Sujet d'entraînement « difficile » Diffusion thermique

1 — Croissance hivernale de l'épaisseur de glace de la banquise

Les applications numériques comporteront au plus 2 chiffres significatifs.
L'existence de couverts de glace de grande épaisseur au-dessus des océans polaires est bien sûr une caractéristique remarquable des régions polaires. On étudie ici un modèle simple de croissance de l'épaisseur de la glace en hiver. Pour étudier la croissance de la couche de glace en hiver, on modélise l'océan sous la banquise en formation de façon suivante (fig 1) : en profondeur, la température de l'eau est maintenue constante à $T_1 = 4$ °C par les courants océaniques. Sur une hauteur constante e sous la banquise, l'eau se refroidit progressivement jusqu'à atteindre $T_0 = 0$ °C à l'altitude $z = 0$ de formation de la glace (on néglige tout effet de salinité de l'eau). La couche de glace a une épaisseur croissante $z_g(t)$ qu'il s'agit de déterminer ; au-dessus de celle-ci , l'air est à la température constante $T_2 = -40$ °C. On notera λ_e et λ_g les conductivités thermiques et c_e et c_g est capacités thermiques massiques de l'eau liquide et de la glace, ρ_g et l_f la masse volumique et l'enthalpie massique de fusion de la glace ; toutes ces grandeurs sont des constantes.

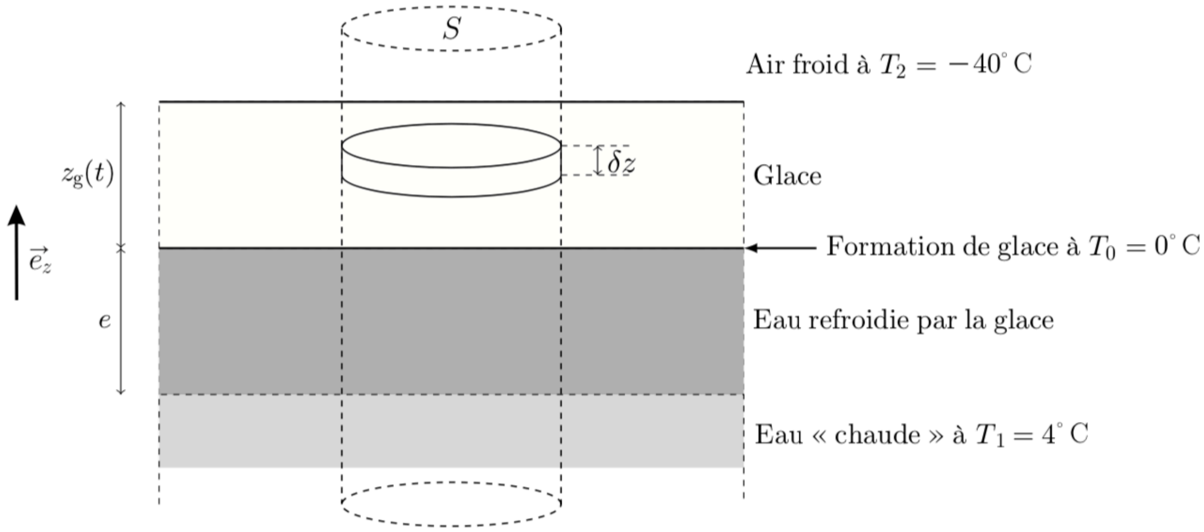


FIGURE 1 – L'océan sous la banquise en formation

L'épaisseur de glace $z_g(t)$ augmente régulièrement du fait de la cristallisation de l'eau refroidie à $T_0 = 0$ °C à la base de la couche de glace. Toutes les études pourront être faites pour un système défini par un cylindre vertical de surface S unité (cf. fig. 1) au sein duquel les transferts thermiques unidimensionnels sont régis par la loi de Fourier.

