TP de physique n° 7 — Étude d'une ligne *RC*

On dispose d'une ligne RC constituée par la mise en cascade de $N = 19$ cellules RC identiques, avec $R = 1{,}5\ \text{k}\Omega$ et $C = 100\ \text{nF}$.

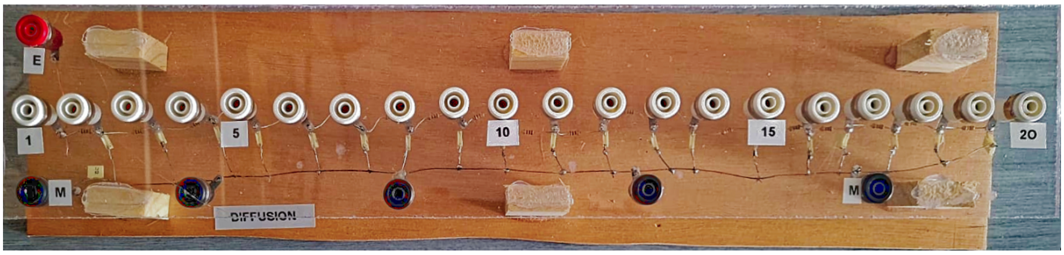
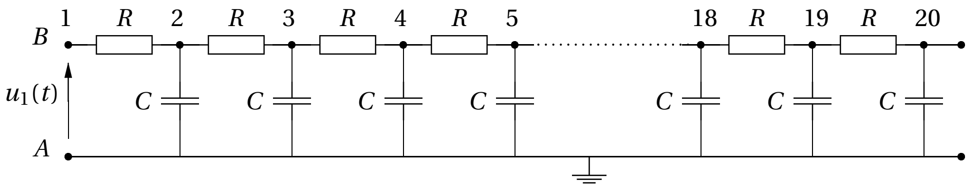


FIGURE 1 – Montage de la ligne RC

Le schéma électrique est le suivant :

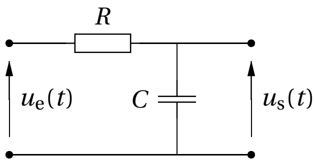


Le montage permet d'alimenter le circuit entre les entrées A et B avec une tension $U_0(t)$, et de mesurer les tensions aux points 1, 2, 3, ..., 19, 20.

1 — Questions préliminaire

❑ **1** Indiquer sans calculs la nature du filtrage réalisée par cette ligne entre $u_0(t)$ et $u_{20}(t)$.

❑ **2** Établir l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}_1(\mathrm{j}\omega)$ de la cellule suivante :



❑ **3** La fonction de transfert d'une ligne RC constituée de N cellule en cascade peut-elle s'écrire $\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \left[\underline{H}_1(\mathrm{j}\omega)\right]^N$? Justifier.

2 — Régime harmonique

Nous n'allons pas étudier ce montage en le considérant comme un filtre, mais nous allons étudier comment évolue tout au long de la ligne une tension sinusoïdale envoyée en entrée.

➤ **L'extrémité de la ligne est en sortie ouverte.**

La ligne est alimentée par le GBF délivrant une tension sinusoïdale $u_1(t) = U_1 \cos(2\pi f t)$. On réglera l'amplitude à la valeur maximale accessible.
Les phénomènes observés permettront de faire une analogie de comportement avec un autre domaine de la physique que nous avons déjà étudié...

❑ **4** Le signal d'entrée est sinusoïdal, de fréquence $f = 300\ \text{Hz}$.
Relever au multimètre les valeurs efficaces des tension U_i.

➤ On cessera les mesures le long de la ligne lorsque la tension sera trop faible pour être mesurée (le multimètre indique 0,00 V). On ne remplira pas les valeurs 0,00 dans les listes de valeurs, qui seront donc plus courtes.

Que constate-t-on qualitativement ?

❑ **5** Faire les mêmes relevés pour un ensemble de fréquences variant de 300 Hz à 1000 Hz.

➤ On pourra s'aider du tableau donné en annexe pour les relevés.

➤ Pour gagner du temps, on pourra entrer directement les mesures sous python sous forme de liste. Pour la fréquence $f = 300$ Hz, on entrera par exemple

```
U300 = [8.47,5.59,3.682,2.399,1.565,1.023,.679,.454,.307,.209,.143,.098,.067,
        .046,.031,.021,.016,.013,.011,.011]
```

❑ **6** Pour faciliter le traitement des données sous python, construire une liste pour l'ensemble des mesures, dont chaque élément est la liste `[f,Uf]`, où `f` est la fréquence utilisée et `Uf` la liste des mesures des tensions pour cette fréquence.
Exemple :

```
data = [[50,U50],[100,U100],[200,U200],[300.6,U300],[400,U400],[450,U450],[500.5,U500],
       [550,U550],[600.4,U600],[700.3,U700],[800,U800],[900,U900],[1000.8,U1000]]
```

❑ **7** La procédure `plot_data` (code en fin d'énoncé) permet de tracer le graphe des données U_n pour une fréquence f donnée. L'argument est un élément `[f,U_f]` de la liste `data`.
Tracer le graphe de l'évolution des tensions pour chaque fréquence considérée.

