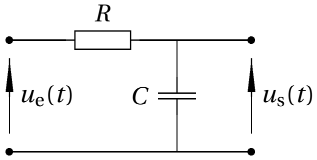
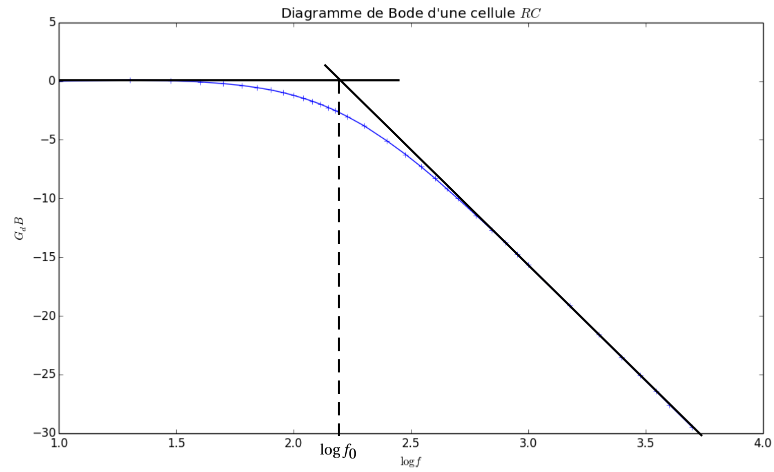
TP n° 11 Autour des cellules *RC* — solution

1 — Cellule *RC* unique

1. Diagramme de Bode en gain de la cellule



On mesure les amplitudes[1] U_s et U_e pour différentes valeurs de f, et on représente $G_{dB} = 20\log\frac{U_s}{U_e}$ en fonction de $\log f$.



2. La structure est en pont diviseur de tension :

$$\underline{H}_1(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + R} = \frac{1}{1 + R\underline{Y}_C}.$$

Avec $\underline{Y}_C = \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}$ on obtient $\boxed{\underline{H}_1(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{1+\mathrm{j}RC\omega}}$.

On a donc

$$\boxed{\underline{H}_1(\mathrm{j}\omega) = \frac{H_0}{1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}}} \quad \text{avec} \quad \boxed{H_0 = 1} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{RC}}.$$

3. Traçons les asymptotes sur le diagramme de Bode expérimental.
L'asymptote en basses fréquences vaut $G_{dB,0} = 20\log H_0 = 0$, d'où $\boxed{H_{0,exp} = 0}$, valeur conforme à la théorie.
L'intersection des asymptotes se fait pour $\log f_0 = 2{,}2$, d'où $\boxed{f_{0,exp} = 160\ \text{Hz}}$.
Avec $R = 10\ \text{k}\Omega$ et $C = 100\ \text{nF}$, on obtient $f_0 = 160\ \text{Hz}$; l'expérience est en accord avec les prévisions théoriques.

4. Avec $u_e(t) = U_e\cos(\omega t)$, on peut écrire $u_s = U_s\cos(\omega t - \varphi)$ où le *retard* de phase de $u_s(t)$ par rapport à $u_e(t)$ est donné par $\boxed{\tan\varphi = RC\omega}$.
Dans le cas où $RC\omega \ll 1$, la linéarisation de $\tan\varphi$ conduit à $\varphi = RC\omega = 2\pi RCf$, d'où