1. Par une étude des échanges thermiques de l'épaisseur δz prise à l'intérieur de la glace, établir une équation aux dérivées partielles vérifiée par la température $T_g(z, t)$ au sein de la glace.

2. Déterminer une expression donnant l'ordre de grandeur de la durée Δt de la diffusion thermique au sein de la glace sur une hauteur Δz. Quelle durée doit-on attendre afin de pouvoir considérer que, pour des évolutions assez lentes, la température T_g ne dépend pratiquement plus du temps ? Préciser ce que l'on entende par « assez lentes ».

On se place dans ce cas dans toute la suite : dans l'eau comme dans la glace, les répartitions de température seront supposés quasi-statiques[1].

3. Définir et exprimer les résistances thermiques R_g et R_e, pour une aire donnée S, des couches de glace et d'eau refroidie sous la glace.

Les transferts thermiques à travers la surface supérieure de la banquise sont décrits par la loi de Newton des transferts pariétaux (radiatifs et convecto-conductifs) : la puissance échangée par unité d'aire de cette surface vérifie $|\mathcal{P}_u| = h|T_s - T_2|$, où T_s est la température au sommet de la couche de glace ; le coefficient $h > 0$ de la loi de Newton est supposé connu et constant.

4. Exprimer la résistance thermique R_i pour une aire S, de l'interface entre l'air et la glace.

1. Indication : on considère la répartition des températures similaire à celle en régime stationnaire.

5. Montre que le régime quasi-permanent de croissance de la couche de glace [2] peut être décrit par le schéma équivalent de la figure 2 et préciser l'expression du « courant » Φ du « générateur de courant » en fonction notamment de l_{f}, ρ_{g} et de la vitesse de croissance $v_{\mathrm{g}} = \dfrac{\mathrm{d}z_{\mathrm{g}}}{\mathrm{d}t}$ de la couche de glace.

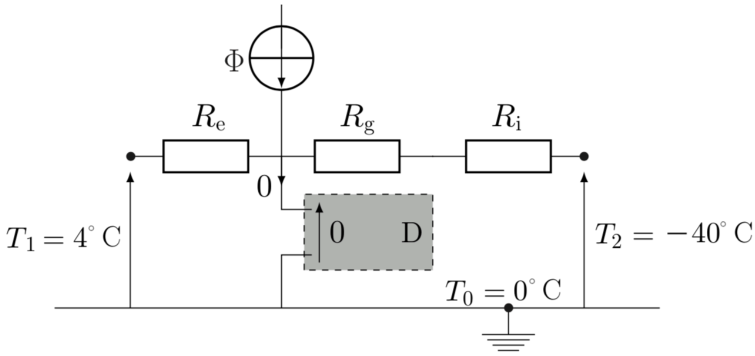


FIGURE 2 – Circuit électrique équivalent à la croissance de la couche de glace

6. En *électricité*, connaissez-vous un dispositif D permettant d'assurer une différence de potentiel nulle sans appel de courant ? Si oui, comment faut-il le brancher ? En *thermodynamique*, pour quelle raison la différence de température aux bornes de D est-elle maintenue nulle ?

7. Établir l'équation différentielle vérifiée par $z_{\mathrm{g}}(t)$. On suppose que pour toutes les valeurs de t considérées, on a

$$\frac{e}{\lambda_{\mathrm{e}}} \gg \frac{z_{\mathrm{g}}}{\lambda_{\mathrm{g}}} + \frac{1}{h}.$$

En déduire la loi d'évolution de l'épaisseur de la couche de glace sous la forme

$$\tau_{\mathrm{g}}\left[\ell_{\mathrm{g}} z_{\mathrm{g}}(t) + z_{\mathrm{g}}^2(t)\right] = \ell_{\mathrm{g}}^2 t$$

où l'on exprimera les grandeurs τ_{g} et ℓ_{g} en fonction des paramètres du modèle. L'instant $t = 0$ correspond au début de la formation de la banquise.

