

## DS n° 3

## Sujet type Centrale-Mines — solution

## Partie I — De la physique dans le tunnel du Fréjus (Mines-Ponts PC 2016)

## 1 — Évolutions saisonnières de la température dans le sol

**Q1.** La moyenne temporelle de la température extérieure est  $\langle T(z=0, t) \rangle = \theta_0$ .

Comme  $-1 \leq \cos(\omega t) \leq 1$ , on a

$$T_{\min} = \theta_0 - T_0 \quad \text{et} \quad T_{\max} = \theta_0 + T_0.$$

Ordre de grandeur réaliste pourrait être  $T_0 = 15^\circ\text{C}$ .

**Q2.** Par définition du vecteur densité de flux thermique

$$\delta Q = \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} dt,$$

où  $d\vec{S} = \vec{n} dS$ ,  $\vec{n}$  étant le vecteur unitaire normal à  $dS$ , dirigé dans le sens de l'orientation de la surface.

Dimensionnellement :

$$[j_Q] = \frac{\text{énergie}}{\text{surface} \times \text{temps}} = \frac{ML^2T^{-2}}{L^2T}$$

soit  $[j_Q] = MT^{-3}$ .

**Q3.** La loi de Fourier s'écrit  $\vec{j}_Q = -\kappa \text{grad} T$ .

Elle est valable dans un milieu isotrope, pour des variations de température ni trop faibles, si trop grandes, ni trop rapides.

Dimensionnellement, la loi de Fourier s'écrit

$$MT^{-3} = [\kappa] \Theta L^{-1}$$

d'où  $[\kappa] = MLT^{-3}\Theta^{-1}$ .

**Q4.** L'énergie thermique reçue entre  $t$  et  $t + dt$  par la tranche comprise entre  $z$  et  $z + dz$  s'écrit

$$\delta Q = j_Q(z, t) S dt - j_Q(z + dz, t) S dt,$$

soit

$$\delta Q = -\frac{\partial j_Q(z, t)}{\partial z} S dz dt.$$

**Q5.** Une tranche « mésoscopique » est :

- suffisamment grande pour comprendre un grand nombre d'atomes de façon à pouvoir définir la température ;
- suffisamment petite pour que l'on puisse considérer la température comme uniforme en son sein (hypothèse de l'équilibre thermodynamique local).

**Q6.** Le bilan d'énergie entre  $t$  et  $t + dt$  s'écrit en l'absence de source

$$dU = \delta Q,$$

soit compte tenu de l'expression de  $\delta Q$  établie précédemment

$$dU = -\frac{\partial j_Q}{\partial z} S dz dt. \quad (1)$$

La tranche, de volume  $d\tau = S dz$ , a une capacité thermique  $c_s \rho_s d\tau$ . Lorsque sa température varie de

$$dT = T(z, t + dt) - T(z, t) = \frac{\partial T}{\partial t} dt,$$

son énergie interne varie de

$$dU = c_s \rho_s d\tau dT$$

soit

$$dU = \rho_s c_s \frac{\partial T}{\partial t} S dz dt. \quad (2)$$

**Q7.** D'après les équations (1), (2) et la loi de Fourier, on a

$$\rho_s c_s \frac{\partial T}{\partial t} S dz dt = -\frac{dj_Q}{dz} S dz dt = \kappa \frac{d^2 T(z, t)}{dz^2} S dz dt$$

d'où

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} \quad \text{avec} \quad D = \frac{\kappa}{\rho_s c_s}.$$

Par analyse dimensionnelle de l'équation de la chaleur, on a  $[D] = L^2 T^{-1}$ .

**Q8.** La forme de la solution proposée est constitué d'un terme constante et d'une variation **harmonique**, à la pulsation forcée de la température à la surface du sol, et ondulatoire avec un terme **progressif**  $\omega t - \underline{k}z$ . Elle vérifie la condition limite imposée en  $z = 0$ .

Écrivons que  $\underline{T}(z, t)$  vérifie l'équation de la chaleur :

$$i\omega T_0 e^{i(\omega t - \underline{k}z)} = -\underline{k}^2 D e^{i(\omega t - \underline{k}z)},$$

d'où

$$\underline{k}^2 = -\frac{i\omega}{D}.$$

Comme  $-i = e^{-\pi/2}$ , on peut écrire

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega}{D} e^{-i\pi/2}$$

d'où

$$\underline{k} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{D}} e^{-i\pi/4}.$$

Comme  $e^{-i\pi/4} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ , on a

$$\underline{k} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{D}} \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

On cherche à écrire  $\underline{k} = k' + ik''$ , avec  $k' > 0$ ; il faut donc choisir le signe « + », et on peut écrire

$$\underline{k} = k' + ik'' \quad \text{avec} \quad k' = \sqrt{\frac{\omega}{2D}} \quad \text{et} \quad k'' = -\sqrt{\frac{\omega}{2D}}.$$

La solution s'écrit sous forme complexe

$$\begin{aligned} \underline{T}(z, t) &= \theta_0 + T_0 e^{i(\omega t - k'z - ik''z)} \\ &= \theta_0 + T_0 e^{i(\omega t - k'z)} e^{-i^2 k''z} = \theta_0 + T_0 e^{i(\omega t - k'z)} e^{k''z}. \end{aligned}$$

La solution réelle donnée par  $T(z, t) = \text{Re}[\underline{T}(z, t)]$  s'écrit

$$T(z, t) = \theta_0 + T_0 e^{k''z} \cos(\omega t - k'z),$$

soit en remplaçant  $k'$  et  $k''$  par leurs expressions,

$$T(z, t) = \theta_0 + T_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z} \cos\left(\omega t - z\sqrt{\frac{\omega}{2D}}\right).$$

Le terme  $k'' < 0$  traduit l'**amortissement** de l'onde de température : son amplitude diminue exponentiellement avec la profondeur  $z$ .

