TD phénomènes de transport — Fluides en écoulement

Description d'un fluide en écoulement

1 — Dérivée particulaire

Calculer l'accélération d'une particule de fluide pour les écoulements correspondants aux champs des vitesses suivants :

1. $\vec{v}_1(x) = v_0 \dfrac{x}{a} \vec{e}_x$.

2. $\vec{v}_2(y) = v_0 \dfrac{y}{a} \vec{e}_x$.

3. $\vec{v}_3(x,y) = \dfrac{v_0}{\ell}(x\vec{e}_x - y\vec{e}_y)$.

4. $\vec{v}_4(r) = v_0\left(1 - \dfrac{r^2}{a^2}\right)\vec{e}_z$ en coordonnées cylindriques.

5. $\vec{v}_5(r) = v(r)\vec{e}_\theta$ en coordonnées cylindriques.

On rappelle l'expression du gradient en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, G = \frac{\partial G}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial G}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial G}{\partial z}\vec{e}_z.$$

2 — Débit d'une rivière

Le débit moyen annuel de la Marne au niveau de Meaux est d'environ $100\ \text{m}^3\cdot\text{s}^{-1}$, avec une vitesse typique de $0{,}5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

1. À quel débit massique ceci correspond-il ?

2. Estimer la section de la rivière à cet endroit.

3. Une mesure sur une carte permet d'estimer à 80 m la largeur de la Marne au niveau de Meaux. En déduire une estimation de la profondeur moyenne de la rivière sur cette section.

3 — Débit volumique

1. On considère un écoulement laminaire dont le champ des vitesses a pour expression en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{v}(M) = v_0\frac{z}{a}\vec{e}_x \quad \text{pour } 0 \leqslant z \leqslant a.$$

1.a) Déterminer le débit volumique à travers une section normale à Ox, de largeur b selon Oy.

En déduire la vitesse moyenne V_{moy}, vitesse uniforme donnant le même débit volumique.

1.b) L'écoulement est-il incompressible ?

2. On considère un écoulement laminaire dont le champ des vitesses a pour expression en coordonnées cylindriques :

$$\vec{v}(M) = v_0\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)\vec{e}_z \quad \text{pour } 0 \leqslant r \leqslant a.$$

Ce champ des vitesses décrit l'écoulement d'un fluide dans une conduite cylindrique de rayon a.

2.a) Déterminer le débit volumique à travers une section normale à Oz.

En déduire la vitesse moyenne V_{moy}, vitesse uniforme donnant le même débit volumique.

2.b) L'écoulement est-il incompressible ?

4 — Débit massique

1. Déterminer la vitesse d'écoulement d'un gaz dans un tuyau cylindrique si 510 g de ce gaz s'écoule par demi-heure à travers une section du tuyau de diamètre $D = 2$ cm.

2. Le tuyau s'élargit pour atteindre un diamètre $D' = 5$ cm. Quelle est la vitesse du gaz dans la section élargie en supposant l'écoulement incompressible ? Pourquoi l'écoulement peut être considéré comme incompressible alors que le gaz est compressible ?

Donnée :
la masse volumique du gaz est $\mu = 7{,}5\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ dans les conditions de l'expérience.

5 — Écoulement radial

Un brumisateur émet, en régime stationnaire, des particules de fluide de façon sphérique et isotrope à partir d'un point O, avec un débit de masse D_{m}. Le champ des vitesses en coordonnées sphériques est donné par

$$\vec{v} = V_0\vec{e}_r.$$

Déterminer la masse volumique $\mu(r)$.

6 — Écoulement incompressible

Un écoulement est dit incompressible si le volume de toute particule de fluide reste constant au cours de son écoulement.

1. Énoncer l'équation locale traduisant la conservation de la masse.

2. Que peut-on dire de $\dfrac{\mathrm{D}\mu}{\mathrm{D}t}$ pour un écoulement incompressible ? On justifiera soigneusement la réponse.

3. On donne la relation d'analyse vectorielle, pour un champ scalaire $g(M,t)$ et un champ vectoriel $\overrightarrow{A}(M,t)$:

$$\mathrm{div}(g\overrightarrow{A}) = g\,\mathrm{div}\,\overrightarrow{A} + (\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,g)\cdot\overrightarrow{A}$$

Montrer alors que pour un écoulement incompressible, on a $\mathrm{div}\,\overrightarrow{v} = 0$.

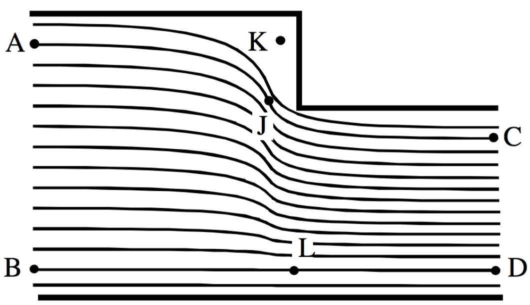
---

7 — Écoulement dans un tube

De l'eau circule dans un tube dans lequel la section se réduit brusquement.

1. On a dessiné les lignes de courants. En quel(s) point(s) la vitesse est-elle maximale ? Minimale ? Pourquoi ?

2. On donne $v_A = 2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Quelles sont les vitesses aux points B, C et D sachant que la section de sortie est égale au $2/3$ de celle d'entrée ?



8 — Canalisation à section lentement variable

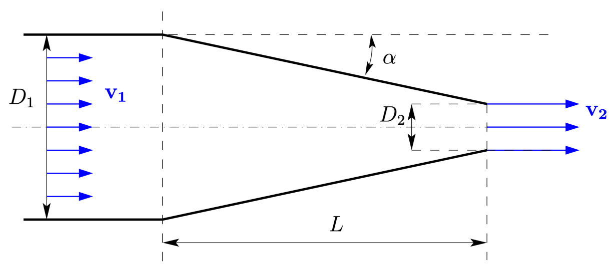
On considère l'écoulement stationnaire d'un fluide compressible dans un tuyau de section lentement variable $S(x)$. Les différents champs ne dépendent que de la coordonnées d'espace x : on note $\mu(x)$ la masse volumique. Le champ des vitesse sera considéré [1] comme colinéaire à Ox : il est de la forme $\overrightarrow{v} = v(x)\overrightarrow{e}_x$.
En faisant un bilan de masse pour le volume délimité par les sections comprises entre x et $x+\mathrm{d}x$, montrer que l'on a

$$\frac{\mathrm{d}[\mu(x)v(x)]}{\mathrm{d}x} + \frac{\mu(x)v(x)}{S(x)}\frac{\mathrm{d}S(x)}{\mathrm{d}x} = 0\,.$$

---

9 — Convergent

On veut accélérer de l'eau dans une conduite de telle sorte que sa vitesse soit multipliée par un facteur K. Pour cela, la conduite comporte un convergent caractérisé par l'angle α.



1. Quelle doit être la longueur L de ce convergent ?

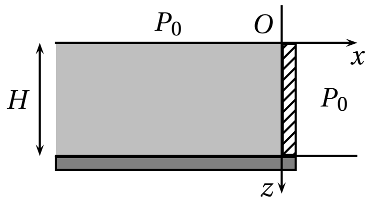
2. Application numérique.
On donne $K = 1{,}5$, $D_1 = 200$ mm et $\alpha = 10°$..

1. Bien que ceci soit en toute rigueur contradictoire avec le fait que la section $S(x)$ soit variable.

Statique des fluides

10 — Actions sur une paroi [*]

On considère la paroi d'un barrage, de hauteur H et de largeur L (selon Oy). On note P_0 la pression atmosphérique ambiante.



