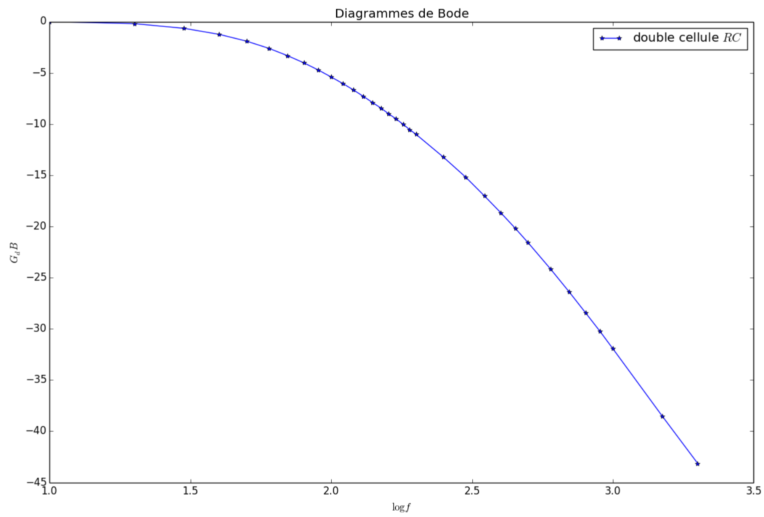
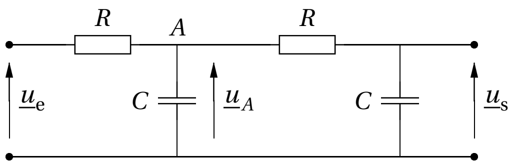
TP n° 10 — Complément sur les cellules *RC* — solution

1 — Double cellule *RC*

1. On trace le diagramme de Bode de la double cellule, sur le même diagramme.



2. Schéma :



Écrivons la loi des nœuds en terme de potentiels au point A :

$$\frac{\underline{u}_A - \underline{u}_\mathrm{e}}{R} + \frac{\underline{u}_A - \underline{u}_\mathrm{s}}{R} + \mathrm{j}C\omega\underline{u}_A = 0\,,$$

d'où

$$(2 + \mathrm{j}RC\omega)\underline{u}_A = \underline{u}_\mathrm{e} + \underline{u}_\mathrm{s}\,.$$

La tension $\underline{u}_\mathrm{s}$ s'exprime à l'aide de $\underline{u}_A$ par un pont diviseur de tension (le circuit est en sortie ouverte) :

$$\underline{u}_\mathrm{s} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}RC\omega}\underline{u}_A\,.$$

En éliminant $\underline{u}_A$, on obtient

$$\underline{u}_\mathrm{e} + \underline{u}_\mathrm{s} = 52 + \mathrm{j}RC\omega)(1 + \mathrm{j}RC\omega)\underline{u}_\mathrm{s} = [2 + 3\mathrm{j}RC\omega - (RC\omega)^2]\,\underline{u}_\mathrm{s}\,.$$

La fonction de transfert $\underline{H}_2(\mathrm{j}\omega) = \underline{u}_\mathrm{s}/\underline{u}_\mathrm{e}$ est donc donnée par

$$\boxed{\underline{H}_2(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{1 + 3\mathrm{j}RC\omega - (RC\omega)^2}}\,.$$

Elle est bien de la forme

$$\boxed{\underline{H}_2(\mathrm{j}\omega) = fracH_0 + \frac{\mathrm{j}}{Q}frac\omega\omega_0 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad \text{avec} \quad \boxed{H_0 = 1}\,; \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{RC}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{1}{3}}\,.$$

3. Identifions le dénominateur avec celui de la forme factorisée proposée :

$$1+\frac{j}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}=\left(1+j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1+j\frac{\omega}{\omega_2}\right)=1+j\frac{\omega_1+\omega_2}{\omega_1\omega_2}\omega-\frac{\omega^2}{\omega_1\omega_2}\,.$$

En identifiant les coefficients des termes en ω et en ω^2, on obtient

$$\omega_1\omega_2=\omega_0^2 \quad \text{et} \quad \omega_1+\omega_2=\frac{\omega_0}{Q}\,.$$

