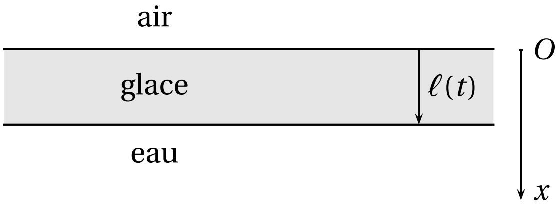
Sujet d'entraînement « facile » Diffusion thermique

Un lac en hiver — Banque PT 2022

On s'intéresse au lac de Joux, situé en Suisse ; il s'agit du plus grand plan d'eau du massif jurassien et il constitue une destination de loisirs appréciée des amoureux de la nature et des sports de plein air, tant en été qu'en hier.
En hiver, la température extérieure est de -10 °C ; le lac gèle et devient la plus grande patinoire naturelle d'Europe.
On se propose de modéliser la croissance de la couche de glace à la surface du lac, en régime quasi stationnaire. On note $H = 30$ m la profondeur du lac, et $S = 10$ km^2 sa surface.
On suppose que l'eau est en permanence à la température de fusion $T_e = 273$ K.
L'air au-dessus du lac est à la température constante est uniforme $T_a = 263$ K et à la pression atmosphérique $P_0 = 1$ bar.
Libre de glace à l'instant $t = 0$, le lac se couvre progressivement d'une couche de glace dont l'épaisseur à l'instant t est $\ell(t)$. Comme le montre la figure suivante, la position d'un point du lac est repérée par son abscisse x, l'axe Ox étant vertical descendant et l'origine O étant au niveau de la surface du lac.



Les caractéristiques de la glace sont les suivantes :
— masse volumique $\mu = 990 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$;
— conductivité thermique $\lambda = 2{,}1 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$;
— enthalpie massique de fusion (à $T_e = 273$ K) $\Delta h_f = 335 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$;
— capacité thermique massique $c_g = 2{,}1 \text{ kJ}\cdot\text{kg}\cdot\text{K}^{-1}$.

On fait les deux hypothèses suivantes relatives aux transferts thermiques convectifs :

— le transfert thermique par convection à l'interface glace-air, pour une surface S de glace, pendant la durée $\mathrm{d}t$, est donné par la relation $\delta Q_c = h[T_0(t) - T_a]S\,\mathrm{d}t$, où $T_0(t) = T(x = 0, t)$ est la température de la glace en $x = 0$. La température T_0 est comprise entre T_a et T_e ($T_a < T_0 < T_e$) de sorte que ce transfert s'effectue de la glace vers l'air. On donne $h = 42 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$;

— le transfert thermique par conduction à l'interface eau-glace est négligé, de sorte que la température à cette interface est constamment égale à la température de l'eau : $T(x = \ell, t) = T_e$.

On rappelle l'équation de la diffusion thermique dans la glace : $\lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \mu c_g \dfrac{\partial T}{\partial t}$.

1. Calculer le rapport $\ell_0 = \lambda/h$ en précisant son unité.

2. Le gel de l'eau induit un transfert thermique de l'eau vers l'air.
Que vaut ce transfert thermique q lors du gel de 1 kg de glace ?

3. Que vaudrait le transfert thermique Q cédé par la glace lors du gel de la totalité du lac ? On donnera le résultat sous forme d'une puissance de 10.

4. Dans l'hypothèse où $T_0(t)$ varie lentement (régime quasi-stationnaire), justifier que la température dans la glace (pour x variant de 0 à ℓ) peut s'écrire sous la forme

$$T(x) = ax + b,$$

où les constantes a et b sont à exprimer en fonction de T_0, T_e et ℓ.

5. Entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$, $\ell(t)$ varie de $\mathrm{d}\ell$. Exprimer, pour cet intervalle de temps $\mathrm{d}t$, le transfert thermique δQ_1 cédé par l'eau lors de sa solidification, en fonction notamment de q.

6. Exprimer, pour ce même intervalle de temps, le transfert thermique conductif δQ_2 dans la couche de glace du bas vers le haut, en fonction notamment de la différence $T_\mathrm{e} - T_0(t)$.

7. La continuité du flux thermique à l'interface glace-air impose $\delta Q_\mathrm{c} = \delta Q_2$.
En déduire l'expression de $T_0(t)$ en fonction de T_e, T_a, ℓ_0 et $\ell(t)$.