8. Tracer et commenter l'allure de la courbe donnant $z_{\mathrm{g}}(t)$ en fonction de t. On montrera notamment l'existence de deux régimes successifs.

2. Indication : on fera un bilan d'énergie pendant une durée $\mathrm{d}t$ pendant laquelle la couche de glace croît de $\mathrm{d}z_{\mathrm{g}}$.

Solution

1. Considérons une tranche comprise entre z et $z+\delta z$ à l'intérieur de la glace. Le bilan d'énergie s'écrit

$$\mathrm{d}U = \delta Q$$

soit

$$\rho_g c_g S\delta z \frac{\partial T}{\partial t}\,\mathrm{d}t = \phi(z,t)\,\mathrm{d}t - \phi(z+\delta z, t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\partial \phi}{\partial z}\delta z\,\mathrm{d}t$$

soit

$$\rho_g c_g \frac{\partial T}{\partial t} S = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = -S\frac{\partial j_Q}{\partial z} = \lambda S \frac{\partial^2 j_Q}{\partial z^2}\,.$$

On en déduit

$$\boxed{\rho_g c_g \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}\,.$$

2. En notant Δt la durée caractéristique de la diffusion thermique et Δz l'échelle de longueur caractéristique, l'équation précédente conduit à

$$\frac{\rho_g c_g}{\Delta t} \sim \frac{\lambda}{(\Delta z)^2}$$

soit

$$\boxed{\Delta t \sim \frac{\rho_g c_g}{\lambda_g}(\Delta z)^2}\,.$$

La durée d'établissement de la température stationnaire dans la couche de glace d'épaisseur $\Delta z \sim z_g(t)$ est donnée par

$$\Delta t \sim \frac{\rho_g c_g}{\lambda_g} z_g^2(t)\,.$$

Il faut donc que la couche de glace croisse avec une durée caractéristique grande devant $\frac{\rho_g c_g}{\lambda_g} z_g^2(t)$.

3. Étant donnée une couche dont les températures des extrémités sont T_1 et T_2, si Φ est le flux thermique dans le sens (1) → (2), la résistance thermique est définie, en régime stationnaire, par analogie avec la loi d'Ohm :

$$T_1 - T_2 = R_{th}\Phi\,.$$

En régime quasi-stationnaire, l'équation de la chaleur s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}^2 T_g}{\mathrm{d}z^2} = 0$$

dans la couche de glace. Le profil de température est donc affine, et

$$\frac{\mathrm{d}T_g}{\mathrm{d}z} = \frac{T_2 - T_0}{z_g}\,.$$

Le flux thermique est donné par

$$\Phi = -\lambda_g \frac{\mathrm{d}T_g}{\mathrm{d}z} S = \lambda_g \frac{T_0 - T_2}{z_g} S\,.$$

On en déduit

$$\boxed{R_g = \frac{z_g}{\lambda_g S}}\,.$$

De même dans l'eau, on a

$$\Phi = -\lambda_e \frac{\mathrm{d}T_e}{\mathrm{d}z} S = -\frac{T_0 - T_1}{e} S$$

d'où

$$\boxed{R_e = \frac{e}{\lambda_e S}}\,.$$

4. Le flux thermique sortant de la couche de glace (vers l'air) est donné par

$$\Phi = h[T(z_g) - T_2]S = \frac{T(z_g) - T_2}{R_i}$$

d'où l'expression de la résistance thermique

$$\boxed{R_i = \frac{1}{hS}}\,.$$

5. Pendant une durée $\mathrm{d}t$, l'épaisseur de la couche de glace augmente de $\mathrm{d}z_g$. Cela correspond à la solidification d'une masse $\delta m = \rho_g S\,\mathrm{d}z_g$ de glace, qui libère l'énergie

$$\delta Q_g = \delta m l_f = l_f \rho_g S\,\mathrm{d}z_g\,.$$

Cette énergie est évacuée dans la glace et dans l'eau.