On peut écrire

$$e^{k''z} = e^{-\frac{z}{\delta}} \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}.$$

La longueur caractéristique de la diminution de l'amplitude de l'onde de température est  $\delta$ .

**Q9.** L'amplitude des variations de température à la profondeur  $z$  est  $T_0 e^{-z/\delta}$ . Si à  $z_e$  elle ne s'écarte pas de  $\theta_0$  de plus de 1 %, on a

$$T_0 e^{-z_e/\delta} = 0,01\theta_0$$

d'où

$$z_e = \delta \left( \frac{100T_0}{\theta_0} \right).$$

On calcule

$$\begin{aligned} z_e &= \ln\left(\frac{100 \times 15}{273}\right) \sqrt{\frac{2D}{\omega}} = \ln(100) \sqrt{\frac{2\kappa T}{\rho_s c_s 2\pi}} \\ &= \ln(100) \sqrt{\frac{\kappa T}{\rho_s c_s \pi}} \end{aligned}$$

avec  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 1 \text{ an}$ .

On calcule

$$z_e = \ln\left(\frac{100 \times 15}{273}\right) \sqrt{\frac{3,00 \times 365 \times 24 \times 3600}{2,65 \times 10^3 \times 8,500 \times 10^3 \times \pi}}$$

d'où  $z_e = 2,0 \text{ m}$ .

Le tunnel du Fréjus étant à une profondeur très supérieure à  $z_e$ , on peut en déduire que **la température reste constante tout au long de l'année dans le tunnel.**

**Q10. ►**

Pour  $T' = 24 \text{ h}$ , la nouvelle profondeur caractéristique est  $\delta' = \sqrt{\frac{\kappa T'}{\rho_s c_s \pi}}$ . On a donc

$$\begin{aligned} \frac{z_e}{\delta'} &= \ln\left(\frac{100 \times 15}{273}\right) \sqrt{\frac{\kappa T}{\rho_s c_s \pi}} \sqrt{\frac{\rho_s c_s \pi}{\kappa T'}} = \sqrt{\frac{T}{T'}} \ln\left(\frac{100 \times 15}{273}\right) \\ &= \sqrt{365} \ln\left(\frac{100 \times 15}{273}\right), \end{aligned}$$

d'où  $e^{-z_e/\delta'} = \exp\left(-\ln\left(\frac{100 \times 15}{273}\right) \sqrt{365}\right) \approx 7 \times 10^{-15} \ll 1$ .

Les variations quotidiennes de la température ne sont pas perceptibles à la profondeur  $z_e$  (à laquelle on ne perçoit que 1 % des variations annuelles). Le sol se comporte comme un **filtre passe-bas**.

## 2 — Température d'origine géophysique

**Q11.** En régime stationnaire, le bilan d'énergie pour la tranche de croûte terrestre de surface  $S$ , comprise entre  $z$  et  $z + dz$  s'écrit, entre  $t$  et  $t + dt$ ,

$$dU = 0 = \delta Q_{\text{reçu}} + \delta Q_{\text{créé}}.$$

On a d'une part comme précédemment

$$\begin{aligned} \delta Q_{\text{reçu}} &= j_Q(z, t) S dt - j_Q(z + dz, t) S dt \\ &= -\frac{dj_Q(z, t)}{dz} S dz dt. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\delta Q_{\text{créé}} = \mathcal{P}(z) S dz dt.$$

Le bilan d'énergie conduit donc à

$$\frac{dj_Q(z, t)}{dz} = \mathcal{P}(z).$$

**Q12.** L'équation précédente s'écrit

$$dj_Q = \mathcal{P}_0 e^{-z/H} dz.$$

La condition aux limites étant  $j_Q(L_c) = -j_m$ , on peut écrire

$$\int_{-j_m}^{j_Q(z)} dj_Q = \mathcal{P}_0 \int_{L_c}^z e^{-z'/H} dz'$$

soit

$$j_Q(z) + j_m = \mathcal{P}_0 \left[ -H e^{-z'/H} \right]_{L_c}^z = -\mathcal{P}_0 H \left[ e^{-z/H} - e^{-L_c/H} \right].$$

On en déduit

$$j_Q(z) = -j_m + \mathcal{P}_0 H e^{-L_c/H} - \mathcal{P}_0 H e^{-z/H}.$$

En utilisant la loi de Fourier  $j_Q = -\kappa \frac{dT}{dz}$ , on a

$$dT = \left( \frac{j_m}{\kappa} - \frac{\mathcal{P}_0 H}{\kappa} e^{-L_c/H} \right) dz + \frac{\mathcal{P}_0 H}{\kappa} e^{-z/H} dz.$$