Connaissant leur somme et leur produit, on peut dire que ω_1 et ω_2 sont les racines de l'équation du second degré

$$x^2-\frac{\omega_0}{Q}x+\omega_0^2=0\,.$$

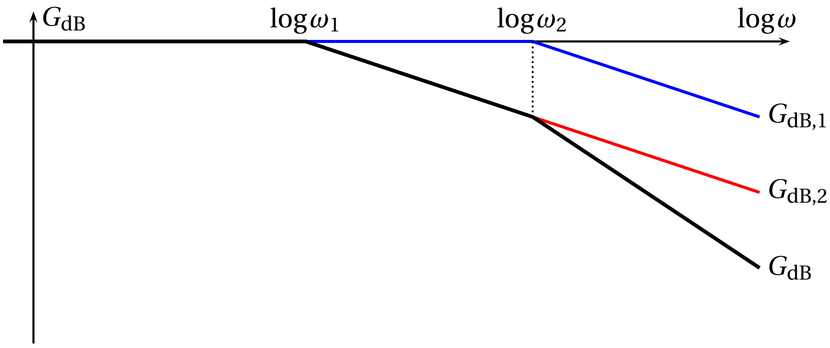
Le discriminant étant $\Delta=\frac{\omega_0^2}{Q^2}-4\omega_0^2=4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2}-1\right)$, l'équation admet deux racines réelles si $\Delta>0$, soit $Q<1/2$:

$$\boxed{\omega_1=\frac{\omega_0}{2Q}\left(1-\sqrt{1-4Q^2}\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega_2=\frac{\omega_0}{2Q}\left(1+\sqrt{1-4Q^2}\right)}\,.$$

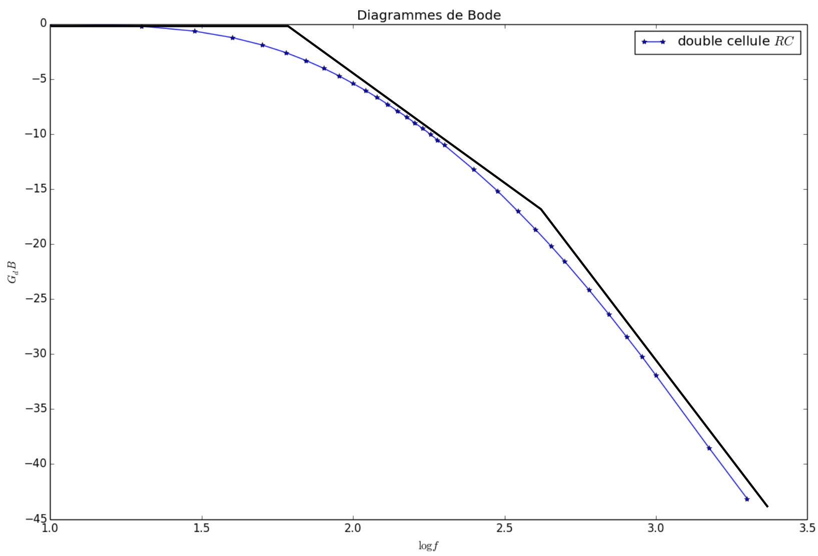
4. Pour tracer le diagramme asymptotique, on décompose la fonction de transfert sous la forme

$$\underline{H}(j\omega)=\underline{H}_1(j\omega)\underline{H}_2(j\omega) \quad \text{avec} \quad \underline{H}_1(j\omega)=\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_1}} \quad \text{et} \quad \underline{H}_2(j\omega)=\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_2}}\,.$$

On a donc $G_{dB}=G_{dB,1}+G_{dB,2}$. On en déduit le diagramme de Bode asymptotique à partir des diagrammes asymptotiques de $G_{dB,1}$ et $G_{dB,2}$.



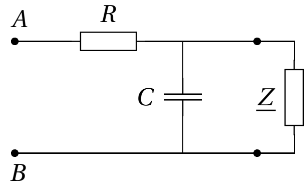
Avec $Q=1/3$, on obtient $f_1=0{,}382\,f_0=60{,}8$ Hz et $f_2=2{,}62\,f_0=417$ Hz, soit $\log f_1=1{,}78$ et $\log f_2=2{,}62$. Superposons le diagramme asymptotique théorique à la courbe expérimentale :



L'accord est correct.

2 — Impédance itérative

5. Considérons le montage suivant :



Son impédance d'entrée est

$$\underline{Z}_{AB} = R + \frac{\underline{Z}}{1 + \mathrm{j}\underline{Z}C\omega}.$$

Par définition, la valeur $\underline{Z}_\mathrm{i}$ est celle correspondant au cas où $\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_\mathrm{i}$, soit

$$\underline{Z}_\mathrm{i} = R + \frac{\underline{Z}_\mathrm{i}}{1 + \mathrm{j}\underline{Z}_\mathrm{i}C\omega}.$$

L'impédance itérative vérifie donc l'équation du second degré

$$\boxed{\underline{Z}_\mathrm{i}^2 - R\underline{Z}_\mathrm{i} + \frac{\mathrm{j}}{C\omega}R = 0}.$$

En posant $\underline{z}_\mathrm{i} = \dfrac{\underline{Z}_\mathrm{i}}{R}$ et $X = RC\omega$, cette équation devient

$$\boxed{\underline{z}_\mathrm{i}^2 - \underline{z}_\mathrm{i} + \frac{\mathrm{j}}{X} = 0}. \qquad (1)$$

