

DS n° 3

Sujet type CCINP-E3A

Le sujet comporte quatre parties indépendantes.

Merci de suivre les conseils suivants :

- **laisser un espace en début de copie pour la note et les commentaires;**
- laisser une marge à chaque page pour les commentaires et décompte des points;
- respecter et indiquer la numérotation des questions;
- souligner ou encadrez les résultats.

Partie I — Isolation thermique de l'habitat (CCINP PSI 2025)

1 — Étude d'une paroi plane

On considère une paroi plane (figure I-1) d'épaisseur e_0 et de surface S_0 . On néglige les effets de bord selon y et z . La température ne dépend que de x . La température sur la première face, située en $x = 0$, est T_1 , celle de la seconde face, située en $x = e_0$ est T_2 .

On note c la capacité thermique massique du matériau constitutif de la paroi, ρ sa masse volumique et λ sa conductivité thermique.

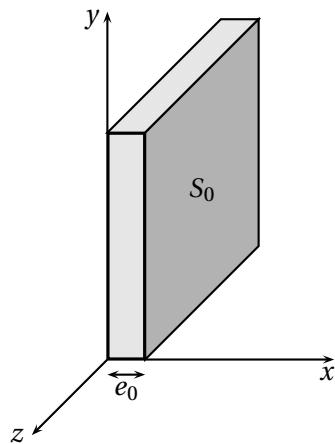


FIGURE I-1 – Paroi plane

- Q1.** Rappeler la loi de Fourier. Préciser les notations et les unités des grandeurs physiques qui interviennent.
- Q2.** On supposera qu'il y a pas de source de chaleur interne. Établir pour l'étude de cette paroi l'équation de la diffusion thermique en coordonnées cartésiennes.
- Q3.** Déterminer en régime stationnaire le profil de température $T(x)$ de cette paroi en fonction de e_0 , T_1 et T_2 .
- Q4.** Donner, en régime stationnaire, l'expression du flux thermique Φ traversant cette paroi orientée dans le sens des $x > 0$ en fonction de e_0 , T_1 , T_2 , λ et S_0 . En déduire l'expression de la résistance thermique R_{th} de cette paroi en fonction de e_0 , λ et S_0 .

2 — Étude d'une fenêtre double vitrage

Une fenêtre double vitrage (figure I-2) de surface S_f est constituée de deux parois vitrées de même épaisseur e séparées d'une couche d'argon statique également d'épaisseur e . En plus des phénomènes de diffusion thermique dans le verre et dans l'argon, il faut tenir compte d'échanges conducto-convectifs au niveau des interfaces air extérieur-verre et verre-air extérieur. Ces échanges sont décrits par la loi de Newton $P = hS_f(T_{\text{air}} - T_s)$ où P est la puissance échangée, h est une coefficient d'échange, T_{air} et T_s sont les températures de l'air et du verre à une même interface.

Soient T_{ext} et T_{int} respectivement les températures de l'air extérieur et de l'air intérieur de la pièce d'habitation équipée de cette fenêtre. Le coefficient d'échange conducto-convectif à l'interface air extérieur-verre est noté h_e ,

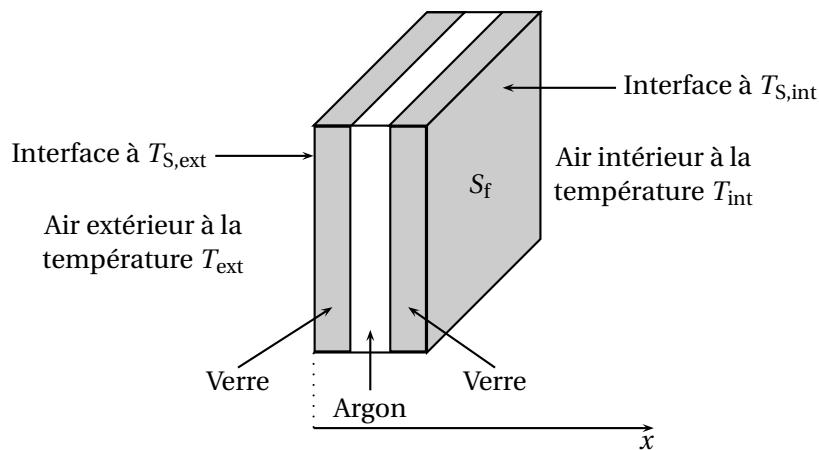


FIGURE I-2 – Fenêtre double vitrage de surface S_f

celui à l'interface verre-air intérieur est noté h_i . Les conductivités thermiques du verre et de l'argon sont notées respectivement λ_v et λ_{Ar} , avec $\lambda_{Ar} \ll \lambda_v$.