Avec la condition aux limites  $T(z=0) = \theta_0$ , on peut écrire

$$\int_{\theta_0}^{T(z)} dT = \left( \frac{j_m}{\kappa} - \frac{\mathcal{P}_0 H}{\kappa} e^{-L_c/H} \right) \int_0^z dz' + \frac{\mathcal{P}_0 H}{\kappa} \int_0^z e^{-z'/H} dz',$$

soit

$$T(z) - \theta_0 = \left( \frac{j_m}{\kappa} - \frac{\mathcal{P}_0 H}{\kappa} e^{-L_c/H} \right) z + \frac{\mathcal{P}_0 H}{\kappa} \left[ e^{-z'/H} \right]_0^z.$$

La température s'écrit donc

$$T(z) = \theta_0 + \left( \frac{j_m}{\kappa} - \frac{\mathcal{P}_0 H}{\kappa} e^{-L_c/H} \right) z + \frac{\mathcal{P}_0 H^2}{\kappa} [1 - e^{-z/H}].$$

**Q13.** En utilisant l'expression de  $j_Q(z)$  obtenue précédemment, le flux  $j_S = j_Q(z=0)$  s'écrit

$$j_S = -j_m + \mathcal{P}_0 H [e^{-L_c/H} - 1].$$

**Q14.** Comparons  $j_m$  et  $\mathcal{P}_0 H e^{-L_c/H}$ .

On a

$$\mathcal{P}_0 H e^{-L_c/H} = 2,50 \times 10^{-6} \times 10,0 \times 10^3 \times e^{-\frac{45}{10}} = 2,78 \times 10^{-4} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Avec  $j_m = 35,0 \times 10^{-3} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ , on remarque que

$$\frac{\mathcal{P}_0 H e^{-L_c/H}}{j_m} \approx 8 \times 10^{-3} \ll 1.$$

On peut donc négliger  $\mathcal{P}_0 e^{-L_c/H}$  devant  $j_m$  et écrire la température sous la forme

$$T(z) = \theta_0 + \frac{j_m}{\kappa} z + \frac{\mathcal{P}_0 H^2}{\kappa} [1 - e^{-z/H}].$$

À la profondeur  $z = 1,70 \text{ km}$ , on calcule alors

$$T(z) = \frac{35,0 \times 10^{-3}}{3,00} \times 1,70 \times 10^3 + \frac{2,50 \times 10^{-6} \times (10,0 \times 10^3)^2}{3,00} \left[ 1 - e^{-\frac{1,70}{10,0}} \right]$$

soit  $T(z) = 32,9^\circ \text{C}$ .

Compte tenu de l'approximation effectuée, on peut écrire  $j_S = -j_m + \mathcal{P}_0 H e^{-L_c/H}$ . On calcule

$$j_S = -35,0 \times 10^{-3} - 2,50 \times 10^{-6} \times 10 \times 10^3$$

soit  $j_S = -6,00 \times 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ .

### 3 — Prise en compte du relief

**Q15.** En l'absence de sources internes, l'équation de la chaleur en régime stationnaire s'écrit  $\Delta T = 0$ , soit

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \quad (3)$$

En cherchant la solution sous la forme  $T(x, z) = f(x)g(z) + T_s$ , l'équation (3) s'écrit

$$f''(x)g(z) + f(x)g''(z) = 0$$

soit

$$\frac{g''(z)}{g(z)} = -\frac{f''(x)}{f(x)}.$$

Le premier terme étant indépendant de  $x$  et le second indépendant de  $z$ , ces deux termes sont égaux à une constante  $K$ . On obtient alors les deux équations différentielles

$$g''(z) - Kg(z) = 0 \quad \text{et} \quad f''(x) + Kf(x) = 0.$$

On veut que  $T(x, z=0)$  soit une fonction sinusoïdale de  $x$ ; la fonction sera sinusoïdale si  $K > 0$ . En notant  $K = k^2$ , on a

$$f''(x) + k^2 f(x) = 0$$

dont la solution générale est

$$f(x) = \alpha \cos(kx) + \beta \sin(kx).$$

L'équation

$$g''(z) - k^2 g(z) = 0$$

admet pour solution générale

$$g(z) = a e^{-kz} + b e^{kz}.$$

La température devant rester finie pour  $z \rightarrow +\infty$ , on doit avoir  $b = 0$ , d'où

$$T(x, z) = T_s + [\alpha \cos(kx) + \beta \sin(kx)] b e^{-kz}.$$

En identifiant en  $z = 0$  :

$$T_s + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = T_s + \alpha b \cos(kx) + \beta b \sin(kx).$$

On en déduit  $\beta = 0$ ,  $\alpha b = T_1$  et  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , d'où

$$T(x, z) = T_s + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{2\pi z}{\lambda}\right).$$

**Q16.** On a vu qu'en l'absence de sources thermiques, pour une surface plane  $z = 0$ , l'équation de la chaleur s'écrit

$$\Delta T = 0. \quad (4)$$

Cette équation homogène admet pour solution compatible avec les conditions aux limites

$$T_h(x, z) = T_s + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{2\pi z}{\lambda}\right).$$

En présence de sources thermiques dégageant une puissance volume  $\mathcal{P}(z)$ , le bilan d'énergie en régime stationnaire s'écrit

$$-\operatorname{div} \vec{j}_Q + \mathcal{P}(z) = 0$$

soit, comme  $\vec{j}_Q = -\kappa \overrightarrow{\operatorname{grad}} T$ ,

$$\kappa \Delta T + \mathcal{P}(z) = 0.$$

La température vérifie donc

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{\mathcal{P}_0}{\kappa} e^{-z/H}. \quad (5)$$

On a vu à la question 14, avec les approximations proposées, que la solution

$$T(x, z) = \theta_0 + \frac{j_m}{\kappa} z + \frac{\mathcal{P}_0 H^2}{\kappa} [1 - e^{-z/H}]$$

vérifie la condition  $T(x, 0) = \theta_0$ . On peut donc considérer la solution

$$T_p(x, z) = \frac{j_m}{\kappa} z + \frac{\mathcal{P}_0 H^2}{\kappa} [1 - e^{-z/H}],$$

solution de l'équation (5) et vérifiant la condition aux limites  $T_p(x, z) = 0$ .