1. Quelle est la résultante des actions de pression s'exerçant sur la paroi ? On tiendra compte du fluide et de l'atmosphère.

2. Déterminer le moment $\mathcal{M}_{Oy}$ en O autour de l'axe Oy de ces actions de pression.

On définit le centre de poussée C : c'est le point tel que si la résultante des actions de pression est appliqué en ce point, son moment est égal au moment résultant $\mathcal{M}_{Oy}$ des actions de pression. Déterminer sa cote z_C.

11 — Cube flottant [*]

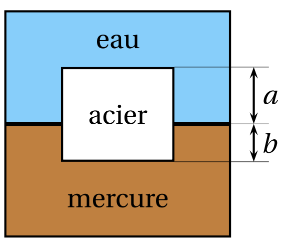
Un cube de masse m, de coté a, flotte sur un liquide de masse volumique ρ.

1. Quelle est la hauteur de cube immergée ?

2. À partir de sa position de repos, on l'enfonce de b (tout en maintenant une partie du cube émergée), et on lâche. Montrer que le cube effectue des oscillations verticales dont on déterminera la période.

12 — Flottation à une interface [*]

Un bloc d'acier parallélépipédique « flotte » à une interface eau-mercure comme indiqué sur la figure.
On note d_a et d_m les densités respectives de l'acier et du mercure.



1. Exprimer le rapport des distances b/a.

2. Application numérique : $d_a = 7{,}85$, $d_m = 13$.

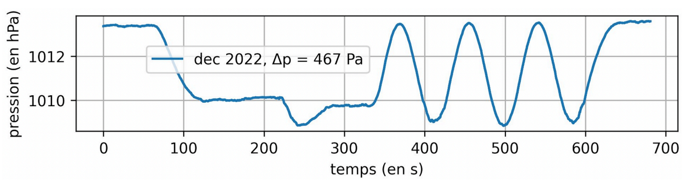
13 — Juste un doigt ! [**]

Un récipient contient une masse $m = 150\,\mathrm{g}$ d'eau, comme indiqué sur la balance électronique.

Qu'indique la balance quand on immerge l'extrémité (une phalange) de l'index sans appuyer sur la balance ?

14 — Quand la routourne tourne ! [*]

Lors des fêtes de Noël, une grande roue est installée dans la ville de Reims. Un physicien est monté dans une cabine de cette roue, muni d'un capteur de pression.
On donne le relevé obtenu :



La différence de pression mesurée lors des oscillations est $\Delta p = 467$ Pa.

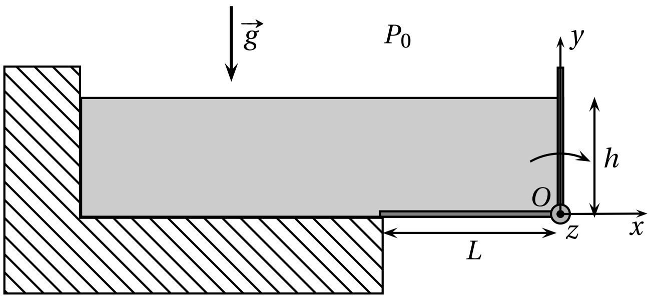
1. Pourquoi observe-t-on une variation de la pression quand la roue tourne ? Combien fait-elle de tours sur l'enregistrement ?

2. La masse molaire de l'air, considéré comme un gaz parfait, est $M = 29\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$. La température est de 10 °C.
Estimer le diamètre de la grande roue.

3. Dans la phase où la roue tourne à vitesse angulaire constante, estimer la vitesse v de la cabine que l'on supposera placée sur le périmètre de la roue, ainsi que son accélération.

15 — Vidange automatique [**]

Un bac de largeur b selon Oz est rempli d'une hauteur h d'eau de masse volumique ρ. Il est fermé d'un côté par deux panneaux perpendiculaires entre eux, pouvant tourner autour de l'axe Oz. L'une de leurs face est en contact avec l'eau, l'autre avec l'atmosphère à la pression P_0.



1. Déterminer la pression dans l'eau.

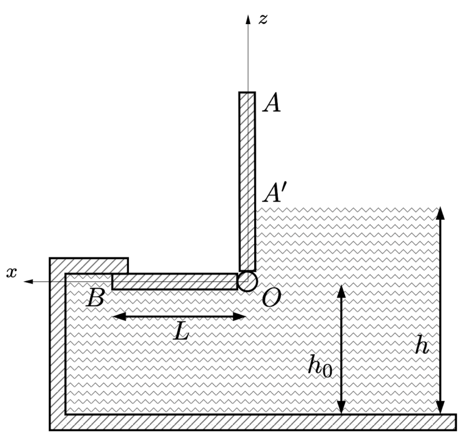
2. La pression de l'eau est-elle uniforme sur le panneau horizontal au fond du bac? Déterminer la résultante des forces de pression s'exerçant sur ce panneau, ainsi que leur moment résultant autour de Oz. On prendra en compte l'action de l'eau et de l'atmosphère.

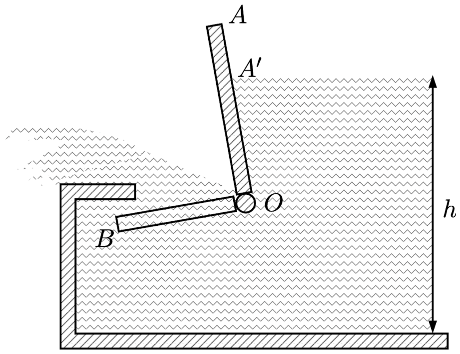
3. Même question pour le panneau vertical.

4. Montrer que si la hauteur h dépasse une certaine valeur h_0 à exprimer, les panneaux pivotent, vidant le bac.

16 — Trop plein [**]

Une porte de trop-plein est représentée ci-dessous. Lorsque le niveau h de l'eau est trop haut, la porte AOB s'ouvre en tournant autour d'un axe perpendiculaire au plan de la figure, et laisse passer l'eau.





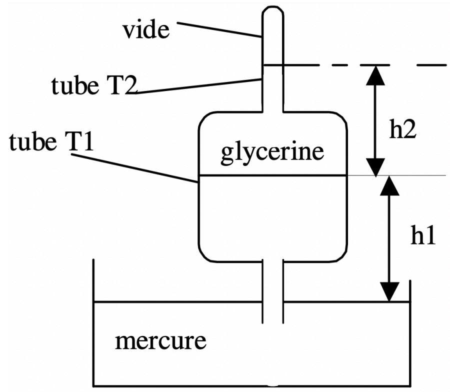
On négligera l'épaisseur de la porte. On pourra poser $H = h - h_0$.

1. Calculer le moment en O des forces de pression exercées par l'eau et l'air sur la porte.

2. En négligeant le poids de la porte, en déduire la hauteur h de liquide pour laquelle la porte bascule. Le résultat dépend-il de la pression atmosphérique?

17 — Baromètre différentiel à deux liquides [**]

Les sections respectives S_0, S_1 et S_2 de la cuve de mercure, du tube T_1 et du tube T_2 cylindriques respectent les proportions $\dfrac{S_0}{S_1} = 10$ et $\dfrac{S_1}{S_2} = 20$.
Le mercure, de masse volumique $\rho_1 = 13{,}6\ \mathrm{kg \cdot L^{-1}}$ et la glycérine, de masse volumique $\rho_2 = 1{,}26\ \mathrm{kg \cdot L^{-1}}$, ont leur surface de séparation dans la tube T_1.
On donne $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. La pression au dessus de la glycérine est pratiquement nulle (tension de vapeur de la glycérine très faible).