Soient $T_{S,ext}$ et $T_{S,int}$ respectivement les températures en surface des verres aux interfaces air extérieur-verre et verre-air intérieur.

Les parois vitrées occupent les zones $0 \leq x \leq e$ et $2e \leq x \leq 3e$.

L'argon occupe la zone $e \leq x \leq 2e$.

Q5. Proposer, en régime stationnaire, un schéma électrique équivalent qui décrit les transferts thermiques associés à cette fenêtre. Préciser les expressions littérales des résistances thermiques qui interviennent en fonction des données de l'énoncé. Vous ferez apparaître sur votre schéma les différentes températures T_{ext} , T_{int} , $T_{S,ext}$ et $T_{S,int}$.

Q6. On repère les différentes interfaces par leurs abscisses x . L'interface air extérieur-verre se situe en $x = 0$. On suppose $T_{ext} < T_{int}$. Précisez sans justification parmi les profils de température proposés sur la figure I-3 celui qui correspond à cette fenêtre.

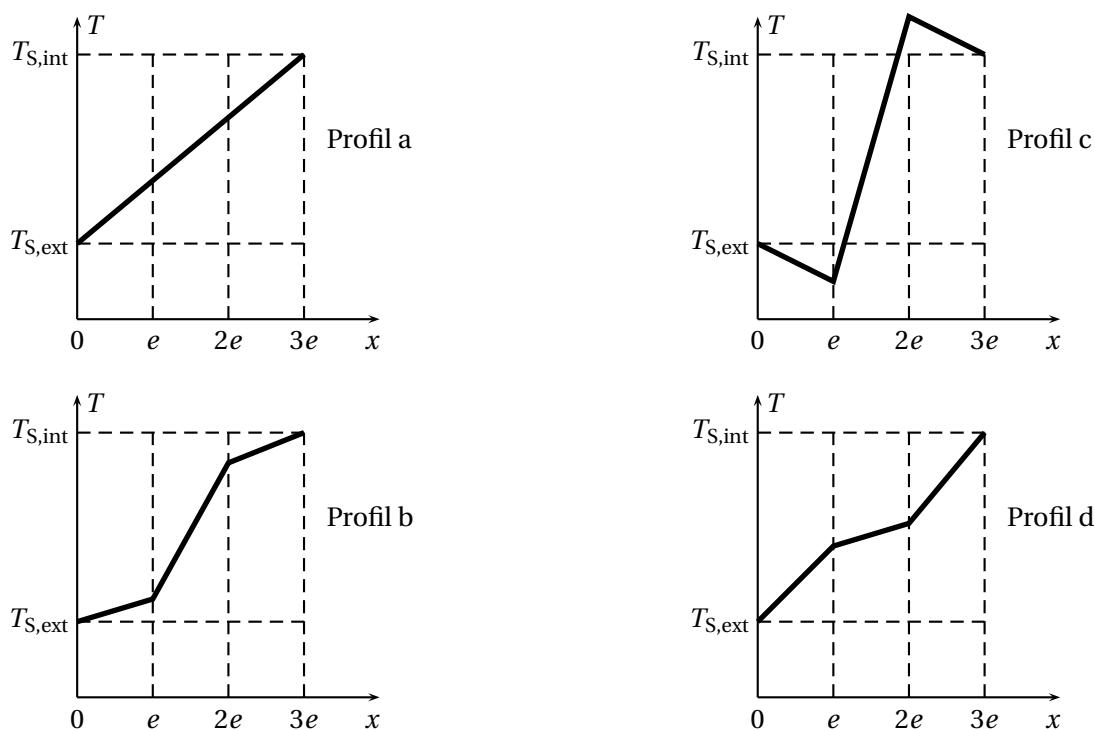


FIGURE I-3 – Profils de température

3 — Étude d'une pièce d'habitation

On considère dans cette sous-partie une pièce d'habitation de température supposée uniforme. L'étude de la pièce est limitée à un mur comportant une fenêtre et à un plafond de surface $S_p = 10 \text{ m}^2$. Ils sont tous les trois en contact

avec le milieu extérieur de température constante $T_{\text{ext}} = 274 \text{ K}$.