Considérons maintenant la solution

$$T(x, z) = T_h(x, z) + T_p(x, z).$$

L'équation de la chaleur étant linéaire, on déduit des équations (4) et (5)

$$\Delta T = \Delta T_h + \Delta T_p = -\frac{\mathcal{P}_0}{\kappa} e^{-z/H}.$$

De plus cette solution vérifie la condition aux limites

$$\begin{aligned} T(x, 0) &= T_h(x, 0) + T_p(x, 0) \\ &= T_s + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{2\pi z}{\lambda}\right). \end{aligned}$$

La solution cherchée est donc de la forme

$$\begin{aligned} T(x, z) &= T_s + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{2\pi z}{\lambda}\right) + \frac{j_m}{\kappa} z \\ &\quad + \frac{\mathcal{P}_0 H^2}{\kappa} [1 - e^{-z/H}] \end{aligned}$$

## Partie II – Analyse de Fourier et diffusion thermique (Mines-Ponts PSI 2022)

**Q1.** Dimension de la constante  $D$  d'après l'équation de la diffusion :

$$[D] = L^2 T^{-1}$$

La loi de Fourier s'écrit ici

$$j_{th} = -\lambda \frac{dT}{dx}.$$

Comme  $j_{th}$  est une puissance surfacique, l'équation aux dimensions d'une puissance étant <sup>1</sup>

$$[\mathcal{P}] = ML^2 T^{-3},$$

on a

$$[j_{th}] = MT^{-3}.$$

d'où avec la loi de Fourier

$$[\lambda] = MLT^{-3} \Theta^{-1}.$$

De la relation  $dU = mc d$  on obtient

$$[c] = L^2 T^{-2} \Theta^{-1}.$$

On cherche la loi

$$D = \mu^\alpha \lambda^\beta c^\gamma.$$

1. Avec  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$  on obtient pour l'énergie  $[\mathcal{E}] = ML^2 T^{-2}$ .

Avec les expressions précédentes, on obtient

$$L^2 T^{-1} = M^\alpha L^{-3\alpha} M^\beta L^{\beta} T^{-3\beta} \Theta^{-\beta} L^{2\gamma} T^{-2\gamma} \Theta^{-\gamma}$$

Le terme en  $\Theta$  donne  $\beta + \gamma = 0$ .

Le terme en  $M$  donne  $\alpha + \beta = 0$ .

Le terme en  $L$  donne  $2 = -3\alpha + \beta + 2\gamma$ .

Le terme en  $T$  donne  $-1 = -3\beta - 2\gamma$ .

Avec la première relation, cette dernière s'écrit

$$-1 = -3\beta + 2\beta = -\beta.$$

On a donc

$$\beta = 1 \quad \text{et} \quad \gamma = -1,$$

puis  $\alpha = -1$ . On en déduit

$$D = \frac{\lambda}{\mu c}.$$

Le temps caractéristique de diffusion sur une longueur  $L$  dans du fer est

$$\tau = \frac{L^2}{D} = \frac{L^2 \mu c}{\lambda}.$$

On calcule

$$\tau = \frac{(5 \times 10^{-1})^2 \times 7,9 \times 10^3 \times 4 \times 10^2}{80}$$

soit

$$\tau \approx 1 \times 10^4 \text{ s}.$$

► La diffusion thermique est un phénomène lent quand la distance devient importante.

**Q2.** La loi de Fourier pour la diffusion thermique est

$$\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T.$$

Avec  $T(M, t) = T(\theta, t)$ , on obtient

$$\vec{j}_{\text{th}} = -\frac{\lambda}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \hat{e}_\theta.$$

Les lignes de champ de  $\vec{j}_{\text{th}}$  sont des **cercles concentriques, orientés selon  $-\hat{e}_\theta$** .

**Q3.** Le volume élémentaire en coordonnées cylindriques décrit par des variations  $dr$ ,  $d\theta$  et  $dz$  des variables  $r$ ,  $\theta$  et  $r$  est

$$dV = r^2 dr d\theta dz.$$

Comme  $a \ll R$ , on peut assimiler  $a$  à  $dr$  (radialement) et à  $dz$  (selon l'axe), d'où

$$dV = a^2 R d\theta.$$

Le volume  $dV$  a quatre faces en contact avec l'air :

- les deux faces supérieures et inférieures, chacune d'aire  $aR d\theta$ ;
- les faces internes et externes (entourant l'axe), chacune d'aire  $aR d\theta$ .