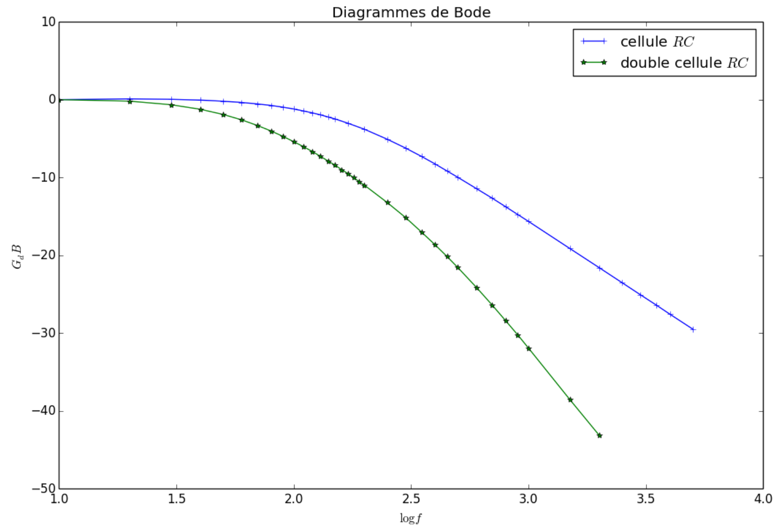
$$u_s(t) = U_s\cos(2\pi f t - 2\pi RCf) = U_s\cos[2\pi f(t-\tau)] \quad \text{avec} \quad \tau = RC.$$

Le retard de temporel τ est alors indépendant de la fréquence.

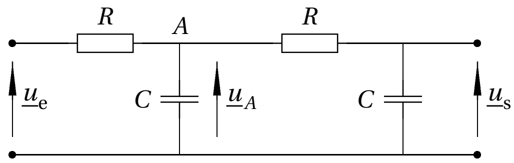
1. ou les valeurs efficaces $\frac{U}{\sqrt{2}}$ au multimètre

2 — Double cellule *RC*

5. On trace le diagramme de Bode de la double cellule, sur le même diagramme.



6.



Écrivons la loi des nœuds en terme de potentiels au point A :

$$\frac{\underline{u}_A - \underline{u}_e}{R} + \frac{\underline{u}_A - \underline{u}_s}{R} + jC\omega\underline{u}_A = 0,$$

d'où

$$(2 + jRC\omega)\underline{u}_A = \underline{u}_e + \underline{u}_s.$$

La tension $\underline{u}_s$ s'exprime à l'aide de $\underline{u}_A$ par un pont diviseur de tension (le circuit est en sortie ouverte) :

$$\underline{u}_s = \frac{1}{1 + jRC\omega}\underline{u}_A.$$

En éliminant $\underline{u}_A$, on obtient

$$\underline{u}_e + \underline{u}_s = 52 + jRC\omega)(1 + jRC\omega)\underline{u}_s = [2 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2]\underline{u}_s.$$

La fonction de transfert $\underline{H}_2(j\omega) = \underline{u}_s/\underline{u}_e$ est donc donnée par

$$\boxed{\underline{H}_2(j\omega) = \frac{1}{1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2}}.$$

Elle est bien de la forme

$$\boxed{\underline{H}_2(j\omega) = \frac{H_0}{1 + \frac{j}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \quad \text{avec} \quad \boxed{H_0 = 1}\,; \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{RC}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{1}{3}}.$$

7. Identifions le dénominateur avec celui de la forme factorisée proposée :

$$1 + \frac{j}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right) = 1 + j\frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1\omega_2}\omega - \frac{\omega^2}{\omega_1\omega_2}.$$

En identifiant les coefficients des termes en ω et en ω^2, on obtient

$$\omega_1\omega_2 = \omega_0^2 \quad \text{et} \quad \omega_1 + \omega_2 = \frac{\omega_0}{Q}.$$