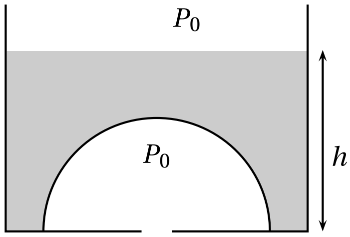
1. La pression atmosphérique est P°, et les dénivellation des deux liquides sont h_1 et h_2. Établir la relation entre P°, h_1 et h_2 à l'équilibre.

2. Quand la pression atmosphérique augmente légèrement de P° à $P^\circ + \Delta P$, la surface libre de la glycérine monte de la quantité z. Donner ΔP en fonction de ρ_1, ρ_2, S_2/S_1, S_1/S_0, g et z.

3. Calculer ΔP en millibar pour $z = 30$ mm. En déduire en mm/millibar la sensibilité de ce baromètre différentiel ainsi que son pouvoir amplificateur B par rapport au baromètre de Torricelli (baromètre à mercure : simple tube retourné sur une cuve de mercure).

18 — Forces de pression [**]

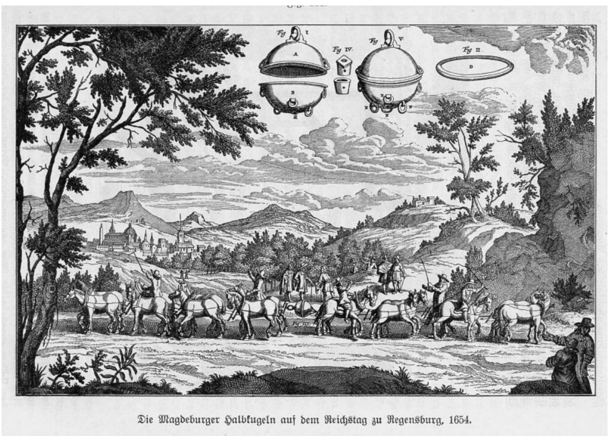
Une demi-sphère de rayon R repose sur le fond d'un récipient rempli sur une hauteur $h > R$ d'un liquide de masse volumique μ.



Le fond du récipient est percé d'une petite ouverture de façon qu'à l'intérieur de la demi-sphère, la pression soit égale à la pression atmosphérique.
Calculer la force minimale à exercer pour soulever la demi-sphère.

19 — Hémisphères de Magdebourg [**]

Otto von Guericke, bourgmestre de Magdebourg, avait joint deux hémisphères métalliques de 28 cm de rayon et réalisé le vide à l'intérieur à l'aide d'une pompe à vide de son invention.
Lors de la première expérience qu'il mena le 6 mai 1654 devant l'empereur Ferdinand II à Ratisbonne, deux attelages de 15 chevaux ne purent séparer les deux hémisphères tant que le vide fut maintenu.



Quelle force aurait-il fallu exercer de chaque côté pour séparer les hémisphères ?

20 — Modèle de l'atmosphère [**]

L'air atmosphérique est considéré comme un gaz parfait de masse molaire $M = 29\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$. Le champ de pesanteur et uniforme, de valeur $g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.
La verticale ascendante est repérée par $\overrightarrow{e}_z$. Au niveau du sol, en $z = 0$, on donne $P_0 = P(0) = 10^5$ Pa et $T(0) = T_0 = 310$ K.

1. Dans le cas de l'atmosphère isotherme, montrer que la pression varie avec l'altitude selon la loi

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H_1}\right),$$

où l'on donnera l'expression puis la valeur numérique de H_1.

2. On modélise l'atmosphère par une variation affine de la température avec l'altitude selon

$$T(z) = T_0 + \lambda z$$

où $\lambda = -5 \times 10^{-3}\ \mathrm{K \cdot m^{-1}}$ est appelée gradient thermique de l'atmosphère.
Déterminer la loi $P(z)$.

3. Si $z \ll H_1$, que peut-on dire (numériquement) de $\dfrac{|\lambda| z}{T_0}$?
Linéariser alors les expressions de $P(z)$ obtenues avec les deux modèles précédents. Que constate-t-on ?

21 — Océan isotherme [**]

La masse volumique de l'eau dans un océan varie avec la pression selon la loi

$$\rho = \rho_0 [1 + a(P - P_0)] .$$

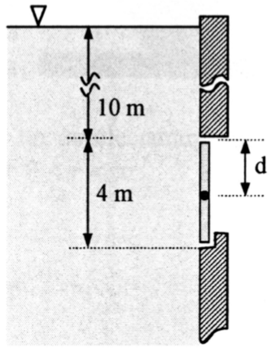
1. La profondeur étant notée $z > 0$, déterminer la loi $P(z)$.

2. Que devient cette loi pour les profondeurs « faibles » ? Préciser.

3. On donne $a = 10^{-10}\ \mathrm{Pa^{-1}}$, et pour $z = 0$, $P = P_0 = 10^5$ Pa et $\rho = \rho_0 = 10^3\ \mathrm{kg \cdot \cdot m^{-3}}$.
Calculer P pour $z = 1$ km. Comparer (erreur relative) avec la pression obtenue en considérant l'eau comme incompressible.

22 — Vanne d'un réservoir [***]

Une porte rectangulaire de 2 m de large est placée dans la paroi verticale d'un réservoir contenant de l'eau. On souhaite que cette porte s'ouvre automatiquement quand le niveau d'eau par rapport au bord supérieur de la porte dépasse 10 m.



À quelle distance d doit être située l'axe de rotation pour qu'il y ait ouverture automatique au-delà d'un niveau d'eau de 10 m ?

23 — Pression au sommet de l'Everest [***]

On considère que la température de l'air (gaz parfait) décroît linéairement avec l'altitude. Au niveau de la mer, la température vaut 20 °C, et au sommet de l'Everest (altitude 8850 m) elle vaut −40 °C. La masse molaire de l'air est $M = 29\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$.

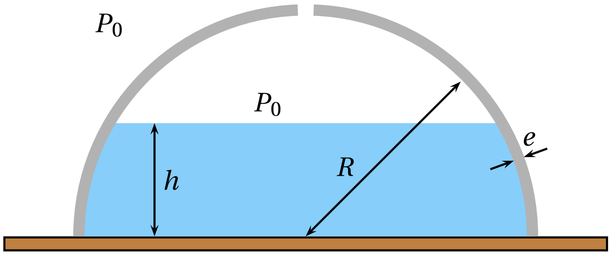
1. Déterminer la loi de variation de la température avec l'altitude.

2. Établir la loi de variation de la pression avec l'altitude. En déduire la pression au sommet de l'Everest en fonction de la pression au niveau de la mer.

3. Montrer que, dans l'atmosphère, on a une relation du type $PV^k = \text{cte}$. Calculer k.

24 — Soulèvement d'un saladier [***]

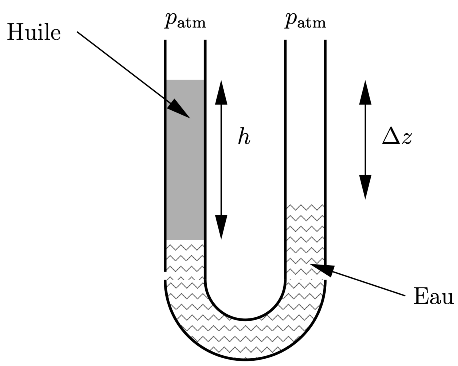
On considère un saladier demi-sphérique renversé sur une table, dont le fond est percé de sorte à ce que la pression de l'air à l'intérieur soit égale à la pression atmosphérique P_0.
La densité du saladier est $d = 2{,}5$ et son épaisseur e vaut 2 % de son rayon R.



On le remplit progressivement d'eau. On se rend compte que le saladier finit par se soulever lorsque l'eau atteint uen certaine hauteur h_{lim}, laissant s'échapper l'eau par sa base.
Calculer h_{lim}.