Dans la glace, le flux thermique (compté positivement vers le haut) traverse l'association en série de la résistance de la glace et de celle du transfert pariétal, soit la résistance $R_g + R_i$. On a donc

$$\Phi_g = \frac{T_0 - T_2}{R_g + R_i}\,.$$

Dans l'eau, le flux thermique (compté positivement vers le bas) traverse l'eau de résistance R_e, soit

$$\Phi_e = \frac{T_0 - T_1}{R_e}\,.$$

La conservation de la puissance s'écrit

$$\frac{\delta Q_g}{\mathrm{d}t} = \Phi_g + \Phi_e$$

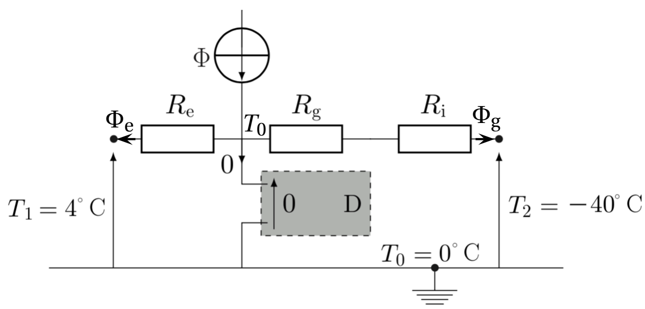
soit

$$l_f \rho_g S \frac{\mathrm{d}z_g}{\mathrm{d}t} = \frac{T_0 - T_2}{R_g + R_i} + \frac{T_0 - T_1}{R_e}\,.$$

Cette relation est analogue à la loi des nœuds

$$\Phi = \Phi_e + \Phi_g\,.$$

Considérons le schéma suivant :



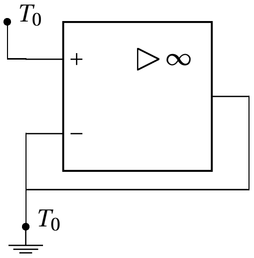
Le potentiel du nœud étant maintenu à T_0, on a bien

$$\Phi = \frac{T_0 - T_1}{R_e} + \frac{T_0 - T_2}{R_g + Re}.$$

Le « courant » est donné par

$$\boxed{\Phi = l_f \rho_g S \frac{dz_g}{dt}}.$$

6. Le dispositif D permettant d'assurer une différence de potentiel nulle sans appel de courant est le montage **suiveur** à ALI, fonctionnant en régime linéaire. Il se branche ainsi :



En thermodynamique, imposer une différence de potentiel nulle aux bornes de D revient à imposer une température nulle entre R_e et R_g, à l'interface entre l'eau et la glace : **c'est la solidification de l'eau** qui se produit de façon isotherme à 0 °C qui impose cette condition.

7. On a établi précédemment

$$\boxed{l_f \rho_g S \frac{dz_g}{dt} = \frac{T_0 - T_2}{R_g + R_i} + \frac{T_0 - T_1}{R_e}},$$

avec

$$R_g = \frac{z_g(t)}{\lambda_g S}\,; \quad R_e = \frac{e}{\lambda_e S} \quad \text{et} \quad R_i = \frac{1}{hS}.$$

On précise que

$$\frac{e}{\lambda_e} \gg \frac{z_g}{\lambda_g} + \frac{1}{h}$$

soit

$$\frac{1}{\frac{e}{\lambda_e S}} \ll \frac{1}{\frac{z_g(t)}{\lambda_g S} + \frac{1}{hS}}.$$

Avec les valeurs données, on a $|T_0 - T_1| = \dfrac{T_0 - T_2}{10}$, donc

$$\frac{T_0 - T_1}{R_e} \ll \frac{T_0 - T_2}{R_g + R_i}$$

et l'équation différentielle peut se simplifier en

$$l_f \rho_g S \frac{dz_g(t)}{dt} = \frac{T_0 - T_2}{\frac{z_g(t)}{\lambda_g S} + \frac{1}{hS}}.$$