Les pertes thermiques par le sol et les cloisons intérieures sont négligées. On note R_1 la résistance thermique de la pièce, c'est-à-dire de l'ensemble {mur, fenêtre, plafond}. R_1 tient compte de la totalité des phénomènes convectifs et diffusifs.

On chauffe la pièce, initialement à la température T_{ext} , avec un radiateur de puissance $P = 500 \text{ W}$. La température finale atteinte se stabilise à $T_{\text{fin}} = 294 \text{ K}$.

Q7. Donner la valeur numérique de R_1 , résistance thermique de la pièce d'habitation.

Q8. On note $T(t)$ la température de la pièce supposée uniforme à un instant t , et C la capacité thermique de la pièce. Cette capacité englobe celle du mobilier, celle de l'air contenu dans la pièce et celle des portions de murs intérieurs, aussi appelés doublages, qui se situent avant l'isolant.

Établir dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires l'équation différentielle vérifiée par la température $T(t)$. En déduire l'expression de la température $T(t)$ en fonction de T_{ext} , T_{fin} , R_1 et C .

Q9. Le plafond a une épaisseur $e_p = 5 \text{ cm}$ et une conductivité thermique $\lambda_p = 0,1 \text{ SI}$. Donner la valeur numérique de la résistance thermique du plafond notée R_{pl} .

Exprimer littéralement la résistance thermique de l'ensemble mur-fenêtre, notée R_{mf} , en fonction de R_1 et de R_{pl} .

Donner la valeur numérique de R_{mf} . Les déperditions thermiques sont-elles plus importantes par le plafond ou par l'ensemble mur-fenêtre?

Q10. On ajoute alors au plafond une couche d'isolant thermique d'épaisseur e_{isol} et de conductivité thermique λ_{isol} .

Exprimer littéralement la nouvelle résistance thermique de l'ensemble plafond-isolant, notée R'_{pl} , en fonction de R_{pl} , λ_{isol} , e_{isol} et S_p .

Soit R_2 la nouvelle résistance thermique totale de la pièce. On admettra que $R_2 = 0,12 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$.

D'après ce modèle, par quel coefficient a-t-on divisé les pertes d'énergie thermique de la pièce en ajoutant cette couche d'isolant au plafond?

Partie II – Isolation thermique d'un toit (banque PT 2025)

Dans le cadre de la transition énergétique et écologique, l'État a fait de la rénovation énergétique des logements une priorité. Les propriétaires sont ainsi accompagnés, au moyen de subventions, à entreprendre des projets de rénovation énergétique dans leur logement : isolation thermique (toit, murs, combles...), installation d'une chaudière plus performante, de fenêtres à double vitrage, de panneaux solaires... Autant de solutions permettant de réduire les factures d'électricité, en particulier pour les logements les plus énergivores souvent qualifiés de « pâsoires thermiques ».

Parmi les différentes fuites thermiques d'un logement, les déperditions à travers le toit représentent généralement une part importante. Beaucoup de maisons modernes présentent une architecture à toit plat, comme le montre la figure II-1. On s'intéresse à l'isolation thermique du toit.

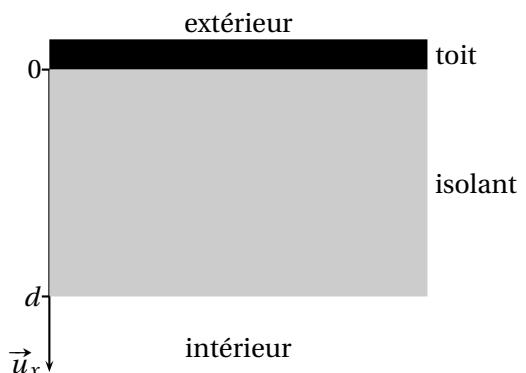


FIGURE II-1 – À gauche : maison à toit plat. À droite : schéma de principe, notations utilisées

On considère un toit horizontal plat isolé par une couche isolante plane S , d'épaisseur d , de conductivité thermique λ , de masse volumique ρ et de capacité thermique massique c . Le plan d'équation $x = 0$ correspond à l'interface toit/isolant; le plan d'équation $x = d$ correspond au plafond (voir figure II-1).

La conduction thermique est supposée unidimensionnelle : le vecteur densité de courant thermique au sein de la couche isolante est de la forme $\vec{j} = j(x, t) \vec{u}_x$, \vec{u}_x étant le vecteur unitaire orienté selon la verticale descendante, de l'extérieur vers l'intérieur de la maison, et le champ de température est de la forme $T(x, t)$.