25 — Mesure de la densité d'une huile [***]

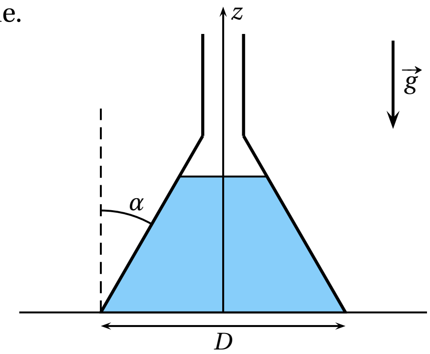
Un tube en U dont les branches sont très longues, de section $s = 1\ \text{cm}^2$, est ouvert aux extrémités. Il contient initialement de l'eau.
D'un côté, on verse $10\ \text{cm}^3$ d'huile. La différence de niveau entre les surfaces libres est $\Delta z = 15$ mm.



Calculer la densité de l'huile.

26 — Quand l'entonnoir décolle [***]

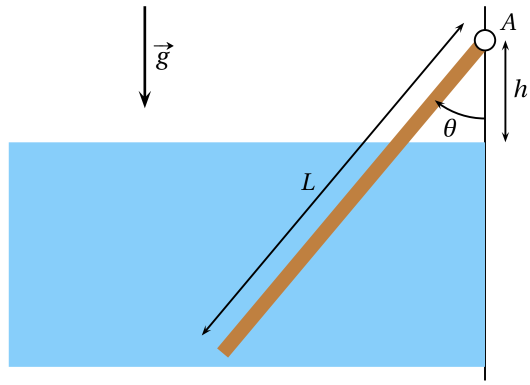
Déterminer l'équation permettant de connaître la hauteur d'eau z_0 à partir de laquelle l'entonnoir de masse M décolle.



On donne $D = 10$ cm, $\alpha = 30°$, $M = 300$ g.

27 — Flottaison d'une barre en bois [***]

Une barre mince de longueur L, constituée par un matériau plus léger que l'eau, est accrochée à un mur en un point A, autour duquel elle peut tourner. L'autre extrémité de la barre plonge dans l'eau.
Le point A est à une hauteur h par rapport au niveau de l'eau. On notera d la densité du matériau.



1. En écrivant l'équilibre des moments, calculer l'inclinaison θ de la barre.

2. Pour quelle valeur critique du rapport h/L la barre tombe-t-elle à la verticale ?

3. Application numérique : calculer θ pour $d = 0{,}65$, $h = 1$ m et $L = 3$ m.

28 — Montgolfière [***]

Une montgolfière de volume $V = 5000\ \text{m}^3$ est remplie d'air à la température $T_0 = 75$ °C. L'air environnant est à la température $T = 17$ °C. L'enveloppe du ballon et la nacelle ont une masse totale m et un volume négligeable par rapport au volume V. La pression atmosphérique est supposée égale à $P_0 = 1{,}013$ bar à l'extérieur comme à l'intérieur du ballon.

1. Déterminer la valeur maximale de m pour que la montgolfière puisse décoller.

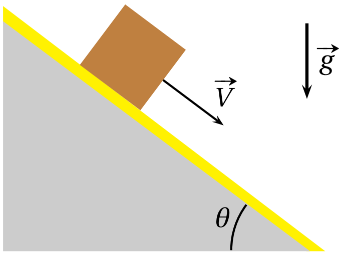
2. Même question lorsque le ballon est rempli d'hélium à la même température que l'air environnant.

Données : masse molaire de l'air $M_{\text{air}} = 29\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$; masse molaire de l'hélium $M_{\text{He}} = 4{,}0\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$.

Écoulement d'un fluide visqueux

29 — Bloc glissant sur de l'huile [*]

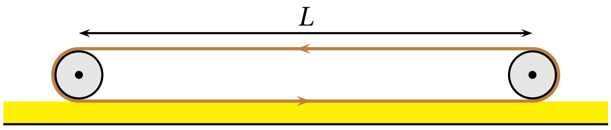
Un bloc de masse m glisse sur un plan incliné lubrifié par une mince couche d'huile de viscosité η. La surface de bloc en contact avec l'huile est S, et l'épaisseur de la couche d'huile h.



En supposant un profil de vitesse linéaire dans la couche d'huile, déterminer la vitesse du bloc quand ce dernier glisse avec une vitesse constante.

30 — Courroie sur un film d'huile [*]

La courroie est entraînée à la vitesse V constante, et est en contact avec une couche d'huile de viscosité η. On note L la longueur en contact avec l'huile, b la largeur de la courroie et h l'épaisseur de la couche d'huile.

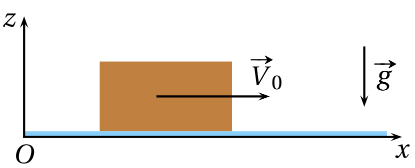


1. En supposant un profil de vitesse linéaire dans la couche d'huile, déterminer la puissance P à fournir pour maintenir la vitesse de la courroie constante, en fonction de h, L, V, b et η.

2. Calculer P dans le cas d'une courroie se déplaçant à $V = 2{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ sur un film d'huile SAE 30W à 20 °C pour laquelle $\eta = 0{,}40\ \mathrm{kg\cdot m^{-1}\cdot s^{-1}}$, avec $L = 2$ m, $b = 60$ cm et $h = 3$ cm.

31 — Freinage d'un bloc [*]

On considère un solide de masse $m = 30$ kg en translation sur le plan (Oxy). Il glisse sur une fine couche d'eau d'épaisseur $e = 1$ mm.
La surface de contact du solide avec l'eau est $S = 400\ \mathrm{cm^2}$. La viscosité dynamique de l'eau est notée η.
On considère que l'écoulement de l'eau sous le bloc est en régime permanent, avec un profil de vitesse de la forme $v(z) = az + b$.



1. Le solide étant animé d'une vitesse $\vec{V}_0 = V_0\vec{u}_x$ constante, déterminer complètement le profil de vitesse $v(z)$.

2. Déterminer l'expression de la force exercée par l'eau sur le bloc.

3. On suppose que les expressions précédentes restent valables quand la vitesse du bloc varie, en remplaçant $\vec{V}_0$ par $\vec{V}(t) = V(t)\vec{u}_x$. Le bloc est lancé avec une vitesse initiale $V_0 = 2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Établir l'expression de sa vitesse $\vec{V}(t)$ et calculer la distance L qu'il parcourt avant de s'arrêter.

32 — Oléoduc [*]

Du fioul de masse volumique $\rho = 910\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ et de viscosité dynamique η est transporté de A vers B à travers une conduite cylindrique d'axe horizontal, de longueur $L = 2$ km et de rayon $R = 8$ cm, avec un débit volumique $Q = 36\ \mathrm{m^3\cdot h^{-1}}$. Grâce à une pompe, on maintient une différence de pression entre les points d'entrée A et de sortie B telle que $P_A = 3$ bar et $P_B = 0{,}4$ bar. On se place en régime stationnaire et on suppose l'écoulement laminaire et piloté par la viscosité.
On rappelle la résistance hydraulique d'une conduite cylindrique de longueur L et de rayon R :

$$R_\mathrm{h} = \frac{8\eta L}{\pi R^4}.$$

1. Calculer la vitesse débitante U du fioul.

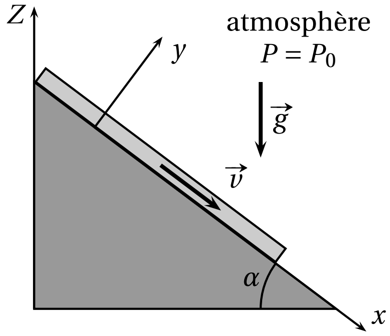
2. Calculer la viscosité dynamique et la viscosité cinématique du fioul transporté.

