pi\gamma_m} \frac{dr}{r^2}$$

soit

$$U = V(r_a) - V(r_b) = \frac{I}{2\pi\gamma_m} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) = \frac{I}{2\pi\gamma_m} \frac{r_b - r_a}{r_a r_b}$$

On en déduit la résistance

$$R_m = \frac{r_b - r_a}{2\pi\gamma_m r_a r_b}.$$

4. Dans le sol, on a de même

$$-\int_{V(r)}^{V(\infty)} dV = \frac{I}{2\pi\gamma_s} \int_r^{\infty} \frac{dr'}{r'^2}$$

soit en prenant $V(\infty) = 0$

$$V(r) = \frac{I}{2\pi\gamma_s r}.$$

On a donc

$$V(r_b) = R_s I = \frac{I}{2\pi\gamma_s r_b}$$

d'où la résistance

$$R_s = \frac{1}{2\pi\gamma_s r_b}.$$

5. La prise de terre est le sol sont associés en série (ils sont traversés par la même intensité I) ; la résistance totale est donc $R_T = R_m + R_s$, soit

$$R_T = \frac{r_b - r_a}{2\pi\gamma_m r_a r_b} + \frac{1}{2\pi\gamma_s r_b}.$$

6. On calcule

$$R_T = \frac{0,34}{2\pi \times 60 \times 10^6 \times 35 \times 10^{-4}} + \frac{1}{2\pi 10^{-3} \times 0,35}$$

soit $R_T = 455 \Omega$.

7. L'installation proposée n'est pas conforme aux règles de sécurité.

Pour remédier à ce problème, on pourrait :

- augmenter le rayon r_b (c'est le deuxième terme qui est largement prépondérant) ;
- choisir un sol de meilleur conductivité électrique ;
- placer plusieurs piquets en parallèle sur la même ligne : une association de N résistances identiques R en parallèle a pour résistance équivalente R/N .

9 — Magnétorésistance

1. La force $-\frac{m\vec{v}}{\tau}$ représente les interactions entre les électrons de conduction et les défauts du réseau cristallin. Le temps τ représente la durée moyenne entre deux chocs pour un électron donné.

2. Sous l'effet de la différence de potentiel entre les cylindres, il apparaît une densité de courant $\vec{j} = j(r)\vec{e}_r$. Le champ électrique $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma}$ est donc de la forme

$$\vec{E} = \frac{\alpha}{r} \vec{e}_r$$

où α est une constante.

De $\vec{E} = -\text{grad } V = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r$, on déduit

$$-dV = \alpha \frac{dr}{r}.$$

La tension U est alors donnée par

$$-\int_a^b dV = U = \alpha \int_a^b \frac{dr}{r} = \alpha \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

On a donc $\alpha = \frac{U}{\ln(b/a)}$ et le champ électrique s'écrit

$$\vec{E} = \frac{U}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \frac{\vec{e}_r}{r}.$$

3. On écrit le PFD à un porteur de charge en régime permanent :

$$\vec{0} = e\vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$$

d'où $\vec{v} = \frac{e\tau}{m} \vec{E}$. On a donc

$$\vec{j}_0 = ne\vec{v} = \frac{ne^2\tau}{m} \vec{E} = \sigma \vec{E}$$

d'où la conductivité

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}.$$

4. L'intensité I traversant le conducteur est

$$I = 2\pi r h j(r) = 2\pi \sigma h r E(r) = \frac{2\pi \sigma h U}{\ln(b/a)} = \frac{U}{R_0}$$

d'où la résistance

$$R_0 = \frac{1}{2\pi \sigma h} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

5. Le conducteur est plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$.

5.a) Chaque porteur de charge est soumis à la force de Lorentz

$$\vec{F}_L = e\vec{E} + e\vec{v} \wedge \vec{B}.$$

Le PFD appliqué à ce porteur en régime permanent s'écrit donc

$$\vec{0} = e\vec{E} + e\vec{v} \wedge \vec{B} - \frac{m}{\tau} \vec{v},$$

soit comme $\vec{j} = e\vec{v}$,

$$\vec{0} = e\vec{E} + \frac{\vec{j} \wedge \vec{B}}{n} - \frac{m}{ne\tau} \vec{j}.$$

On a donc

$$\vec{j} = \frac{ne^2\tau}{m} \vec{E} + \frac{ne\tau}{m} \frac{\vec{j} \wedge \vec{B}}{n} = \frac{ne^2\tau}{m} \vec{E} + \frac{ne^2\tau}{m} \frac{\vec{j} \wedge \vec{B}}{ne},$$

soit

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} + \sigma R_h (\vec{j} \wedge \vec{B})$$

avec

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m} \quad \text{avec} \quad R_h = \frac{1}{ne}.$$

5.b) Notons

$$\vec{j} = j_r \vec{e}_r + j_\theta \vec{e}_\theta + j_z \vec{e}_z$$

en coordonnées cylindriques. Comme $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$ et $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$, la relation précédente s'écrit

$$\begin{pmatrix} j_r \\ j_\theta \\ j_z \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma R_h \begin{pmatrix} j_r \\ j_\theta \\ j_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix}$$

soit

$$j_r = \sigma E + \sigma R_h j_\theta B_0$$

$$j_\theta = -\sigma R_h j_r B_0$$

$$j_z = 0$$

Le vecteur $\vec{j}$ est donc $\vec{j} = j_r \vec{e}_r + j_\theta \vec{e}_\theta$, normal à l'axe Oz .