Q1. Rappeler la loi de Fourier exprimant le vecteur densité de courant thermique \vec{j} en fonction de la température T . Justifier la présence du signe « - » apparaissant dans cette loi.

Q2. Donner, dans le cas unidimensionnel étudié, l'équation de la diffusion thermique (ou équation de la chaleur) liant les dérivées spatiales et temporelle de la température $T(x, t)$.

Q3. On se place en régime stationnaire. Définir la résistance thermique R_{th} de la couche isolante, puis rappeler son expression littérale en fonction de S, d et λ .

Pour estimer quelques ordres de grandeur, on considère un toit plat de surface $S = 100 \text{ m}^2$. Sans isolation, sa résistance thermique vaut $R_{\text{th,toit}} = 1,0 \times 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$.

Q4. Exprimer littéralement la résistance thermique d'isolant permettant de diviser les pertes thermiques à travers le toit par 10.

Q5. En déduire l'épaisseur d'isolant d correspondante. Faire l'application numérique pour la laine de verre puis pour l'ouate de cellulose (épaisseurs respectivement notées d_ℓ et d_o).

Le résistance thermique n'est pas le seul critère à prendre en compte au moment de choisir son isolation thermique. On étudie le comportement thermique de la couche isolante en été. La toiture est exposée de telle sorte que l'évolution journalière de température imposée à la surface de l'isolant en $x = 0$ suit la loi

$$T(x = 0, t) = T_0 + T_1 \cos(\omega t).$$

On considère une température maximale de 37°C et une température minimale de 13°C .

Q6. Calculer les valeurs de T_0 et T_1 en $^\circ\text{C}$, et de ω en $\text{rad} \cdot \text{h}^{-1}$.

On cherche la solution de l'équation obtenue à la question **Q2**. Pour ce faire, on travaille dans l'espace des complexes en posant

$$\underline{T}(x, t) = T_0 + \underline{f}(x) e^{i\omega t} \quad \text{avec} \quad i^2 = -1.$$

Ainsi, $T(x, t)$ correspond à la partie réelle de $\underline{T}(x, t)$.

Q7. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par la fonction $\underline{f}(x)$.

Les solutions de cette équation différentielle s'écrivent sous la forme

$$\underline{f}(x) = \underline{A} e^{(1+i)x/\delta} + \underline{B} e^{-(1+i)x/\delta}$$

où \underline{A} et \underline{B} désignent des constantes complexes, et δ une constante réelle.

Q8. Déterminer l'expression de δ en fonction de λ, ρ, c et de ω , puis préciser sa dimension.

On souhaite conserver dans l'expression de $\underline{T}(x, t)$ l'onde thermique se propageant dans le sens des x croissants.

Q9. Établir l'expression de la solution réelle $T(x, t)$. Montrer ensuite que

$$T(x = d, t) = T_0 + T_1 e^{-d/\delta} \cos[\omega(t - \tau)]$$

et expliciter le « déphasage thermique » τ en fonction de d, λ, ρ, c et ω .

Les applications numériques (non demandées) donnent, pour les deux configurations étudiées à la question **Q5** (une épaisseur d_ℓ de laine de verre, une épaisseur d_o d'ouate de cellulose), les valeurs respectives suivantes : $\tau_\ell = 5,3 \text{ h}$ et $\tau_o = 11 \text{ h}$.

La fraîcheur nocturne permet généralement un rafraîchissement naturel des habitations. De ce fait, pour un meilleur confort, on a intérêt à choisir le déphasage thermique τ de sorte qu'il y ait un transfert thermique maximal pendant la période nocturne; on admet que cette condition revient à avoir des températures $T(x = 0, t)$ et $T(x = d, t)$ en opposition de phase.

Q10. Calculer le déphasage thermique offrant le meilleur confort thermique. En déduire laquelle des deux configurations précédentes est finalement la plus confortable d'un point de vue thermique.

Données

Caractéristiques de deux isolants thermiques :

| | $\lambda (\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$ | $\rho (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$ | $c (\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1})$ |
|--------------------|--|--|---|
| laine de verre | 0,032 | 20 | 1030 |
| ouate de cellulose | 0,040 | 35 | 2000 |

Partie III — Décantation dans le traitement des eaux (CCINP PSI 2022)

La clarification par décantation est une des étapes réalisées dans le traitement des eaux des stations d'épuration. Elle consiste à éliminer les particules polluantes en suspension dans l'eau polluée. L'eau polluée, c'est-à-dire chargée en particules non désirées, circule en continu dans le bassin de décantation (figure III-1), à faible vitesse horizontale \vec{u} . Les particules ont le temps de se déposer au fond du bassin et l'eau de sortie est ainsi clarifiée.