3. Calculer le nombre de Reynolds $\mathcal{R}e$ de cet écoulement et justifier les hypothèses faites.

4. Quel doit être le rayon R_0 d'une conduite cylindrique qui transporte de l'eau (viscosité cinématique $\nu_\mathrm{eau} = 9\times10^{-7}\ \mathrm{m^2\cdot s^{-1}}$) à la vitesse moyenne de $2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ pour assurer la similitude dynamique de ces écoulement avec celui du fioul étudié ?

33 — Écoulement sur un plan incliné [**]

Une couche mince d'huile (viscosité $\eta = 1$ Pl, masse volumique $\rho = 0{,}9\cdot10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$), d'épaisseur e, coule le long d'un plan incliné dont la ligne de plus grande pente fait un angle α avec l'horizontale.



Le champ des vitesse, indépendant du temps, est de la forme
$$\vec{v} = v(y)\,\vec{e}_x.$$

On néglige les forces de viscosité sur l'interface air/-huile.

1. Déterminer le profil de vitesse $v(y)$.

2. Établir une relation entre l'épaisseur e et le débit massique D_m pour une largeur L de l'écoulement.

3. Calculer la vitesse maximale.

34 — Fioul dans une conduite [**]

Du fioul parcourt un tuyau cylindrique de diamètre $D = 30$ cm, de longueur $L = 1$ km. Sa masse volumique est $\mu = 870\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ et sa viscosité cinématique est $\nu = 5 \times 10^{-5}\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$. L'écoulement est laminaire de la forme $\vec{v} = v(r)\vec{e}_z$ en coordonnées cylindriques. La vitesse moyenne sur tout le tuyau est $v_{\text{moy}} = 1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. La loi de vitesse à l'intérieur du tuyau est donnée, en coordonnées cylindriques, par $v(r) = 2(1 - 44{,}44r^2)$.

1. Vérifier que cette loi est cohérente (v_{moy}, conditions aux limites).

2. Calculer le débit volumique.

3. Qu'est-ce qu'un écoulement laminaire ? Quel critère peut-on utiliser pour prédire si un écoulement a des chances de l'être ? L'écoulement de fluide décrit ici risque-t-il d'être turbulent ?

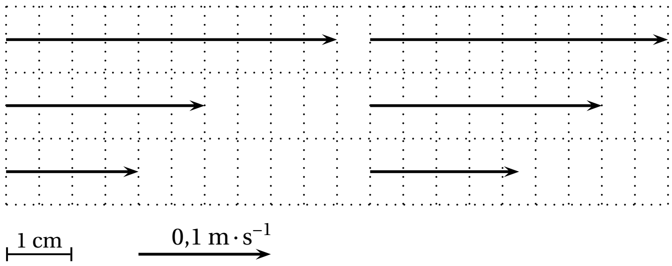
4. Le fluide est newtonien. Écrire l'expression de la force vectorielle $\mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{i->e}}$ exercée dans une tranche de longueur $\mathrm{d}z$ par le fluide intérieur à un cylindre de rayon r sur le fluide extérieur.

5. Calculer la force due à la viscosité exercée sur la paroi.

6. Montrer que la pression est une fonction affine de z. En raisonnant sur une pellicule cylindrique de longueur L, comprise entre r et $r + \mathrm{d}r$, déterminer l'écart de pression entre l'entrée et la sortie du tuyau.

35 — Mesure de viscosité par lecture d'une carte des vitesses [**]

On donne la carte partielle du champ des vitesses d'un écoulement stationnaire incompressible d'un fluide newtonien de masse volumique $\mu = 1500\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. La pression est uniforme dans tout le fluide et on néglige le poids.



Donner une estimation numérique de la viscosité du fluide.

36 — Transfusion sanguine [**]

On désire réaliser une transfusion sanguine à l'aide d'un poche de sang. On utilise pour cela un tuyau souple et suffisamment large pour que l'on puisse y négliger les phénomènes liés à la viscosité du sang. Au bout de ce tuyau, une aiguille horizontale assure le passage du sang vers la veine du patient allongé sur le lit.
La surface libre du sang dans la poche est située à une hauteur H au-dessus de l'aiguille et est soumise à la pression atmosphérique P_0.
Dans l'aiguille, de longueur $L = 2{,}0$ cm et de rayon intérieur $a = 0{,}10$ mm, les phénomènes visqueux ne sont plus négligeables.
La viscosité du sang vaut $\eta = 1{,}6$ mPa·s et sa masse volumique vaut $\rho = 1{,}0\ \mathrm{kg \cdot L^{-1}}$. La pression dans la veine est constante et supérieure à la pression atmosphérique : $P_v = P_0 + \Delta P$, avec $\Delta P = 7$ mbar. Enfin, on précise que l'écoulement dans la poche et dans le tuyau souple sont très lents.
À quelle hauteur H faut-il placer la poche de sang ? Commenter.

37 — Écoulement de Couette généralisé [**]

On considère un écoulement entre deux plans horizontaux parallèles à l'axe Ox, distants de a, le plan inférieur $y = 0$ étant fixe, et le plan supérieur $y = a$ se déplaçant à la vitesse $V_0\,\vec{e}_x$ parallèlement à lui-même.
Les plaques sont de longueur L ($0 \leqslant x \leqslant L$) et de largeur b (selon Oz).
Dans tout l'exercice, la pesanteur est négligée. Le fluide est newtonien, de viscosité η et de masse volumique μ.
L'écoulement entre les deux plans est supposé laminaire et stationnaire, décrit par le champ des vitesses $\vec{v}(M,t) = v(y)\,\vec{e}_x$.
On admet que pour l'écoulement $\vec{v} = v(y)\vec{e}_x$, l'équivalent volumique des forces de viscosité est donné par $\vec{f}_{\text{visc}} = \eta \Delta v\,\vec{e}_x$.

Écoulement de Couette plan

On n'impose aucune différence de pression entre $x = 0$ et $x = L$: la pression est donc uniforme dans le fluide : $P(x) = P_0$.

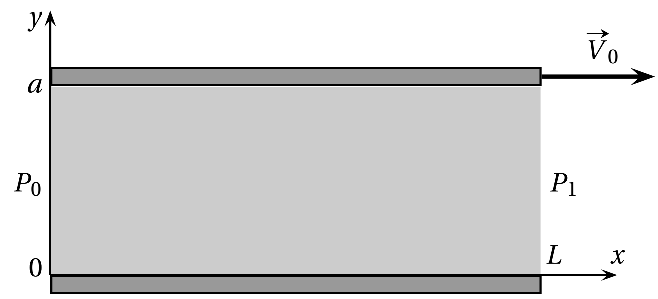
1. Établir le profil de vitesse $v(y)$.

2. Calculer le débit volumique Q et la vitesse débitante.

3. Calculer la force exercée par le fluide sur chacune des plaques.

Écoulement de Couette généralisée

On impose maintenant un gradient de pression parallèlement au plan, par les conditions aux limites $P(0) = P_0$ et $P(L) = P_1 = P_0 + \Delta P$ (le terme ΔP est algébrique).



4. Montrer que le gradient de pression $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}$ est uniforme dans le fluide, et donner son expression en fonction de ΔP et L.

5. Exprimer le profil de vitesse $v(y)$ en fonction de ΔP, L, a, V_0 et η.

6. Exprimer le débit Q en fonction de ΔP, a, b, η et V_0. Peut-on avoir $Q = 0$? Représenter l'allure du profil de vitesse dans ce cas.