Connaissant leur somme et leur produit, on peut dire que ω_1 et ω_2 sont les racines de l'équation du second degré

$$x^2 - \frac{\omega_0}{Q}x + \omega_0^2 = 0.$$

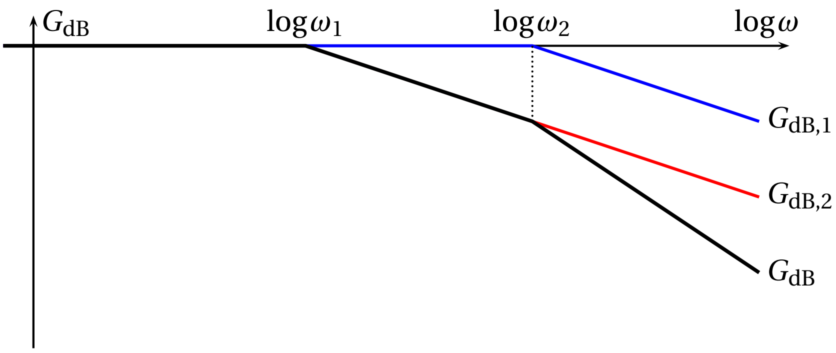
Le discriminant étant $\Delta = \dfrac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2\left(\dfrac{1}{4Q^2} - 1\right)$, l'équation admet deux racines réelles si $\Delta > 0$, soit $Q < 1/2$:

$$\boxed{\omega_1 = \frac{\omega_0}{2Q}\left(1 - \sqrt{1-4Q^2}\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega_2 = \frac{\omega_0}{2Q}\left(1 + \sqrt{1-4Q^2}\right)}.$$

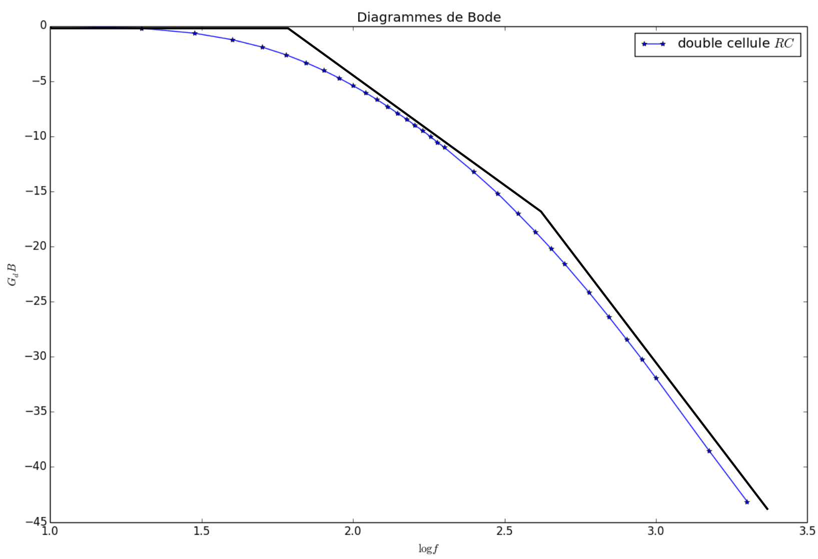
Pour tracer le diagramme asymptotique, on décompose la fonction de transfert sous la forme

$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \underline{H}_1(\mathrm{j}\omega)\underline{H}_2(\mathrm{j}\omega) \quad \text{avec} \quad \underline{H}_1(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_1}} \quad \text{et} \quad \underline{H}_2(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_2}}.$$

On a donc $G_{\mathrm{dB}} = G_{\mathrm{dB},1} + G_{\mathrm{dB},2}$. On en déduit le diagramme de Bode asymptotique à partir des diagrammes asymptotiques de $G_{\mathrm{dB},1}$ et $G_{\mathrm{dB},2}$.

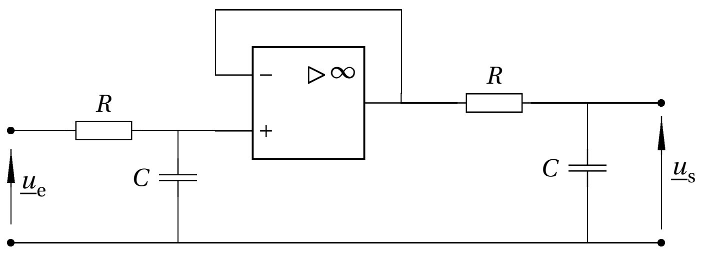


Avec $Q = 1/3$, on obtient $f_1 = 0{,}382 f_0 = 60{,}8$ Hz et $f_2 = 2{,}62 f_0 = 417$ Hz, soit $\log f_1 = 1{,}78$ et $\log f_2 = 2{,}62$. Superposons le diagramme asymptotique théorique à la courbe expérimentale :



L'accord est correct.