Finalement l'aire en contact avec l'air est

$$dS_{\text{lat}} = 4aR d\theta.$$

Effectuons un bilan d'énergie pour le volume considéré, entre  $t$  et  $t + dt$  :

$$dU = \delta Q_{\text{reçu}},$$

soit

$$\mu c dV [T(\theta, t + dt) - T(\theta, t)] = j_{\text{th}}(R, \theta, t) a^2 dt - j_{\text{th}}(R, \theta + d\theta, t) a^2 dt - h [T(\theta, t) - T_e] dS_{\text{lat}} dt,$$

d'où

$$\mu c dV \frac{\partial T}{\partial t} dt = -a^2 \frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial \theta} d\theta dt - h(T - T_e) dS_{\text{lat}} dt.$$

Dans l'anneau à  $r \approx R$ , on a

$$j_{\text{th}} = -\frac{\lambda}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta}.$$

En remplaçant  $dV$  et  $dS_{\text{lat}}$  par leurs expressions, on obtient

$$\mu c a^2 R d\theta \frac{\partial T}{\partial t} dt = \frac{\lambda a^2}{R} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} d\theta dt - 4ahR(T - T_e) d\theta dt$$

soit))

$$\mu c a^2 R \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda a^2}{R} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} - 4ahR(T - T_e).$$

On obtient bien l'équation

$$\frac{\lambda}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} - \frac{4h}{a}(T - T_e) = \mu c \frac{\partial T}{\partial t}.$$

**Q4.** En régime stationnaire, l'équation précédente devient

$$\frac{\lambda}{R^2} \frac{d^2 T}{d\theta^2} - \frac{4h}{a}(T - T_e) = 0$$

soit

$$\frac{d^2 T}{d\theta^2} - \frac{R^2}{\delta^2}(T - T_e) = 0 \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{a\lambda}{4h}}.$$

L'angle  $\theta$  étant sans dimension, on obtient  $[\delta] = [R] = L$  :

**la grandeur  $\delta$  a la dimension d'une longueur.**

La solution générale peut s'écrire sous la forme

$$T(\theta) = T_e + A \exp\left(-\frac{R\theta}{\delta}\right) + B \exp\left(\frac{R\theta}{\delta}\right),$$

où  $A$  et  $B$  sont deux constantes.

**Q5.** Le graphe de  $T(\theta)$  représente une décroissance de la température lorsqu'on s'éloigne du point de chauffage, selon une loi paire.

L'équation différentielle n'est pas valable en  $\theta = 0$ , point où l'on chauffe :  $T(\theta)$  n'est pas dérivable à l'origine.

Le graphe de  $j_{\text{th}}(\theta)$  indique bien un flux thermique dans le sens des températures décroissantes. La température est minimale à l'opposé du point de chauffage, le flux thermique  $y$  est nul.

On a d'une part d'après le graphe de  $T(\theta)$

$$T(0) = T_1 = T_e + A + B.$$

D'autre part, on a

$$j_{\text{th}}(\pi) = 0 = -\frac{\lambda}{R} \frac{dT}{d\theta}(\theta = \pi),$$

d'où

$$\frac{dT}{d\theta}(\pi) = 0.$$

Comme

$$\frac{dT}{d\theta} = -\frac{AR}{\delta} \exp\left(-\frac{R\theta}{\delta}\right) + \frac{BR}{\delta} \exp\left(\frac{R\theta}{\delta}\right)$$

la condition en  $\theta = \pi$  s'écrit

$$-A \exp\left(-\frac{R\pi}{\delta}\right) + B \exp\left(\frac{R\pi}{\delta}\right) = 0.$$

On a donc

$$A = B \exp\left(\frac{2R\pi}{\delta}\right)$$

d'où

$$B \left[ 1 + \exp\left(\frac{2R\pi}{\delta}\right) \right] = T_1 - T_e.$$

On a donc

$$B = \frac{T_1 - T_e}{1 + \exp\left(\frac{2R\pi}{\delta}\right)} \quad \text{et} \quad A = (T_1 - T_e) \frac{\exp\left(\frac{2R\pi}{\delta}\right)}{1 + \exp\left(\frac{2R\pi}{\delta}\right)}.$$

On a donc

$$T(\theta) = T_e + \frac{T_1 - T_e}{1 + \exp\left(\frac{2R\pi}{\delta}\right)} \left[ \exp\left(\frac{R(2\pi - \theta)}{\delta}\right) + \exp\left(\frac{R\theta}{\delta}\right) \right]$$

pour  $\theta \in [0, +\pi]$ . On obtient l'expression de  $T(\theta)$  pour  $\theta \in [-\pi, 0]$  (on demandée) en utilisant  $T(-\theta) = T(\theta)$ .

**Q6.** La durée d'établissement de la diffusion thermique sur une longueur  $L = \pi R$  (entre  $\theta = 0$  et le point opposé en  $\theta = \pi$ ) est

$$\tau \approx \frac{L^2}{D} = \frac{\pi^2 R^2 \mu c}{\lambda}$$

soit

$$\tau \approx \frac{10 \times (0,15)^2 \times 8 \times 10^3 \times 4 \times 10^2}{80} \approx 10^3 \times 4 \times 10^2 \times (1,5)^2$$

ce qui donne

$$\tau \approx 9 \times 10^3 \text{ s}.$$

On retrouve bien une durée de l'ordre de 2 heures.