7. Exprimer (toujours dans le cas $Q = 0$) la force exercée par le fluide sur chacune des plaques.

---

38 — Écoulement sanguin [**]

Un liquide visqueux newtonien incompressible de masse volumique μ, de viscosité dynamique η, s'écoule dans un tuyau cylindrique horizontal de rayon R et de longueur L. Le régime d'écoulement est laminaire et stationnaire, avec un débit volumique D_v.
La vitesse en un point situé à la distance r de l'axe du tuyau, de symétrie axiale d'axe Oz, obéit à la loi

$$\vec{v}(r) = B\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\vec{u}_z.$$

Les données sont μ, η, R, L et le débit volumique D_v.

1. Expliciter le coefficient B en fonction des données.

2. Le module de la force tangentielle exercée par le fluide, à cause de sa viscosité, sur la paroi interne du tuyau est

$$F = 8\eta\frac{L}{R^2}D_\mathrm{v}.$$

2.a) Démontrer cette relation en précisant clairement le raisonnement.

2.b) Préciser sur un schéma le sens de cette force.

3. Le maintien du mouvement stationnaire du fluide nécessite une différence entre la pression P_e à l'entrée du tuyau et la pression P_s à la sortie :

$$P_\mathrm{e} - P_\mathrm{s} = \frac{F}{\pi R^2}.$$

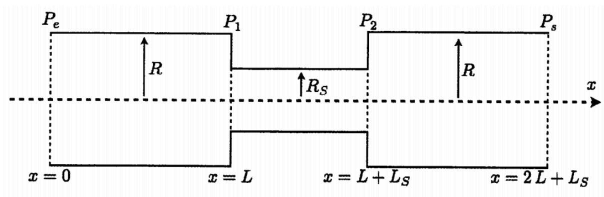
Justifier qualitativement cette relation.

4. En déduire l'expression de la résistance hydraulique R_h en fonction des données.

---

39 — Sténose [**]

Une sténose correspond à une réduction brutale et localisée du diamètre d'un vaisseau sanguin. Schématiquement, cette situation peut être représentée comme étant la superposition de trois tronçons cylindriques, de même axe et de rayons R, R_s et R différents, comme illustré sur la figure.



La sténose correspond au tronçon de plus faible rayon et est située entre les abscisses $x = L$ et $x = L + L_\mathrm{s}$.

1. Représenter l'allure des lignes de courant de l'écoulement. Que peut-on dire de la vitesse de l'écoulement dans la zone sténosée ?

2. En faisant des hypothèses raisonnables, exprimer puis calculer numériquement le débit volumique Q parcourant le faisceau sanguin.

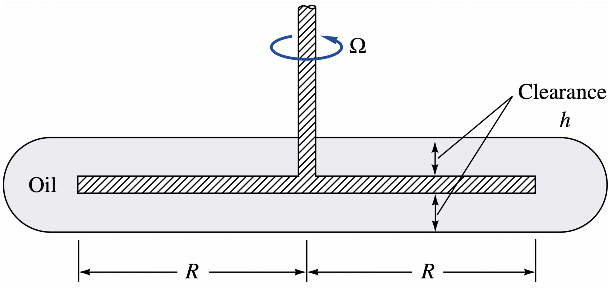
3. Évaluer numériquement le nombre de Reynolds $\mathcal{Re}$ dans la partie sténosée et dans les parties non sténosées. Conclure quant à la validité du modèle utilisé.

4. Citer une technique pouvant être utilisée pur diagnostiquer une sténose.

Données : $R = 6$ mm ; $2L + L_\mathrm{s} = 8$ cm ; $\Delta P = P_\mathrm{e} - P_\mathrm{s} = 40$ Pa ; $L_\mathrm{s} = 1$ cm ; $R_\mathrm{s} = 2$ mm.
Masse volumique du sang : $\rho = 1060\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.
Viscosité dynamique du sang : $\eta = 6\ \mathrm{mPa\cdot s}$.

40 — Couple sur un disque en rotation [***]

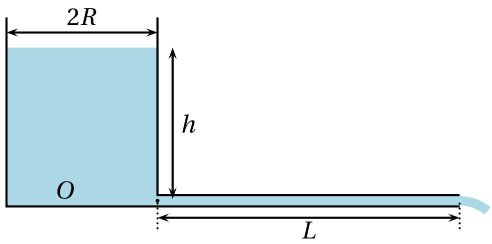
Un disque de rayon R tourne à la vitesse angulaire constante Ω à l'intérieur d'un récipient cylindrique rempli d'huile de viscosité η.



En supposant un profil de vitesse linéaire, et en négligeant la force exercée sur le bord du disque, déterminer l'expression du couple exercé par les forces visqueuses sur le disque.

41 — Viscosimètre de Poiseuille [***]

Un liquide de viscosité cinématique ν s'écoule lentement (l'écoulement est quasi-stationnaire) d'un réservoir cylindrique de rayon R dans un tube horizontal de longueur L et de rayon a.



1. Quelles hypothèses vous semblent-il raisonnable d'émettre dans les différentes parties de l'écoulement ?

2. Établir l'équation différentielle satisfaite par la hauteur $h(t)$ du fluide dans le récipient, en faisant apparaître un temps caractéristique τ. La résoudre en posant $h(t=0) = h_0$.

3. Il a fallu un temps $\Delta t = 59$ min pour que le niveau du liquide passe de $h_0 = 6$ cm à $h(\Delta t) = 3$ cm.

Déterminer la viscosité cinématique ν du liquide sachant que $R = 2$ cm, $a = 0{,}5$ mm, $L = 50$ cm et $g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

4. Calculer la vitesse débitante de l'écoulement dans le tuyau, puis vérifier la pertinence des hypothèses faites.

42 — Écoulement dans une seringue [***]

On considère une seringue de rayon $R = 1$ cm, avec une aiguille de rayon intérieur $a = 0{,}2$ mm. La seringue et l'aiguille ont toutes les deux une longueur $L = 8$ cm.
La seringue contient un antalgique liquide de densité $d = 1$ et de coefficient de viscosité dynamique $\eta = 3\times10^{-3}$ Pl.
On injecte 10 mL en 10 s.
La pression dans la veine du patient vaut 1,1 bar.
Quelle force doit appliquer l'infirmier sur le piston de la seringue pour faire l'injection ?
Indications : on considérera en coordonnées cylindriques de le champ des vitesses $\vec{v} = v_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)$ *pour un cylindre de rayon R et de longueur L.*

1. *Relier v_0 au débit volumique.*

2. *Calculer l'accélération d'une particule de fluide, et conclure quant à la somme des forces s'exerçant sur une tranche de rayon r, comprise entre z et z + dz.*

3. *En déduire que le* $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}$ *est constant, et l'exprimer en fonction de* $\Delta P = P(0) - P(L)$.

4. *Définir et déterminer l'expression de la résistance hydraulique de la conduite.*

43 — Montée de lave [***]

On s'intéresse à la montée stationnaire de la lave (liquide incompressible newtonien de viscosité $\eta = 20\ \mathrm{kPa\cdot s}$ et de masse volumique $\rho = 2700\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$) le long d'une cheminée volcanique. La cheminée est assimilée à un cylindre vertical d'axe Oz, de hauteur $h = 5$ km et de rayon $R = 10$ m.
On cherche le champ des vitesses sous la forme $\vec{v} = v(r,z)\vec{e}_z$.