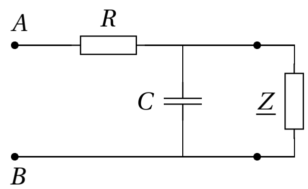
8. La fonction de transfert $\underline{H}_1(\mathrm{j}\omega)$ est celle d'une cellule RC à vide, c'est-à-dire ne débitant pas de courant. Dans le cas des deux cellules en cascade, la première n'est pas à vide : elle débite un courant qui entre dans la seconde cellule. Sa fonction de transfert n'est donc pas égale à $\underline{H}_1(\mathrm{j}\omega)$; on n'a donc pas $\underline{H}_2(\mathrm{j}\omega) = \underline{H}_1(\mathrm{j}\omega)\cdot\underline{H}_1(\mathrm{j}\omega)$, comme on a pu l'établir précédemment.
On aura $\underline{H}_2(\mathrm{j}\omega) = \underline{H}_1(\mathrm{j}\omega)\cdot\underline{H}_1(\mathrm{j}\omega)$ si la première cellule ne débite pas de courant : c'est le cas si on intervalle un montage suiveur entre les deux cellules (son impédance d'entrée est infinie) :



3 — Impédance itérative

3.1 Étude théorique

9. Considérons le montage suivant :



Son impédance d'entrée est

$$\underline{Z}_{AB} = R + \frac{\underline{Z}}{1+\mathrm{j}\underline{Z}C\omega}.$$

Par définition, la valeur $\underline{Z}_\mathrm{i}$ est celle correspondant au cas où $\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_\mathrm{i}$, soit

$$\underline{Z}_\mathrm{i} = R + \frac{\underline{Z}_\mathrm{i}}{1+\mathrm{j}\underline{Z}_\mathrm{i}C\omega}.$$

L'impédance itérative vérifie donc l'équation du second degré

$$\boxed{\underline{Z}_\mathrm{i}^2 - R\underline{Z}_\mathrm{i} + \frac{\mathrm{j}}{C\omega}R = 0}.$$

Enposant $\underline{z}_\mathrm{i} = \dfrac{\underline{Z}_\mathrm{i}}{R}$ et $X = RC\omega$, cette équation devient

$$\boxed{\underline{z}_\mathrm{i}^2 - \underline{z}_\mathrm{i} + \frac{\mathrm{j}}{X} = 0}. \tag{1}$$

10. Identifions le discriminant de l'équation (1) avec la forme proposée :

$$\Delta = 1 - \frac{4\mathrm{j}}{X} = (a+\mathrm{j}b)^2 = a^2 - b^2 + 2ab\mathrm{j}.$$

En identifiant les parties réelle et imaginaire, on obtient

$$\begin{cases} a^2 - b^2 & = & 1 \\ ab & = & -\dfrac{2}{X}. \end{cases}$$

On a donc $b = -\frac{2}{aX}$, d'où $a^2 - \frac{4}{a^2X^2} = 1$, et a vérifie l'équation

$$\boxed{a^4 - a^2 - \frac{4}{X^2} = 0}\,.$$

En posant $A = a^2$, on obtient l'équation du second degré

$$\boxed{A^2 - A - \frac{4}{X^2} = 0}\,. \tag{2}$$

11. Le discriminant de l'équation(2) vaut

$$\Delta' = 1 + \frac{16}{X^2}\,.$$

La racine positive (car $A = a^2 > 0$) de cette équation vaut donc

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{16}{X^2}}\,.$$

12. On a alors $a = \sqrt{A}$ et $b = -\frac{2}{X\sqrt{A}}$, soit

$$\boxed{a = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{16}{X^2}}}} \quad \text{et} \quad \boxed{b = -\frac{2\sqrt{2}}{X\sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{16}{X^2}}}}}\,.$$

