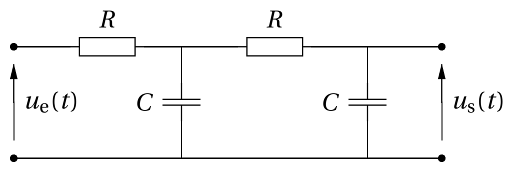
TP n° 10 Complément sur les cellules *RC*

1 — Double cellule *RC*

On considère deux cellules *RC* identiques en cascade :



1. Tracer expérimentalement le diagramme de Bode en gain, en le superposant au diagramme précédent.

2. Exprimer la fonction de transfert sous la forme canonique

$$\underline{H}_2(\mathrm{j}\omega) = \frac{H_0}{1 + \frac{\mathrm{j}}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \tag{1}$$

où l'on exprimera H_0, Q et ω_0 en fonction des caractéristiques du circuit.

3. Montrer qu'une fonction de transfert de la forme (1) peut se factoriser sous la forme

$$\underline{H}_2(\mathrm{j}\omega) = \frac{H_0}{\left(1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_2}\right)} \tag{2}$$

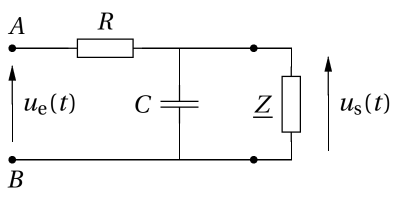
si $Q < 1/2$, et exprimer ω_1 et ω_2 en fonction de ω_0 et Q.

4. Montrer alors que le diagramme de Bode asymptotique peut se construire comme la somme de deux diagrammes asymptotiques.

Le construire et superposer les valeurs expérimentales.

2 — Impédance itérative

On considère une cellule *RC* branchée sur une impédance $\underline{Z}$:



On appelle impédance itérative $\underline{Z}_\mathrm{i}$ est la valeur de $\underline{Z}$ telle que $\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_\mathrm{i}$: l'impédance d'entrée du montage est égale à l'impédance itérative.

5. Montrer que $\underline{Z}_\mathrm{i}$ est donnée par une équation du second degré que l'on explicitera.

On posera pour la suite $\underline{z}_\mathrm{i} = \dfrac{\underline{Z}_\mathrm{i}}{R}$ et $X = RC\omega$ afin d'utiliser des grandeurs adimensionnées.

Écrire l'équation du seconde degré vérifiée par $\underline{z}_\mathrm{i}$.

6. Cette équation du second degré est à coefficient complexes ; en particulier son discriminant Δ est complexe. On cherche à déterminer

$$\sqrt{\Delta} = a + \mathrm{j}b\,.$$

Montrer que a et b vérifient le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} a^2 - b^2 & = & 1 \\ ab & = & -\dfrac{2}{X}\,. \end{array}\right.$$

En déduire l'équation vérifiée par a.
Montrer qu'elle se ramène à une équation du second degré en $A = a^2$.

7. Résoudre l'équation en A. On déterminera la racine à retenir sachant que $A > 0$.

8. En déduire

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{16}{X^2}}} \quad \text{et} \quad b = -\frac{2\sqrt{2}}{X\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{16}{X^2}}}}\,.$$

9. On a alors

$$\underline{z}_\mathrm{i} = \frac{1}{2} \pm \frac{a + \mathrm{j}b}{2}\,.$$

Lever l'indétermination sur le signe $\pm$ à partir d'un argument physique portant sur la partie réelle de $\underline{z}_\mathrm{i}$.
En déduire l'expression de l'impédance itérative

$$\underline{Z}_\mathrm{i} = \frac{R}{2}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{16}{(RC\omega)^2}}}\right] - \frac{\mathrm{j}}{C\omega}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{16}{(RC\omega)^2}}}}$$

10. Montrer que l'on peut réaliser expérimentalement $\underline{Z}_\mathrm{i}$ à l'aide d'une résistance R_c et d'un condensateur C_c dont on précisera les valeurs en fonction de R, C et ω. Faut-il les associer en série ou en parallèle ?

11. Définir avec python une procédure `Zi(R,C,f)` qui admet en argument les valeurs de R et C ainsi que la fréquence f, et qui retourne les valeurs de R_i et C_i.