**Q7.** En l'absence de convection (aucune fuite thermique par la surface latérale), la température vérifie l'équation

$$\frac{\lambda}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = \mu c \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (6)$$

Écrivons que  $T_n(\theta, t) = f_n(\theta)g_n(t)$  vérifie cette équation :

$$\frac{\lambda}{R^2} f_n''(\theta) g_n(t) = \mu c f_n(\theta) g_n'(t),$$

soit

$$\frac{g_n'(t)}{g_n(t)} = \frac{\lambda}{\mu c R^2} \frac{f_n''(\theta)}{f_n(\theta)}.$$

Le premier terme ne dépend pas de  $\theta$  et le second ne dépend pas de  $t$ ; ces deux termes sont donc égaux à une constante que l'on note  $\alpha_n$  :

$$\frac{g_n'(t)}{g_n(t)} = \alpha_n \quad \text{et} \quad \frac{\lambda}{\mu c R^2} \frac{f_n''(\theta)}{f_n(\theta)} = \alpha_n.$$

On a donc d'une part

$$g_n'(t) = \alpha_n g_n(t).$$

La solution est de la forme

$$g_n(t) = g_{n0} e^{\alpha_n t}.$$

La donc divergence de la température implique  $\alpha_n < 0$ ; on note

$$\alpha_n = -\frac{1}{\tau_n}$$

On a alors

$$f_n''(\theta) + \frac{\mu c R^2}{\lambda \tau_n} f_n(\theta) = 0.$$

La solution générale est de la forme

$$f_n(\theta) = F_n \cos\left(\sqrt{\frac{\mu c R^2}{\lambda \tau_n}} \theta\right) + G_n \sin\left(\sqrt{\frac{\mu c R^2}{\lambda \tau_n}} \theta\right).$$

La fonction devant être paire en  $\theta$ , on a  $G_n = 0$  et

$$f_n(\theta) = F_n \cos\left(\sqrt{\frac{\mu c R^2}{\lambda \tau_n}} \theta\right).$$

En notant  $B_n = g_{n0} F_n$ , on a

$$T_n(\theta, t) = B_n \cos\left(\sqrt{\frac{\mu c R^2}{\lambda \tau_n}} \theta\right) e^{-t/\tau_n},$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$T_n(\theta) = B_n \cos\left(\frac{R\theta}{d_n}\right) e^{-t/\tau_n} \quad \text{avec} \quad \tau_n = \frac{\mu c}{\lambda} d_n^2 = \frac{d_n^2}{D}.$$

La constante  $\tau_n$  est homogène à un temps :  $[\tau_n] = \text{T}$ .

La constante  $d_n$  est homogène à une longueur :

$$[d_n] = \text{L}.$$

**Q8.** On a

$$\langle T_0(\theta) \rangle = T_m.$$

**La constante  $T_m$  représente la moyenne spatiale de la température dans l'anneau.**

On remarque que  $T(\theta, t) = T_m$  est une solution de l'équation (6).

La solution doit avoir  $2\pi$  comme période angulaire et être paire en  $\theta$ . On a trouvé une famille de solutions  $T_n(\theta, t)$  admettant  $2\pi$  comme période angulaire, et fonction paire de  $\theta$ . L'équation différentielle étant linéaire, la solution peut s'écrire comme somme des solutions de cette famille, en prenant en compte la solution particulière constante, soit

$$T(\theta, t) = T_m + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\theta, t).$$

La condition initiale s'écrit alors en  $t = 0$ , en remplaçant les  $T_n(\theta, 0)$  par leur expression déterminée précédemment :

$$T(\theta, 0) = T_m + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{R\theta}{d_n}\right) = T_m + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n\theta).$$

Cette relation est vraie pour tout  $\theta$ . Les fonctions  $\cos(n\theta)$  étant indépendantes entre elles, on peut identifier terme à terme, d'où

$$B_n = b_n \quad \text{et} \quad d_n = \frac{n}{R}.$$

De

$$\tau_n = \frac{\mu c}{\lambda} d_n^2$$

on déduit

$$\tau_n = \frac{\mu c R^2}{\lambda n^2}.$$

**Q9.** On remarque que  $\tau_n \propto \frac{1}{n^2}$  : les harmoniques de rang  $n$  décroissent avec une constante de temps d'au-

tant plus petite que  $n$  est grand (de façon quadratique). Rapidement, les amplitudes des harmoniques de rang  $n > 1$  deviennent très faibles devant celle du fondamental, c'est-à-dire

$$e^{-t/\tau_n} \ll e^{-t/\tau_1} \quad \text{pour } n > 1.$$

On a alors

$$T(\theta, t) \approx T_m + B_1 \cos(\theta).$$

### Partie III — Étude d'un équilibre de sédimentation (Mines-Ponts MP 2021)

#### Étude d'un équilibre de sédimentation

**Q1.** Dans le référentiel terrestre galiléen, un grain de masse  $m_b = V_b \mu_b$  est soumis à :

— son **poids**  $\mu_b V_b \vec{g} = -\mu_b V_b g \hat{e}_z$  ;

— la **poussée d'Archimède**  $\vec{\Pi} = -\mu_e V_b \vec{g} = \mu_e V_b g \hat{e}_z$  ;

— le **frottement visqueux**  $\vec{f} = -\alpha \vec{v} = \alpha v \hat{e}_z$  .