13. La solution de l'équation (1) s'écrit

$$\underline{z}_\mathrm{i} = \frac{1 \pm \sqrt{\Delta'}}{2}$$

soit

$$\underline{z}_\mathrm{i} = \frac{1}{2} \pm \frac{a + \mathrm{j}b}{2}\,.$$

Vu des bornes A et B, le circuit est équivalent à une impédance $\underline{z}_\mathrm{i}$. La puissance moyenne reçue par ce circuit est donnée par $P_\mathrm{moi} = \mathrm{Re}(\underline{z}_\mathrm{i})I_\mathrm{eff}^2$. Le circuit étant passif, il ne peut que dissiper de l'énergie, soit $P_\mathrm{moy} > 0$; on doit donc avoir $\boxed{\mathrm{Re}(\underline{z}_\mathrm{i}) > 0}$.

La partie réelle de $\underline{z}_\mathrm{i}$ est donnée par $\mathrm{Re}\,\underline{z}_\mathrm{i} = \frac{1 \pm a}{2}$. Comme $a > 1$, il faut retenir la solution

$$\boxed{\underline{z}_\mathrm{i} = \frac{1 + a}{2} + \mathrm{j}\frac{b}{2}}\,.$$

Comme $\underline{Z}_\mathrm{i} = R\underline{z}_\mathrm{i}$, on en déduit avec $X = C\omega$ l'expression

$$\boxed{\underline{Z}_\mathrm{i} = \frac{R}{2}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{16}{(RC\omega)^2}}}\right] - \frac{\mathrm{j}}{C\omega}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{16}{(RC\omega)^2}}}}}\,.$$

14. L'impédance itérative est de la forme $\underline{Z}_\mathrm{i} = R_\mathrm{c} + \mathrm{j}X_\mathrm{c}$. L'admittance négative $X_\mathrm{c} < 0$ peut être modélisée par une capacité ; on peut donc écrire

$$\boxed{\underline{Z}_\mathrm{i} = R_\mathrm{c} - \frac{\mathrm{j}}{C_\mathrm{c}\omega}}\,.$$

On peut réaliser l'impédance itérative par une **association série** d'une résistance R_c et d'une capacité C_c données par

$$\boxed{R_c = \frac{R}{2}\left[1+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{16}{(RC\omega)^2}}}\right]} \quad \text{et} \quad \boxed{C_c = \frac{C}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{16}{(RC\omega)^2}}}}\,.$$

15. Procédure python pour calculer R_c et C_c :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# R et C sont les valeurs en ohm et en farad des composants de la ligne.
# f est la fréquence du signal d'entrée
# la procédure retourne les valeurs de Ri (en kilo ohm)
# et Ci (en nano farad) avec 3 chiffres significatifs.

def Zi(R,C,f):
    omega=2*np.pi*f
    XX=(R*C*omega)**2
    A=np.sqrt(1+np.sqrt(1+16/XX))
    Ri=R/2*(1+1/np.sqrt(2)*A)
    Ci=C/np.sqrt(2)*A
    print("Ri = ",significatif(Ri/1000,3)," kOhm")
    print("Ci = ",significatif(Ci*1e9,3), "nF")
    return

def significatif(x,digit):
    if x == 0:
        return 0
    return round(x,digit-int(np.floor(np.log10(abs(x))))-1)
```

Par exemple, l'appel

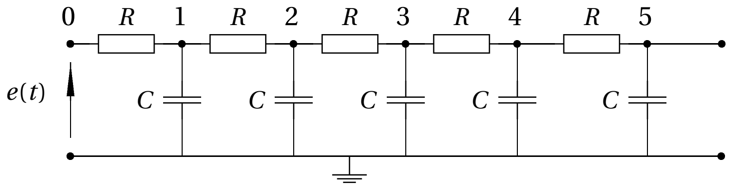
```
Zi(10e3,100e-9,100)
```

retourne