1. La vitesse $v(r,z)$ dépend-elle des deux variables r et z ? Pourquoi ?

2. Montrer que le débit volumique de lave s'écrit

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta h}(P_{\text{inf}} - P_0 - \rho g h)$$

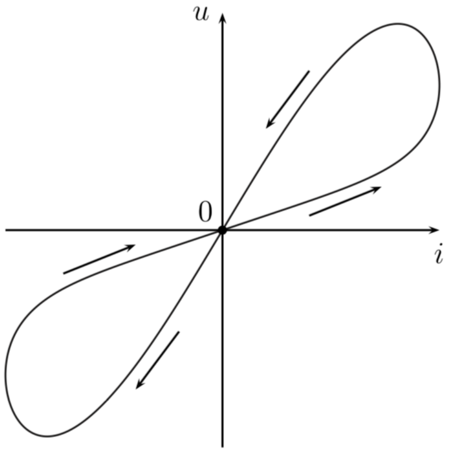
où $P_{\text{inf}} = 2$ kbar désigne la pression régnant à la base de la cheminée, et P_0 la pression atmosphérique.

3. Calculer numériquement le débit volumique Q ainsi que les vitesses maximale $v_{\max}$ et débitante u.

4. Discuter la pertinence des hypothèses faites.

44 — *A pipe whose diameter varies* [***]

En 1971, le professeur Leon Chua prédit l'existence d'un dipôle passif nouveau capable de servir de mémoire, complétant les liste des trois dipôles fondamentaux de l'électricité à savoir le resistor, la bobine et le condensateur. Le terme memristor qu'il inventa résulte de la contraction des deux termes *Memory* et resistor.
On donne la courbe $u(i)$ du memristor :



Un tel composant a été mis au point en 2008.
Leon Chau a décrit le memristor comme un tuyau dans lequel s'écoulerait un fluide, dont le diamètre varierait en fonction de la valeur du débit du fluide et du sens dans lequel le fluide traverserait.
On étudie l'écoulement lent d'un liquide dans un tuyau cylindrique horizontal de section circulaire S, de petit diamètre d et de longueur ℓ. L'écoulement est la conséquence d'un écart de pression entre l'entée, où la pression est P_e, et la sortie, où la pression est $P_\mathrm{s} < P_\mathrm{e}$. Ces pressions sont supposées maintenues au cours du temps. L'objectif est de déterminer l'expression de la résistance hydraulique correspondant à l'écoulement dans le tuyau et de voir qu'en modifiant le diamètre du tuyau, on a bien lune évolution de la résistance hydraulique permettant de faire l'analogue proposée par Leon Chua pur la memristor en électricité et sa résistance électrique.
Afin d'avoir une approche relativement réaliste de l'écoulement, on prend en compte le fait que la vitesse du fluide n'est pas uniforme dans une section donnée de l'écoulement. Pour rendre compte de la chute de pression le long du tuyau, on introduit le coefficient de friction f défini par

$$P_\mathrm{e} - P_\mathrm{s} = f\frac{\ell}{d}\frac{\rho V^2}{2}$$

où ρ désigne la masse volumique du liquide et V la vitesse débitante. On donne le diagramme de Moody.

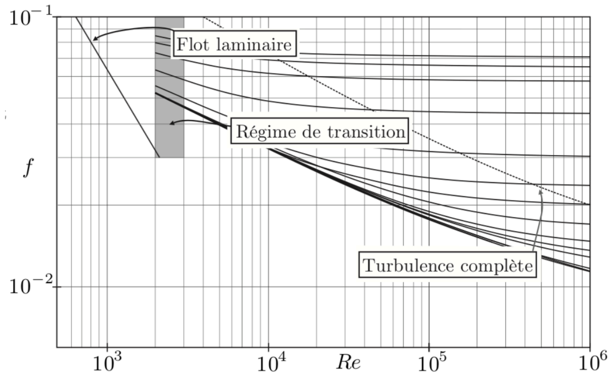
1. Formuler des hypothèses raisonnables pour décrire l'écoulement du fluide dans le tuyau.

2. Déterminer la dimension de f. Compte-tenu de vos hypothèses, identifier le régime d'écoulement dans le tuyau. Déterminer à l'aide du diagramme de Moody l'expression de f en fonction de $\mathcal{R}\mathrm{e}$.

3. En déduire une formulation de la loi de Hagen-Poiseuille liant la chute de pression $P_\mathrm{e} - P_\mathrm{s}$ au débit volumique D_v du liquide du parcourt le tuyau.

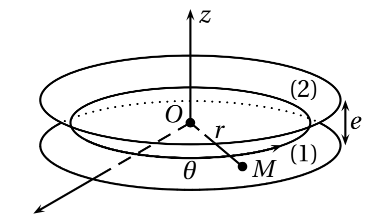
4. Donner l'expression de la résistance hydraulique du tuyau. Discuter précisément les analogies et les différences avec la notion de résistance électrique. Connaissez-vous, dans un autre domaine de la physique, une autre résistance ? Y a-t-il une analogie possible avec les deux précédentes ?

5. L'image, proposée par Leon Chua, du memeristor comme un tuyau dont le diamètre varie, est-elle appropriée.



45 — Viscosimètre [***]

Un fluide de viscosité η et de masse volumique μ occupe le volume délimité par deux plaques circulaires de rayon a, espacées de e, avec $e \ll a$. La plaque 1 est à la cote $z = 0$, la plaque 2 à $z = e$.



Les plaques tournent aux vitesses angulaires respectives ω_1 et ω_2 autour de Oz.

1. En régime laminaire, on cherche le champ des vitesses sous la forme $\vec{v}(M,t) = r\omega(z,t)\,\vec{e}_\theta$. Justifier.

2. En considérant un volume élémentaire compris entre r et $r+\mathrm{d}r$, θ et $\theta+\mathrm{d}\theta$, z et $z+\mathrm{d}z$ et calculer la résultante des forces de viscosité qu'il subit. On admettra qu'elle ne fait intervenir que les contraintes de cisaillement s'exerçant sur les faces horizontales situées en z et $z+\mathrm{d}z$.

3. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\omega(z,t)$.

4. On se place en régime permanent, dans le cas où $\omega_2 = 0$ et $\omega_1 \neq 0$. Calculer le couple Γ subi par la plaque 2.

Écoulement autour d'un obstacle

46 — Dimensionnement [*]

On étudie un avion de longueur $L = 5$ m destiné à voler à une vitesse de 200 km·h^{-1} dans l'air.

1. Une maquette de cet avion à l'échelle 1/10^{e} est étudiée dans une soufflerie à air. Déterminer la vitesse de l'écoulement.

2. Au lieu d'une soufflerie, on réalise la même étude dans une veine liquide. Quelle vitesse doit avoir l'eau par simuler la réalité ?

47 — Viscosimètre à chute de bille [*]

On considère une grande éprouvette verticale de rayon $R = 5$ cm remplie d'huile d'olive, de masse volumique $\mu_h = 916$ kg·m^{-3} et de viscosité η inconnue. Une bille sphérique en acier, de masse volumique $\mu_b = 7880$ kg·m^{-3} et de rayon $r = 250$ µm, est lâchée sans vitesse initiale à la surface libre de l'huile. On propose de modéliser la force de viscosité exercée par l'huile sur la bille au moyen de la loi de Stokes.

1. Écrire l'équation différentielle vérifiée par la vitesse de la bille.

2. Montrer qualitativement que la vitesse tend vers une valeur limite v_ℓ à déterminer.

On suppose que la bille atteint très rapidement cette vitesse limite. On mesure la durée $\Delta t = 83$ s nécessaire pour que la bille parcourt une distance $H = 100$ cm.