8. La continuité du flux thermique à l'interface glace-air impose $\delta Q_\mathrm{c} = \delta Q_1$.
En déduire que $\ell(t)$ vérifie une équation différentielle de la forme

$$\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t} + \frac{\ell}{\ell_0}\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t} = v_0\,,$$

où v_0 est une constante homogène à une vitesse, que l'on exprimera en fonction de h, μ, q, T_e et T_a.

9. Intégrer l'équation précédente et montrer que $\ell(t)$ vérifie une équation du second degré.

10. En déduire l'expression de $\ell(t)$ tant que le lac n'est pas gelé dans sa totalité.

11. En fonction de ℓ_0 et v_0, exprimer un temps caractéristique τ de l'évolution de $\ell(t)$, et en donner un ordre de grandeur sachant que v_0 est de l'ordre de $10^{-6}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

12. En fonction de ℓ_0, λ, c_g et μ, exprimer un temps caractéristique τ' de la diffusion dans la glace sur la longueur ℓ_0, et en donner un ordre de grandeur. Conclure sur l'hypothèse du régime quasi-stationnaire faite à la question 4.

Solution

1. On calcule $\boxed{\ell_0 = 5\times 10^{-2}\ \mathrm{m} = 5\ \mathrm{cm}}$.

2. Bilan enthalpique pour le gel (sens inverse de la fusion) d'une masse m d'eau :

$$\Delta H = -m\Delta h_\mathrm{f} = Q_\mathrm{eau}$$

où Q_eau est le transfert thermique *reçu* par l'eau, donc de l'air vers l'eau.

Le transfert thermique de l'eau vers l'air est $Q = -Q_\mathrm{eau} = m\Delta h_\mathrm{f}$.

Le transfert thermique q, pour $m = 1$ kg vaut donc

$$\boxed{q = \Delta h_\mathrm{f} = 335\ \mathrm{kJ}}.$$

3. Le lac a une masse totale

$$m = \mu HS = 1\times 10^3 \times 30\times 10\times 10^6 = 3\times 10^{11}\ \mathrm{kg}.$$

Le transfert thermique cédé par son gel serait $Q = mq$, soit $\boxed{Q = 10^{17}\ \mathrm{J}}$.

4. Si $T_0(t)$ varie lentement, on peut considérer l'équation de la diffusion thermique en régime stationnaire, soit

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = 0.$$

On a donc un profil affine de température $T(x) = ax + b$.

Les conditions aux limites sont

$$T(0) = T_0 = b \quad \text{et} \quad T(\ell) = a\ell + b = T_\mathrm{e}.$$

On a donc

$$\boxed{a = \frac{T_\mathrm{e} - T_0}{\ell}} \quad \text{et} \quad \boxed{b = T_0}.$$

Le profil de température est

$$\boxed{T(x) = \frac{T_\mathrm{e} - T_0}{\ell}x + T_0}.$$

5. La solidification d'une longueur $\mathrm{d}\ell$ correspond à une masse $\mathrm{d}m = \mu S\,\mathrm{d}\ell$; le transfert thermique cédé par l'eau est alors

$$\boxed{\delta Q_1 = \mu Sq\,\mathrm{d}\ell}.$$

6. La loi de Fourier dans la glace donne

$$\vec{j}_Q = j_Q\vec{e}_x = -\lambda\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\vec{e}_x = -\lambda\frac{T_\mathrm{e} - T_0}{\ell}\vec{e}_x.$$

Le transfert thermique *vers le haut* est

$$\delta Q_2 = -j_Q S\,\mathrm{d}t$$

soit

$$\boxed{\delta Q_2 = \lambda\frac{T_\mathrm{e} - T_0(t)}{\ell}S\,\mathrm{d}t}.$$

7. La continuité $\delta Q_\mathrm{c} = \delta Q_2$ s'écrit

$$h[T_0(t) - T_\mathrm{a}]S\,\mathrm{d}t = \lambda\frac{T_\mathrm{e} - T_0(t)}{\ell}S\,\mathrm{d}t$$

soit

$$T_0(t)\left(h + \frac{\lambda}{\ell}\right) = hT_\mathrm{a} + \frac{\lambda}{\ell}T_\mathrm{e}.$$

On en déduit

$$\boxed{T_0(t) = \frac{T_\mathrm{a} + \frac{\ell_0}{\ell}T_\mathrm{e}}{1 + \frac{\ell_0}{\ell}} = \frac{\ell T_\mathrm{a} + \ell_0 T_\mathrm{e}}{\ell + \ell_0}}.$$