On montre que pour une ligne « infinie », la valeur efficace de la tension évolue le long de la ligne selon une loi de la forme $U_n = U_1\,\mathrm{e}^{-(n-1)/n_0}$ que l'on peut écrire

$$U_n = U_1'\,\mathrm{e}^{-n/n_0} \quad \text{avec} \quad U_1' = U_1\,\mathrm{e}^{-1/n_0}\,. \tag{1}$$

où n est le rang de la cellule.

❑ **8** À partir des mesures réalisées, quelle représentation graphique adopter afin de vérifier si les tensions U_n vérifient la loi donnée par la relation (1) ?

❑ **9** Compléter les lignes 6 et 7 du code de la procédure `plot_loi_data` en remplaçant les `XXXX` par les instructions permettant de vérifier la loi proposée.

❑ **10** À l'aide de la procédure `plot_loi_data`, peut-on en déduire que la relation (1) est vérifiée à toutes les fréquences ?
Quand elle n'est pas vérifiée, selon vous, quelle hypothèse faite sur la ligne n'est pas valide ?

❑ **11** En éliminant les enregistrements où la loi $U_n = U_1\,\mathrm{e}^{-n/n_0}$ n'est pas vérifiée, déterminer la valeur du paramètre n_0 pour chaque fréquence f.

❑ **12** Comment évolue qualitativement n_0 avec f ?
Quelle interprétation peut-on donner au paramètre n_0 ?
À quel phénomène physique les résultats obtenus vous font-ils penser ?

On montre que le paramètre n_0 dépend de la fréquence selon une loi de la forme

$$n_0(f) = k f^{\alpha} \tag{2}$$

où α est un exposant numérique sans dimension.

❑ **13** Quelle représentation graphique adopter afin de vérifier si la loi (2) est respectée ?

❑ **14** Effectuer cette représentation graphique et déterminer une estimation de la valeur de l'exposant α.

3 — Régime établi non harmonique

La ligne, toujours en sortie ouverte, est alimentée par le GBF délivrant un signal carré de fréquence $f = 500$ Hz.

❑ **15** Observer à l'oscilloscope l'évolution de la forme du signal. Expliquer la forme du signal observé à la cellule $n = 10$.

Annexe

Les procédures utilisées

On charge les bibliothèques habituelles :

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

Graphe des tensions U_n en fonction de n pour une fréquence donnée.

```
def plot_data(data_i):
    freq = data_i[0]
    L = data_i[1]
    plt.figure(1, figsize=(10, 6))
    plt.subplots_adjust(left=0.065, right=0.97, top=0.95, bottom=0.08)
    plt.plot(range(len(L)),L,'k',linewidth=.2)
    plt.plot(range(len(L)),L,marker='+',markersize=5,linestyle=' ')
    plt.xticks(list(range(len(L))),list(range(len(L))))
    plt.title("mesures à la fréquence $f=$%.1f Hz"%freq)
    plt.xlabel("$n$")
    plt.ylabel("$U_n$")
    plt.show()
```

Graphe permettant de vérifier la loi $U_n = U_1\,\mathrm{e}^{-n/n_0}$. Remplacer les `XXXX` par le code nécessaire.

```
def plot_loi_data(data_i):
    freq = data_i[0]
    L = data_i[1]
    plt.figure(1, figsize=(10, 6))
    plt.subplots_adjust(left=0.065, right=0.97, top=0.95, bottom=0.08)
    plt.plot(range(len(L)),XXXX,'k',linewidth=.2)
    plt.plot(range(len(L)),XXXX,marker='+',markersize=5,linestyle=' ')
    plt.xticks(list(range(len(L))),list(range(len(L))))
    plt.title("Loi $U_n=U_1\exp(-n/n_0)$ à la fréquence $f=$%.1f Hz"%freq)
    plt.xlabel("$n$")
    plt.ylabel("")  # compléter en fonction de la grandeur représentée en ordonnée
    plt.show()
```

Régression linéaire

Pour déterminer les coefficients de la loi $y = ax + b$ à partir des listes `X` et `Y`, on utilise l'instruction `polyfit` :

```
import numpy as np

p = np.polyfit(X,Y,1)
```

Le coefficient a est donné par `p[0]` et le coefficient b par `p[1]`.