6. Identifions le discriminant de l'équation (1) avec la forme proposée :

$$\Delta = 1 - \frac{4\mathrm{j}}{X} = (a + \mathrm{j}b)^2 = a^2 - b^2 + 2ab\mathrm{j}.$$

En identifiant les parties réelle et imaginaire, on obtient

$$\begin{cases} a^2 - b^2 &= 1 \\ ab &= -\dfrac{2}{X}. \end{cases}$$

On a donc $b = -\frac{2}{aX}$, d'où $a^2 - \frac{4}{a^2X^2} = 1$, et a vérifie l'équation

$$\boxed{a^4 - a^2 - \frac{4}{X^2} = 0}.$$

En posant $A = a^2$, on obtient l'équation du second degré

$$\boxed{A^2 - A - \frac{4}{X^2} = 0}. \qquad (2)$$

7. Le discriminant de l'équation(2) vaut $\Delta' = 1 + \dfrac{16}{X^2}$.

La racine positive (car $A = a^2 > 0$) de cette équation vaut donc $A = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{1 + \dfrac{16}{X^2}}$.

8. On a alors $a = \sqrt{A}$ et $b = -\frac{2}{X\sqrt{A}}$, soit

$$\boxed{a = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{16}{X^2}}}} \quad \text{et} \quad \boxed{b = -\frac{2\sqrt{2}}{X\sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{16}{X^2}}}}}.$$

9. La solution de l'équation (1) s'écrit $\underline{z}_\mathrm{i} = \dfrac{1 \pm \sqrt{\Delta'}}{2}$, soit $\underline{z}_\mathrm{i} = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{a + \mathrm{j}b}{2}$.
Vu des bornes A et B, le circuit est équivalent à une impédance $\underline{z}_\mathrm{i}$. La puissance moyenne reçue par ce circuit est donnée par $P_\mathrm{moi} = \mathrm{Re}(\underline{z}_\mathrm{i}) I_\mathrm{eff}^2$. Le circuit étant passif, il ne peut que dissiper de l'énergie, soit $P_\mathrm{moy} > 0$; on doit donc avoir $\boxed{\mathrm{Re}(\underline{z}_\mathrm{i}) > 0}$.

La partie réelle de $\underline{z}_\mathrm{i}$ est donnée par $\mathrm{Re}(\underline{z}_\mathrm{i}) = \dfrac{1 \pm a}{2}$. Comme $a > 1$, il faut retenir la solution $\boxed{\underline{z}_\mathrm{i} = \frac{1+a}{2} + \mathrm{j}\frac{b}{2}}$.
Comme $\underline{Z}_\mathrm{i} = R\underline{z}_\mathrm{i}$, on en déduit avec $X = C\omega$ l'expression

$$\boxed{\underline{Z}_\mathrm{i} = \frac{R}{2}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{16}{(RC\omega)^2}}}\right] - \frac{\mathrm{j}}{C\omega}\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{16}{(RC\omega)^2}}}}}\,.$$

10. L'impédance itérative est de la forme $\underline{Z}_\mathrm{i} = R_\mathrm{c} + \mathrm{j}X_\mathrm{c}$. L'admittance négative $X_\mathrm{c} < 0$ peut être modélisée par une capacité ; on peut donc écrire

$$\boxed{\underline{Z}_\mathrm{i} = R_\mathrm{c} - \frac{\mathrm{j}}{C_\mathrm{c}\omega}}\,.$$

On peut réaliser l'impédance itérative par une **association série** d'une résistance R_c et d'une capacité C_c données par

$$\boxed{R_\mathrm{c} = \frac{R}{2}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{16}{(RC\omega)^2}}}\right]} \quad \text{et} \quad \boxed{C_\mathrm{c} = \frac{C}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{16}{(RC\omega)^2}}}}\,.$$

11. Procédure python pour calculer R_c et C_c :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# R et C sont les valeurs en ohm et en farad des composants de la ligne.
# f est la fréquence du signal d'entrée
# la procédure retourne les valeurs de Ri (en kilo ohm)
# et Ci (en nano farad) avec 3 chiffres significatifs.

def Zi(R,C,f):
    omega=2*np.pi*f
    XX=(R*C*omega)**2
    A=np.sqrt(1+np.sqrt(1+16/XX))
    Ri=R/2*(1+1/np.sqrt(2)*A)
    Ci=C/np.sqrt(2)*A
    print("Ri = ",significatif(Ri/1000,3)," kOhm")
    print("Ci = ",significatif(Ci*1e9,3), "nF")
    return

def significatif(x,digit):
    if x == 0:
        return 0
    return round(x,digit-int(np.floor(np.log10(abs(x))))-1)
```

Par exemple, l'appel

```
Zi(10e3,100e-9,100)
```

retourne

```
Ri =  14.6  kOhm
Ci =  193.0 nF
```