8. La relation $\delta Q_\mathrm{c} = \delta Q_1$ s'écrit

$$h[T_0(t) - T_\mathrm{a}]S\,\mathrm{d}t = \mu Sq\,\mathrm{d}\ell$$

soit

$$\mu q\,\mathrm{d}\ell = h\left(\frac{\ell T_\mathrm{a} + \ell_0 T_\mathrm{e}}{\ell + \ell_0} - T_\mathrm{a}\right)\mathrm{d}t = \frac{h\ell_0(T_\mathrm{e} - T_\mathrm{a})}{\ell + \ell_0}\,\mathrm{d}t.$$

On a donc

$$\mu q(\ell + \ell_0)\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t} = h\ell_0(T_\mathrm{e} - T_\mathrm{a}),$$

soit

$$\left(1 + \frac{\ell}{\ell_0}\right)\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t} = \frac{h}{\mu q}(T_\mathrm{e} - T_\mathrm{a}).$$

On a donc

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t} + \frac{\ell}{\ell_0}\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t} = v_0} \quad \text{avec} \quad \boxed{v_0 = \frac{h}{\mu q}(T_\mathrm{e} - T_\mathrm{a})}.$$

9. L'équation précédente peut s'écrire

$$\mathrm{d}\ell + \frac{\ell}{\ell_0}\mathrm{d}\ell = v_0\,\mathrm{d}t$$

soit

$$\int_0^{\ell(t)}\mathrm{d}\ell + \frac{1}{\ell_0}\int_0^{\ell(t)}\ell\,\mathrm{d}\ell = v_0\int_0^t\mathrm{d}t,$$

d'où

$$\ell(t) + \frac{\ell^2(t)}{2\ell_0} = v_0 t.$$

L'épaisseur $\ell(t)$ vérifie donc l'équation du second degré

$$\boxed{\ell^2(t) + 2\ell_0\ell(t) - 2\ell_0 v_0 t = 0}.$$

10. L'équation précédente admet deux racines de signes contraires ; on ne conserve que la racine positive qui a un sens physique, soit

$$\boxed{\ell(t) = \sqrt{\ell_0^2 + 2\ell_0 v_0 t} - \ell_0}\,.$$

11. L'expression précédente peut s'écrire

$$\ell(t) = \ell_0\sqrt{1 + \frac{2v_0 t}{\ell_0}} - \ell_0$$

soit de la forme

$$\boxed{\ell(t) = \ell_0\left[\sqrt{1 + \frac{t}{\tau}} - 1\right]} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau = \frac{\ell_0}{2v_0}}\,.$$

On calcule $\tau = 2{,}5 \times 10^4$ s soit $\boxed{\tau \approx 7\text{ h}}$.
On peut calculer, en prenant $\ell(t = 0) = 0$,

$$\ell(\tau) = \ell_0(\sqrt{2} - 1) \approx 0{,}4\ell_0 \approx 2\text{ cm}\,.$$

En quelques heures, la couche de glace a une épaisseur de quelques centimètres.

➤ On peut définir le temps caractéristique en écrivant

$$\ell(t) = \ell_0\left[\sqrt{1 + \frac{2t}{\tau}} - 1\right]$$

qui permet d'écrire, pour $t \ll \tau$, que $\ell(t) \approx \ell_0 \dfrac{t}{\tau}$. On obtient $\tau = \dfrac{\ell_0}{v_0}$; l'ordre de grandeur $\tau \approx 1 \times 10^5$-$1 \times 10^5$ s est inchangé.

12. La couche de glace a une épaisseur de l'ordre de ℓ_0, qui est donc la distance caractéristique sur laquelle se produit la diffusion thermique.

En ordre de grandeur d'après l'équation de la diffusion thermique, on a donc

$$\frac{\lambda}{\ell_0^2} \approx \frac{\mu c_g}{\tau'}$$

d'où

$$\boxed{\tau' = \frac{\mu c_g \ell_0^2}{\lambda}}\,.$$

On estime $\boxed{\tau' \approx 2 \times 10^3\text{ s}}$.

On a $\boxed{\tau' \ll \tau}$: le transfert thermique est rapide devant la vitesse de croissance de la couche de glace ; on peut donc considérer que la température « a le temps » d'évolution vers son profil affine en régime stationnaire à chaque instant, ce qui valide l'hypothèse du régime quasi-stationnaire.

➤ Quand l'épaisseur de la couche de glace devient importante ($L \gg \ell_0$), le temps caractéristique de la diffusion thermique $\tau' = \dfrac{\mu c_g L^2}{\lambda}$ augmente de façon important, et n'est plus petit devant τ : l'hypothèse du régime quasi-stationnaire n'est valable en fait qu'au début de la formation de la couche de glace, quand son épaisseur reste de l'ordre de ℓ_0.