**Q2.** Le principe fondamental de la dynamique appliqué à un grain s'écrit

$$\mu_b V_b \frac{d\vec{v}}{dt} = \mu_b V_b \vec{g} - \mu_e V_b \vec{g} - \alpha \vec{v}$$

soit en projection selon  $\hat{e}_z$

$$-\mu_b V_b \frac{dv(t)}{dt} = -\mu_b V_b g + \mu_e V_b g + \alpha v(t)$$

soit

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{\alpha}{\mu_b V_b} v(t) = \left(1 - \frac{\mu_e}{\mu_b}\right) g.$$

La solution générale de l'équation homogène est de la forme

$$v_h(t) = A \exp\left(-\frac{\alpha}{\mu_b V_b} t\right).$$

Une solution particulière est

$$v_p(t) = \frac{(\mu_b - \mu_e) V_b g}{\alpha}.$$

On a donc

$$v(t) = A \exp\left(-\frac{\alpha}{\mu_b V_b} t\right) + \frac{(\mu_b - \mu_e) V_b g}{\alpha}.$$

On détermine  $A$  avec la condition  $v(0) = 0$ , d'où

$$v(t) = \frac{(\mu_b - \mu_e) V_b g}{\alpha} (1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{\mu_b V_b}{\alpha}.$$

En régime permanent, la vitesse limite est

$$v_\ell = \frac{m^* g}{\alpha} \quad \text{avec} \quad m^* = (\mu_b - \mu_e) V_b.$$

C'est la vitesse qu'aurait un grain de masse  $m^*$  soumis à son seul poids et au frottement fluide. On peut décrire le mouvement d'un grain en incluant la poussée d'Archimède dans le poids (« poids apparent »), ce qui revient à associer une « masse apparente » au grain.

La durée caractéristique du régime transitoire est

$$\tau = \frac{m_b}{\alpha}.$$

La vitesse limite est de l'ordre de

$$v_\ell = \frac{200 \times 3,4 \times 10^{-20} \times 10}{4,5 \times 10^{-9}} = \frac{6,8}{4,5} 10^{2-20+1+9}$$

soit

$$v_\ell = 1,5 \times 10^{-8} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 15 \text{ nm} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Cette valeur est très faible !

La durée du transitoire vaut

$$\tau = \frac{4,1 \times 10^{-17}}{4,5 \times 10^{-9}}$$

soit  $\tau = 10^{-8} \text{ s} = 10 \text{ ns}$  .

Cette valeur est très faible ; on peut considérer que l'établissement du régime permanent est instantané.

**Q3.** Les flux des vecteurs  $\vec{j}_c$  et  $\vec{j}_n$  dont un nombre de particules par unité de temps ; ces vecteurs s'expriment donc en  $\text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$  . Leur dimension est  $\text{L}^{-2} \text{T}^{-1}$  .

Le coefficient de diffusion  $D$  s'exprime en  $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  .

À l'état d'équilibre macroscopique, le flux descendant sous l'effet de la gravitation compense le flux ascendant sous l'effet de la diffusion, soit

$$\vec{j}_c + \vec{j}_n = \vec{0}.$$

Avec les expressions données pour ces deux vecteurs, on a donc

$$-c(z) v_\ell \hat{e}_z - \frac{dc}{dz} D \hat{e}_z = \vec{0}$$

d'où

$$\frac{dc(z)}{dz} + \frac{v_\ell}{D} c(z) = 0.$$

La solution est

$$c(z) = c_0 A(z)$$

où

$$A(z) = e^{-z/H_b} \quad \text{avec} \quad H_b = \frac{D}{v_\ell}.$$

Avec  $v_\ell = m^* g f / \alpha$  et  $\alpha = 6\pi\eta R_b$ , on en déduit

$$H_b = \frac{6\pi\eta R_b D}{m^* g}.$$

**Q4.** La résultante des forces conservatives (poids et poussée d'Archimède) s'exerçant sur un grain s'écrit

$$\vec{F} = -m^* g \hat{e}_z = -\frac{dE_p^*}{dz} \hat{e}_z.$$

En prenant l'origine de l'énergie potentielle en  $z = 0$ , on en déduit

$$E_p^*(z) = m^* g z.$$

En écrivant

$$A(z) = \exp\left(-\frac{z}{H_b}\right) = \exp\left(-\frac{m^* g z}{k_B T}\right)$$

on identifie

$$H_b = \frac{k_B T}{m^* g} = \frac{6\pi\eta R_b D}{m^* g}$$

d'où l'expression du coefficient de diffusion

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\eta R_b}.$$

**Q5.** En approximant  $h_1 \rightarrow \infty$ , le nombre total de grains est

$$N = \int_0^\infty c(z) S dz = c_0 S \int_0^\infty e^{-z/H_b} dz = c_0 S H_b,$$

d'où

$$c_0 = \frac{N}{S H_b}.$$

**Q6.** Une tranche d'épaisseur  $e$  a un volume  $Se$ . En considérant  $c(z)$  comme uniforme sur la petite épaisseur  $e$ , le nombre de grains contenus dans la tranche est

$$n(z) = c(z) S e.$$

On a donc  $n(z) = S e c_0 e^{-z/H_b}$ , d'où

$$\ln[n(z)] = \ln(S e c_0) - \frac{z}{H_b}.$$

Cette relation est en accord avec le graphe affine propose, de pente  $-1/H_b$ .

On obtient  $H_b = \frac{1000}{24}$  soit  $H_b = 42 \mu\text{m}$ .

La hauteur  $h_1 = 100 \mu\text{m}$  ne peut pas être considérée comme infinie devant  $H_b = 42 \text{ m}$ ; on a d'ailleurs  $e^{-h_1/H_b} \approx 0,09$  qui n'est pas négligeable.