3. Calculer la viscosité de l'huile.

4. Vérifier la validité des différentes hypothèses mises en jeu dans cette méthode de mesure.

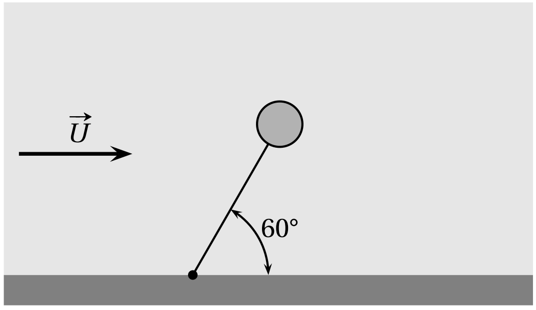
48 — Laminaire ou turbulent ? [*]

La valeur admise du nombre de Reynolds pour la transition laminaire-turbulent dans une conduite cylindrique est $\mathcal{R}e_c \approx 2300$.
Calculer la vitesse moyenne à laquelle s'effectue cette transition dans le cas d'un écoulement d'air et dans le cas d'un écoulement d'eau à travers dune conduite de 5 cm de diamètre à 20 °C.
Commenter.

49 — Vitesse d'écoulement d'une rivière [**]

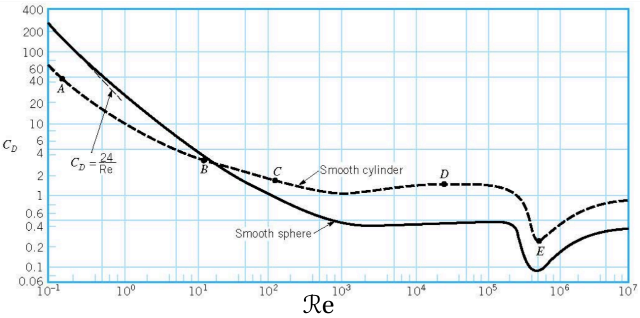
Une sphère de liège de 2 pouces (*inches*) de diamètre est attachée au fond d'une rivière par un câble fin. Sachant que le coefficient de traînée est de 0,5 et que l'on néglige la masse et la traînée du câble, déterminer la vitesse U d'écoulement de la rivière.
Vérifier la pertinence de la valeur du coefficient de traînée.

Le poids spécifique (ρg) du liège est de 13 lb·ft^{-3}. On donne 1 lb = 4,448 N, 1 ft = 0,3048 m et 1 inch = 2,54 cm.



50 — Tennis et golf [**]

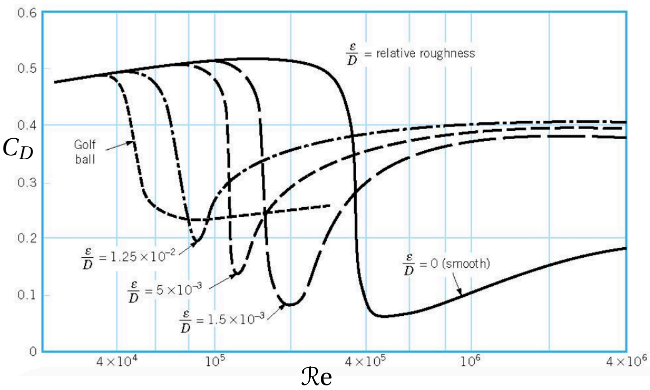
On donne l'évolution du coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds :



1. Calculer la force de traînée s'exerçant sur une balle de tennis de rayon $R = 33$ mm, lancée à 200 km·h^{-1}.
Viscosité cinématique de l'air : $\nu_{air} = 15 \times 10^{-6}$ m^2·s^{-1}.
Masse volumique de l'air : $\rho = 1{,}23$ kg·m^{-3}.
Comparer au poids de la balle ($m = 58$ g) et à la poussée d'Archimède.

2. Que se passe-t-il au point E ? Est-il accessible avec une balle de tennis ?

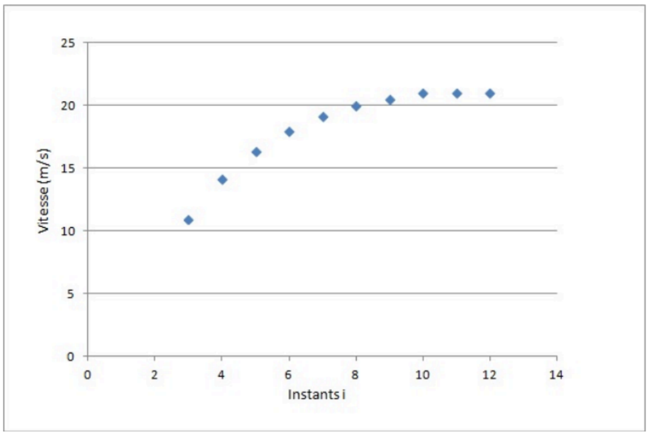
3. Quand la balle n'est pas lisse, le coefficient de traînée ne dépend pas que du nombre de Reynolds mais aussi de la rugosité relative $\varepsilon_r = \varepsilon / D$.

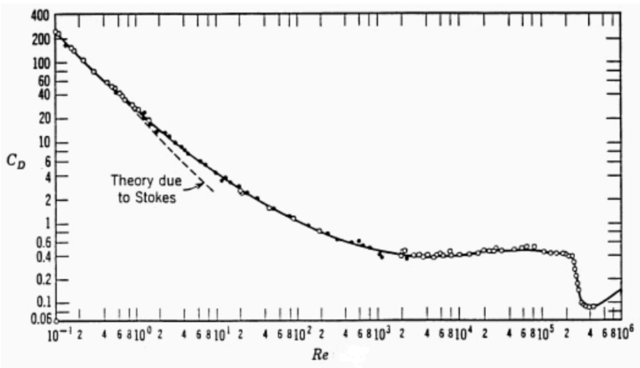


Quel phénomène, en terme d'écoulement, est à mettre en rapport avec les courbes ci-dessus ?
Discuter de l'intérêt des alvéoles sur une balle de golf.

51 — Ballon de foot [**]

Dans une enceinte contenant de l'air, on lâche un ballon de football de masse $m = 500$ g d'une hauteur de 27 m. Par vélocimétrie laser, on mesure sa vitesse à différents instants t_i, tels que $t_{i+1} - t_i = 30$ ms. On donne de plus le coefficient de traînée d'une sphère en fonction du nombre de Reynolds.

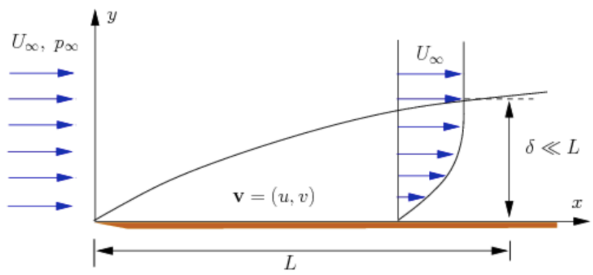




Déterminer le diamètre du ballon de football.

52 — Couche limite [**]

On étudie la couche limite prenant naissance sur une plaque dans un écoulement laminaire de vitesse caractéristique $\vec{U} = U_\infty \vec{e}_x$.
On note δ l'épaisseur de la couche limite à la distance L du bord de la plaque.



1. Estimer la durée τ du transport de quantité de mouvement convectif du fluide entre le bord de la plaque et un point à la distance L de ce bord.

2. Pendant cette durée, le transfert convectif de quantité de mouvement se fait sur une distance δ perpendiculairement à la plaque. Estimer δ en fonction de τ et de la viscosité cinématique $\nu = \eta/\mu$.

3. Rappeler l'expression du nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement autour de la plaque. En déduire l'expression de l'épaisseur δ de la couche limite en fonction de L et $\mathcal{R}e$.

Table des matières