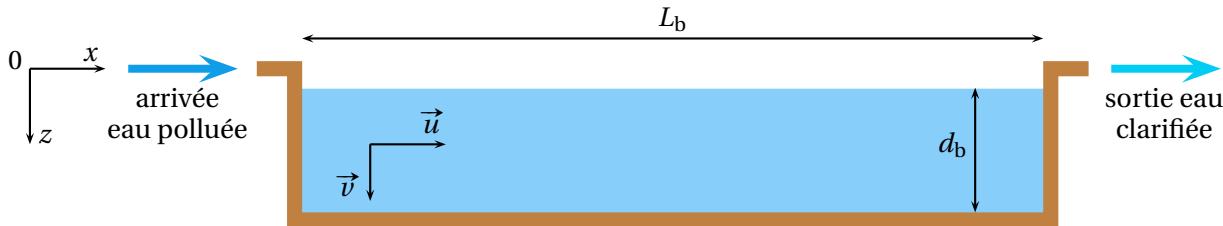


FIGURE III-1 – Bassin de décantation

Le bassin de décantation est de longueur L_b et de profondeur d_b , sa largeur est indifférente. On note respectivement η et ρ_e la viscosité dynamique et la masse volumique de l'eau polluée; η et ρ_e sont supposées constantes. On définit le repère $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ lié au bassin. L'axe Oz est vertical descendant. Le niveau d'entrée de l'eau dans le bassin correspond à la cote $z = 0$.

On suppose que les particules polluantes sont sphériques, de rayon r , et qu'elles sont soumises à la force de frottement fluide $\vec{F} = -6\pi\eta r \vec{v}$, où \vec{v} est la vitesse des particules.

On note ρ_0 la masse volumique des particules polluantes, supposée constante. On a $\rho_0 > \rho_e$.

Rappel : un corps plongé dans un fluide subit des forces de pression dont la résultante est donnée par la *poussée d'Archimède*, dirigée de bas en haut, opposée au poids du fluide de remplacement¹.

On considère que l'eau arrive en amont du bassin avec une densité en particules polluantes notée N_0 .

1 Décantation statique

Dans un premier temps, l'eau ne circule pas horizontalement ($\vec{u} = \vec{0}$) et les particules polluantes qu'elle contient chutent verticalement.

Compte tenu des phénomènes de transport des particules polluantes dans le bassin, la densité en particules polluantes n'est pas uniforme sur la hauteur du bassin : elle dépend de la profondeur z . Dans le bassin, on note $n(z)$ la densité en particules polluantes à l'altitude z et n_0 la valeur associée à l'altitude $z = 0$, soit $n_0 = n(z = 0)$.

Q1. À partir de l'équation différentielle du mouvement, issue de la seconde loi de Newton, établir, en fonction de ρ_0 , ρ_e , r , η et de l'accélération g de la pesanteur, la vitesse limite $\vec{v}_\ell = v_\ell \vec{e}_z$ atteinte par ces particules. Quel est le signe de v_ℓ ? Exprimer en fonction de ρ_0 , r et de η le temps temps caractéristique τ_c d'établissement de cette vitesse limite.

On supposera par la suite que la constante de temps τ_c est très faible devant le temps de sédimentation (*i.e.* le temps de chute dans le bassin) de sorte que le mouvement des particules est considéré comme uniforme à la vitesse \vec{v}_ℓ .

Q2. Cette chute des particules est à l'origine d'un courant convectif vertical des particules. On note $\vec{j} = j(z) \vec{e}_z$ le vecteur densité de courant de particules associé. Préciser l'unité de $j(z)$, puis exprimer le vecteur \vec{j} en fonction de $n(z)$ et de \vec{v}_ℓ .

En plus du courant précédent, on observe l'existence d'un second courant qui résulte d'un phénomène de diffusion. On note D le coefficient de diffusivité des particules dans l'eau et $\vec{j}_D = j_D(z) \vec{e}_z$ le vecteur densité de courant de particules associé à ce second courant.

Q3. Rappeler la loi de Fick et préciser les unités des grandeurs qui interviennent. Justifier qualitativement l'existence de ce courant de diffusion. Préciser s'il est ascendant ou descendant.