**Q7.** On a

$$k_B = \frac{m^* g H_b}{T} = \frac{200 \times 3,4 \times 10^{-20} \times 9,8 \times 42 \times 10^{-6}}{293}$$

soit  $k_{B,\text{exp}} = 9,6 \times 10^{-24} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ .

L'ordre de grandeur est correct, mais l'écart avec la valeur tabulée est de plus de 30 %.

Les causes d'erreurs expérimentales possibles peuvent être :

- la mesure de la position  $z$  de la tranche;
- le comptage des particules sur l'épaisseur  $e$  de la tranche. L'ordonnée à l'origine du graphe donne

$$\ln(S e c_0) = \ln\left(\frac{N e}{H_b}\right) \approx 4,7$$

d'où  $e = \frac{42 \times 10^{-6} \times e^{4,7}}{13000} = 0,36 \mu\text{m}$  : la mesure est délicate!

## Partie IV — Traitement de l'uranium (Mines-Ponts PSI 2024)

### Réduction du trioxyde d'uranium en dioxyde d'uranium

#### Réduction du trioxyde d'uranium par l'ammoniac

**Q1.** La loi de Hess s'écrit

$$\Delta_r H_1^\circ = 3\Delta_f H^\circ(\text{UO}_2) + \Delta_f H^\circ(\text{N}_2) + 3\Delta_f H^\circ(\text{H}_2\text{O}) - 3\Delta_f H^\circ(\text{UO}_3) - 2\Delta_f H^\circ(\text{NH}_3),$$

soit

$$\Delta_r H_1^\circ = -326 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

D'après la loi de van't Hoff, on a

$$\frac{d \ln K_1^\circ}{dT} = \frac{\Delta_r H_1^\circ}{RT^2} < 0.$$

La constante d'équilibre diminue donc quand la température augmente : **la formation de  $\text{UO}_2$  est favorisée à basse température.**

**Q2.** On calcule

$$\Delta_r S_1^\circ = 3S_m^\circ(\text{UO}_2) + 2S_m^\circ(\text{N}_2) + 3S_m^\circ(\text{H}_2\text{O}) - 3S_m^\circ(\text{UO}_3) - 2S_m^\circ(\text{NH}_3),$$

soit

$$\Delta_r S_1^\circ = 510 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

On a  $\Delta_r S^\circ > 0$ , ce qui est prévisible car la réaction s'accompagne d'une augmentation de la quantité totale de gaz.



Q3. On a

$$\Delta_r G_1^\circ = \Delta_r H_1^\circ - T \Delta_r S_1^\circ = -326 - 0,32 T .$$

en  $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

Q4. On calcule à  $T = 900 \text{ K}$

$$\Delta_r G_1^\circ = -326 - 900 \times 0,510 = -785 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} .$$

De la relation

$$\Delta_r G_1^\circ(T) + RT \ln K_1^\circ(T)$$

on déduit

$$K_1^\circ(T) = \exp\left(-\frac{\Delta_r G_1^\circ(T)}{RT}\right) .$$

On calcule

$$K_1^\circ(900 \text{ K}) = \exp\left(-\frac{-785 \times 10^3}{8,3 \times 900}\right)$$

soit  $K_1^\circ(900 \text{ K}) = 4,4 \times 10^{45}$ .

On a  $K_1^\circ(900 \text{ K}) \gg 1$  : la réaction est **quantitative** à cette température.

#### Réduction du trioxyde d'uranium par le carbone solide

Q5. Pour chaque réaction, la perte de masse de l'échantillon (solide) est due à la formation de  $\text{CO}_2(\text{g})$ .

Vers  $440^\circ\text{C}$ , on observe une première perte de masse rapide due à la réduction de  $\text{UO}_3$  en  $\text{U}_3\text{O}_8$ , bien plus importante pour le mélange broyé que pour le mélange non broyé.

Vers  $590^\circ\text{C}$ , on observe une seconde perte de masse rapide due à la réduction de  $\text{U}_3\text{O}_8$  en  $\text{ceUO}_2$ , bien plus

importante pour le mélange broyé que pour le mélange non broyé.

Avec le mélange broyé, on atteint une perte de masse totale  $\Delta m \approx 7\%$  stable dès  $700^\circ\text{C}$ , tandis qu'avec le mélange non broyé, la perte de masse totale n'est que de  $6\%$  à  $700^\circ\text{C}$ , et n'atteint  $7\%$  qu'à  $900^\circ\text{C}$ .

Le broyage du mélange solide favorise donc la formation du dioxyde d'uranium.

Broyer des solides augmente la surface de contact entre les réactifs et augmente la vitesse de la réaction.

#### Obtention du tétrafluorure d'uranium

Q6. La constante d'équilibre est donnée par

$$K_2^\circ = \frac{P_{\text{H}_2\text{O}^2}}{P_{\text{HF}^4}} (P^\circ)^2 .$$

On a

$$x = \frac{P_{\text{HF}}}{P_{\text{H}_2\text{O}}} = 10^{-2} \quad \text{et} \quad P = P_{\text{HF}} + P_{\text{H}_2\text{O}} = P^\circ ,$$

d'où

$$P_{\text{HF}} = \frac{P^\circ}{101} \approx 10^{-2} P^\circ$$

et

$$P_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{100}{101} P^\circ \approx P^\circ .$$

On en déduit

$$K_2^\circ \approx \frac{1}{(10^{-2})^4}$$

soit  $K_2^\circ = 10^8$ .