```
Ri =  14.6  kOhm
Ci =  193.0 nF
```

3.2 Étude expérimentale

On réalise le montage avec $R = 10\ \mathrm{k\Omega}$ et $C = 100\ \mathrm{nF}$.

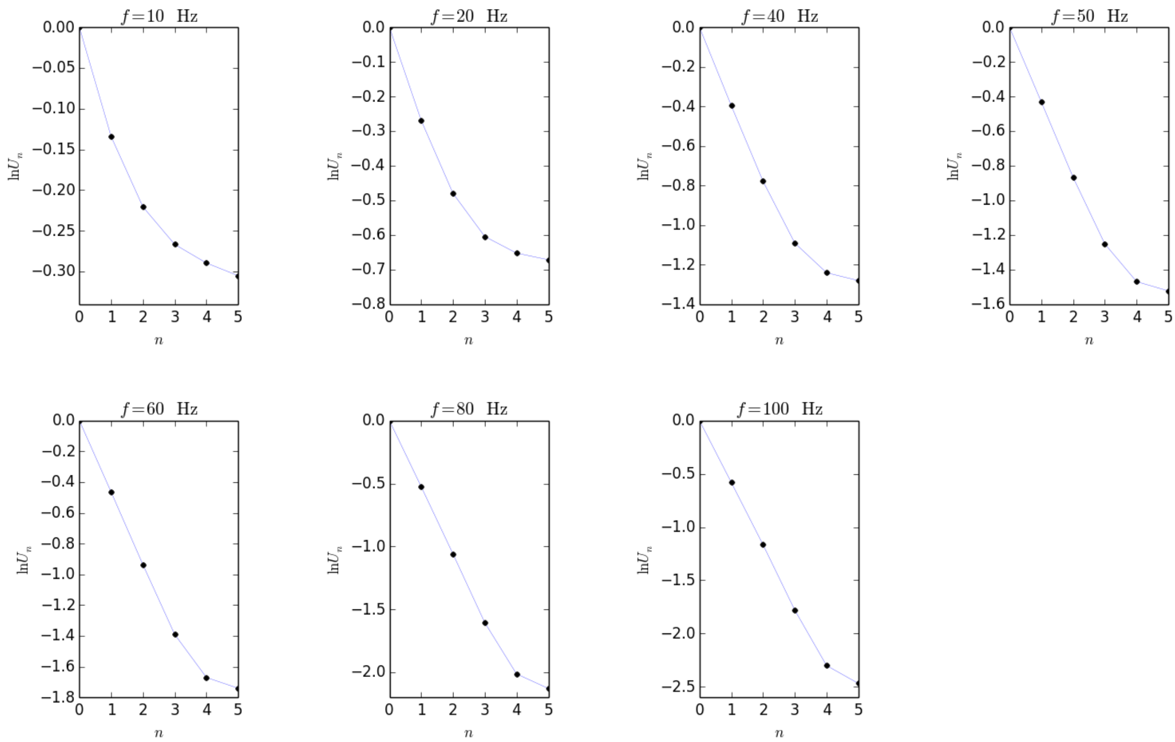


16. On relève les amplitudes (en fait les valeurs efficaces) U_i au multimètre pour $f = 10$ Hz, $f = 20$ Hz, $f = 40$ Hz, $f = 50$ Hz, $f = 60$ Hz, $f = 80$ Hz et $f = 100$ Hz.

17. La loi $U_n = U_0\,\mathrm{e}^{-n/n_0}$ peut s'écrire

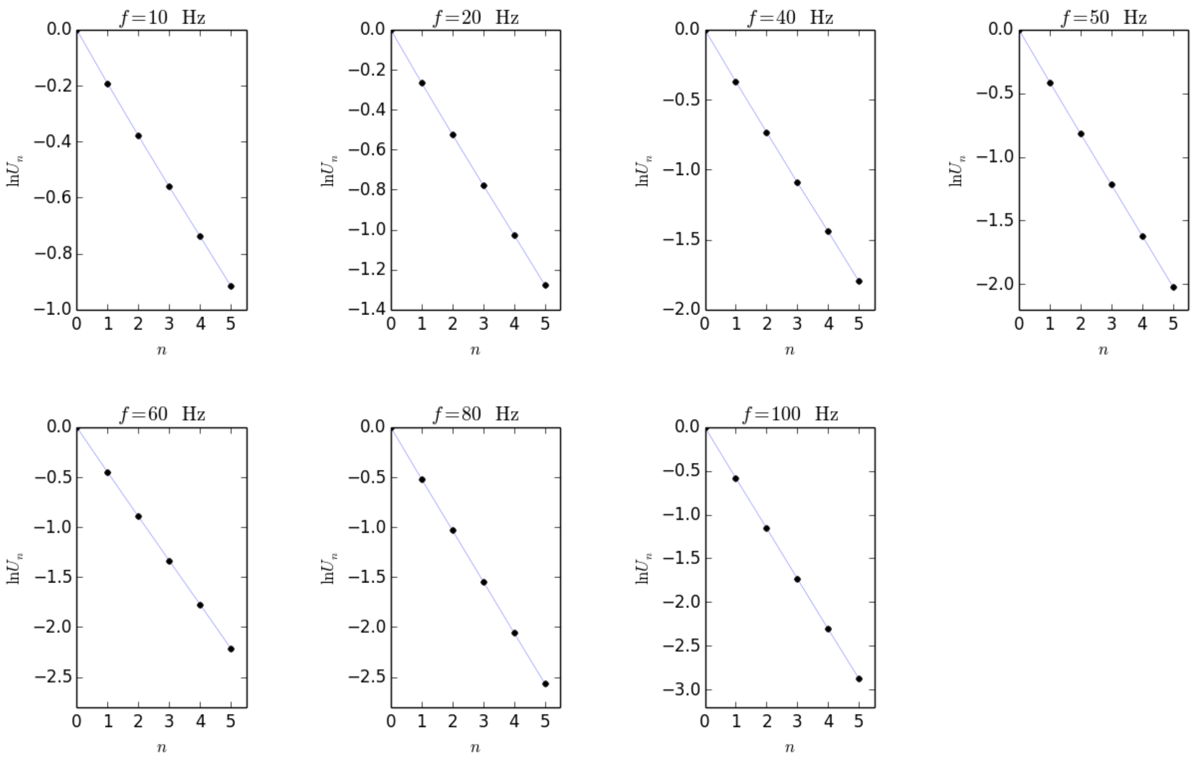
$$\ln U_n = -\frac{n}{n_0} + \ln U_0\,.$$

Si cette loi est vérifiée, la représentation de $\ln U_n$ en fonction de $\ln n$ doit conduire à une droite.
À partir des mesures, on obtient



La loi n'est pas affine, l'écart étant d'autant plus important que la fréquence est faible. On ne peut donc assimiler la suite des 5 cellules à une ligne infinie, comme on pouvait s'y attendre.

18. En branchant la ligne sur l'impédance itérative calculée pour chacune des fréquences utilisées, on représente $\ln U_n$ en fonction de $\ln n$.