Le champ $\vec{E}$ étant selon $\vec{e}_r$, il forme un angle α avec $\vec{E}$ tel que

$$\tan \alpha = \frac{j_\theta}{j_r} = -\sigma R_h B_0.$$

Cet angle est constant.

Les lignes de courant font donc avec $\vec{E}$ un angle α constant.

5.c) Des équations précédentes on tire

$$j_r = \sigma E + \sigma R_h (-\sigma R_h) B_0^2 j_r$$

soit

$$[1 + (\sigma R_h B_0)^2] j_r = \sigma E = j_0.$$

On a donc

$$j_r = \frac{j_0}{1 + (\sigma R_h B_0)^2}.$$

5.d) On reprend le calcul de la première partie, en remplaçant σ_0 par $\frac{\sigma_0}{1 + (\sigma R_h B_0)^2}$. On en déduit immédiatement

$$R = \frac{1 + (\sigma R_h B_0)^2}{2\pi\sigma h} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

soit

$$R = R_0 [1 + (\sigma R_h B_0)^2].$$

La variation relative de la résistance due à l'application du champ magnétique est donc

$$\frac{R - R_0}{R_0} = (\sigma R_h B_0)^2.$$

Pour le cuivre, on a $\frac{R - R_0}{R_0} = 1,8 \times 10^{-3}$.

Pour l'arséniure d'indium, on a $\frac{R - R_0}{R_0} = 0,5$.

La variation de la résistance est facilement mesurable avec les moins bons conducteurs (l'arséniure d'indium est un semi-conducteur).

► La magnétorésistance est utilisée pour mesurer des champs magnétiques.

10 — Conductivité d'un électrolyte

La mobilité μ d'un porteur de charge est définie par la relation $\vec{v} = \mu \vec{E}$, où $\vec{v}$ est la vitesse moyenne du porteur et $\vec{E}$ est le champ électrique dans le matériau. Les porteurs de charge ont une masse m , une charge q , et leur densité volumique est n .

1. On a

$$\vec{j} = nq\vec{v} = nq\mu\vec{E}.$$

En identifiant avec la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, on obtient

$$\sigma = nq\mu.$$

2. Si $q > 0$, la force de Lorentz $\vec{F} = q\vec{E}$ est dans le même sens que $\vec{E}$; la vitesse acquise par les charges sous l'effet de cette force est donc dans le même sens que $\vec{E}$ et on a $\mu > 0$. On a donc $\sigma > 0$.

Si $q < 0$, la force de Lorentz $\vec{F} = q\vec{E}$ est dans le sens opposé à celui de $\vec{E}$; la vitesse acquise par les charges sous l'effet de cette force est donc opposée à $\vec{E}$ et on a $\mu < 0$. On a donc $q\mu > 0$ et $\sigma > 0$.

La conductivité est toujours positive.

3. La densité volumique de courant s'écrit

$$\vec{j} = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i.$$

Avec $\vec{v}_i = \mu_i \vec{E}$, on a

$$\vec{j} = \left(\sum_i n_i q_i \mu_i \right) \vec{E} = \sigma \vec{E}$$

et la conductivité s'écrit

$$\sigma = \sum_i n_i q_i \mu_i.$$

4. Dans l'eau pure, les porteurs de charge sont les ions H_3O^+ et HO^- , avec

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{HO}^-] = 10^{-7} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} = 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3}$$

à 25° (on rappelle le produit ionique de l'eau $[\text{H}_3\text{O}^+][\text{HO}^-] = K_e = 10^{-14}$).

Les concentrations volumiques valent

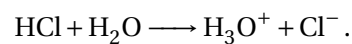
$$n(\text{H}_3\text{O}^+) = n(\text{HO}^-) = n = N_A c = 6,02 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}.$$

On en déduit la conductivité électrique de l'eau pure

$$\sigma = +en(\mu(\text{H}_3\text{O}^+) - \mu(\text{HO}^-))$$

soit $\sigma = 5,65 \times 10^{-6} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$.

5. L'acide chlorhydrique est un acide fort qui se dissocie totalement dans l'eau selon



On a donc

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{Cl}^-] = 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} = 10^2 \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Du produit ionique de l'eau on déduit

$$[\text{HO}^-] = 10^{-13} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} = 10^{-10} \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Les densités particulières valent

$$n(\text{H}_3\text{O}^+) = n(\text{Cl}^-) = n = 6,02 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

et

$$n(\text{HO}^-) = 6,02 \times 10^{13} \text{ m}^{-3}.$$

La conductivité est donnée par

$$\sigma = e[n(\mu(\text{H}_3\text{O}^+) - \mu(\text{Cl}^-)) - n(\text{HO}^-)\mu(\text{HO}^-)].$$

On peut négliger la quantité d'ions HO^- , soit

$$\sigma = en(\mu(\text{H}_3\text{O}^+) - \mu(\text{Cl}^-))$$

d'où $\sigma = 4,4 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$.

Ce sont les ions H_3O^+ qui contribuent le plus à la conductivité de la solution.

► Piège : on donne la mobilité des ions Na^+ , mais il n'y en a pas ici!