En séparant les variables, on peut écrire

$$l_f \rho_g \left(\frac{z_g}{\lambda_g} + \frac{1}{h}\right) dz_g = (T_0 - T_2)\,dt$$

soit

$$\left(z_g + \frac{\lambda_g}{h}\right) dz_g = \frac{\lambda_g}{l_f \rho_g}(T_0 - T_2)\,dt.$$

Comme $z_g(t = 0) = 0$, on en déduit

$$\frac{z_g^2(t)}{2} + \frac{\lambda_g}{h} z_g(t) = \frac{\lambda_g}{l_f \rho_g}(T_0 - T_2)\,t$$

soit

$$z_g^2(t) + \frac{2\lambda_g}{h} z_g(t) = \frac{2\lambda_g}{l_f \rho_g}(T_0 - T_2)\,t = \left(\frac{2\lambda_g}{h}\right)^2 \frac{h^2(T_0 - T_2)}{2 l_f \lambda_g \rho_g}\,t.$$

On obtient donc

$$\frac{2 l_f \lambda_g \rho_g}{h^2(T_0 - T_2)} \left[\frac{2\lambda_h}{h} z_g(t) + z_g^2(t)\right] = \left(\frac{2\lambda_g}{h}\right)^2 t.$$

La loi d'évolution est donc bien de la forme

$$\boxed{\tau_g \left[\ell_g z_g(t) + z_g^2(t)\right] = \ell_g^2 t}$$

avec

$$\boxed{\ell_g = \frac{2\lambda_g}{h}} \quad \text{et} \quad \boxed{\tau_g = \frac{2 l_f \lambda_g \rho_g}{h^2(T_0 - T_2)}}.$$

8. On peut expliciter la loi $z_g(t)$ en résolvant l'équation du second degré

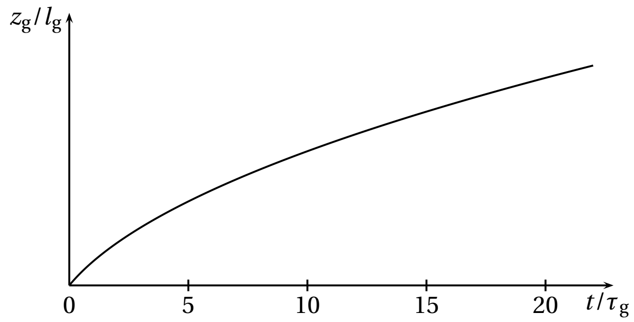
$$\tau_g z_g^2(t) + \tau_g \ell_g z_g(t) - \ell_g^2 t = 0$$

dont la racine positive est

$$z_g(t) = \frac{-\tau_g \ell_g + \sqrt{\tau_g^2 \ell_g^2 + 4\ell_g^2 \tau_g t}}{2\tau_g}$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{z_g(t)}{\ell_g} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1 + 4\frac{t}{\tau_g}} - 1\right].$$



On peut cependant remarquer que l'équation d'évolution

$$\frac{z_g(t)}{\ell_g} + \frac{z_g^2(t)}{\ell_g^2} = \frac{t}{\tau_g}$$

se simplifie dans deux domaines.

- Si $z_g \ll \ell_g$, on peut négliger le terme d'ordre 2 dans le membre de droite, d'où

  $$\boxed{z_g(t) \approx \ell_g \frac{t}{\tau_g}}.$$

  On observe une croissance linéaire avec le temps de l'épaisseur de la couche de glace.

- Si $z_g \gg \ell_g$, le terme d'ordre 2 est prédominant, d'où

  $$z_g^2(t) \approx \ell_g^2 \frac{t}{\tau_g}$$

  soit

  $$\boxed{z_g(t) \approx \ell_g \sqrt{\frac{t}{\tau_g}}}.$$

  La croissance est plus lente, comme $\sqrt{t}$.