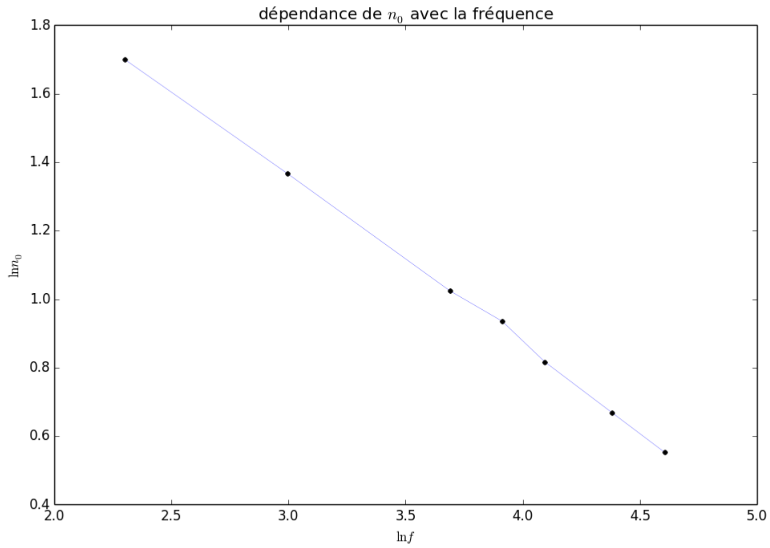


La loi $U_n = U_0\,\mathrm{e}^{-n/n_0}$ est bien vérifiée.

Une régression linéaire permet de calculer la pente $-\dfrac{1}{n_0}$ pour chaque fréquence, d'où $n_0(f)$.

f (Hz)	10	20	40	50	60	80	100
Pente	0,182 74	0,254 86	0,359 0	0,392 4	0,441 9	0,512 8	0,575 3
n_0	5,47	3,92	2,79	2,55	2,26	1,95	1,74

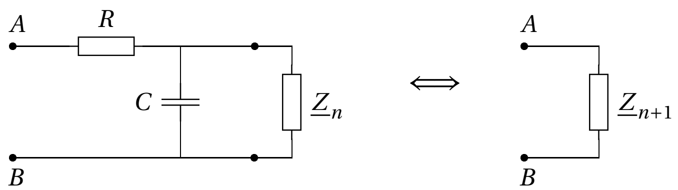
La loi $n_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\pi RCf}}$ conduit à $\ln n_0 = -\dfrac{1}{2}\ln f - \dfrac{1}{2}\ln(\pi RC)$. On représente donc $\ln n_0$ en fonction de $\ln f$:



Une régression linéaire conduite à une pente $\boxed{-0{,}50}$: c'est bien la valeur attendue !

19. Notons $\underline{Z}_n$ l'impédance d'entrée d'une série de n cellules branchée sur une impédance $\underline{Z}$ quelconque.

Si on ajoute une cellule supplémentaire en début de ligne, le montage est équivalent à



On a donc

$$\underline{Z}_{n+1} = R + \frac{\underline{Z}_n}{1 + \mathrm{j}\underline{Z}_n C\omega}.$$

Dans le cas de la limite de la ligne infinie, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{Z}_n = \lim\limits_{n\to\infty} \underline{Z}_{n+1} = \underline{Z}_\infty$, soit

$$\underline{Z}_\infty = R + \frac{\underline{Z}_\infty}{1 + \mathrm{j}\underline{Z}_\infty C\omega}.$$

L'impédance d'entrée $\underline{Z}_\infty$ vérifie la même équation que l'impédance itérative : on a donc $\boxed{\underline{Z}_\infty = \underline{Z}_\mathrm{i}}$.

20. Une cellule branchée sur l'impédance itérative $\underline{Z}_\mathrm{i}$ étant équivalent à $\underline{Z}_\mathrm{i}$, un nombre quelconque de cellules branché sur $\underline{Z}_\mathrm{i}$ est équivalent à $\underline{Z}_\mathrm{i}$. On retrouve le même résultat que pour une ligne infinie.

On observe en effet que la loi U_n est identique à celle de ligne infinie quand les 5 cellules sont branchées sur $\underline{Z}_\mathrm{i}$.