Q4. En régime permanent, ces deux courants se compensent. En déduire, en fonction de n_0 , D et v_ℓ , l'expression de la densité de particules $n(z)$. Représenter graphiquement $n(z)$ en fonction de z .

1. Fluide qui occuperait le même volume que le corps immergé.

Q5. Par conservation du nombre de particules sur une tranche verticale du bassin, exprimer n_0 en fonction de N_0 , D , d_b et v_ℓ .

Q6. Définir, en fonction de d_b , D et v_ℓ , un temps caractéristique τ_s de sédimentation, ainsi qu'un temps caractéristique τ_D de diffusion des particules sur la hauteur du bassin.

Q7. Exprimer n_0 en fonction de N_0 , τ_s et τ_D . À quelle condition portant sur τ_s et τ_D la décantation statique permet-elle une clarification de l'eau ?

2 Clarification dynamique de l'eau polluée

Dans un second temps, l'eau polluée est mise en mouvement et s'écoule avec une vitesse horizontale constante \vec{u} . Un aspirateur situé au fond du bassin aspire maintenant les particules polluantes.

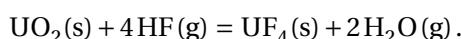
Un modèle simple considère que le mouvement des particules polluantes est la combinaison d'un mouvement horizontal de vitesse \vec{u} dû à l'entraînement de l'eau et d'un mouvement vertical de chute à la vitesse constante \vec{v}_ℓ déterminée précédemment dans l'étude de la décantation statique. L'eau sera clarifiée si les particules polluantes introduites à l'entrée du bassin ont le temps de tomber au fond avant que l'eau d'entraînement, injectée à l'entrée du bassin en $x = 0$, ne soit parvenue à l'autre extrémité de sortie du bassin, située en $x = L_b$.

Q8. Définir en fonction de L_b et u un temps de traversée τ_T du bassin.

À quelle condition, portant sur τ_T et τ_s , la clarification dynamique est-elle efficace ?

Partie IV — Étude thermodynamique de l'obtention de tétrafluorouranium (banque PT 2025)

Une des étapes de la transformation de l'uranium est l'obtention d'un composé fluoré à partir d'uranite. Cette réaction peut se traduire par le bilan suivant :



À l'état initial, on place dans le réacteur initialement vide à 500 °C HF(g) et UO₂(s) (celui-ci étant introduit en excès par rapport à HF(g)).

Q1. Calculer la valeur de l'enthalpie standard de réaction à 298 K.

Q2. Calculer et commenter le signe de l'entropie standard de la réaction à 298 K.

Q3. La constante d'équilibre vaut environ 5×10^2 à 500 °C. Expliciter la démarche réalisée pour obtenir ce résultat à partir des valeurs calculées lors des questions précédentes.

Q4. Discuter du choix de la température utilisée dans le processus industriel en considérant les aspects thermodynamique et cinétique de la réaction.

On appelle α le rapport entre la quantité de matière de HF qui a réagi et la quantité de matière initiale de HF, notée n_0 .

Q5. Écrire le tableau d'avancement associé à la réaction et exprimer α en fonction de l'avancement ξ .

Q6. Montrer la relation suivante entre la constante d'équilibre K° , la valeur de α à l'équilibre $\alpha_{\text{éq}}$ et la pression totale P_T dans l'enceinte :

$$K^\circ = \frac{(\alpha_{\text{éq}}(2 - \alpha_{\text{éq}}))^2}{16(1 - \alpha_{\text{éq}})^4} \left(\frac{P^\circ}{P_T} \right)^2.$$

Q7. Déterminer la pression totale P_T du réacteur pour que la valeur de $\alpha_{\text{éq}}$ soit égale à 0,9 lorsque l'équilibre est atteint à 500 °C.

Q8. Prévoir l'évolution de α lorsque la pression totale dans le réacteur est augmentée, la température restant constante.

Données

Les gaz sont assimilés à des gaz parfaits (constante des gaz parfaits $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$).

1 bar = 10^5 Pa .

Grandeurs thermodynamiques considérées comme indépendantes de la température :

| | UO ₂ (s) | UF ₄ (s) | HF(g) | H ₂ O(g) |
|--|---------------------|---------------------|-------|---------------------|
| $\Delta_f H^\circ (\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1})$ | -1085 | -1921 | -273 | -242 |
| $S^\circ (\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1})$ | 77 | 152 | 174 | 189 |