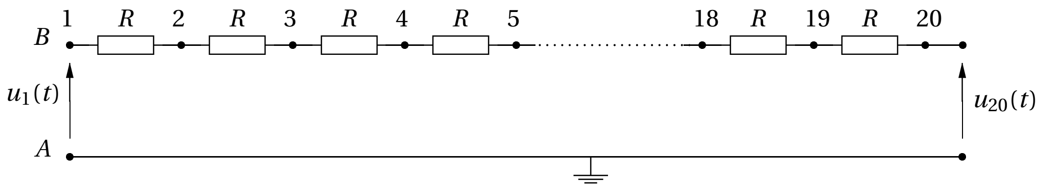
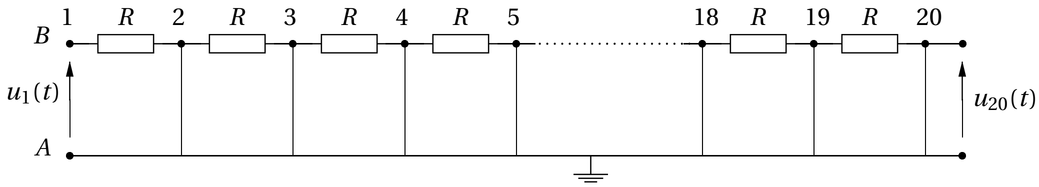
TP de physique n° 10 — Étude d'une ligne RC — solution

1 — Questions préliminaire

❑ **1** En très basse fréquence, les condensateurs sont équivalents à des interrupteurs ouverts. Le circuit est donc équivalent à



En sortie ouverte, le courant est nul dans les résistances, d'où $u_{20}(t) = u_1(t)$.
En très haute fréquence, les condensateurs sont équivalents à des court-circuits. Le circuit est donc équivalent à



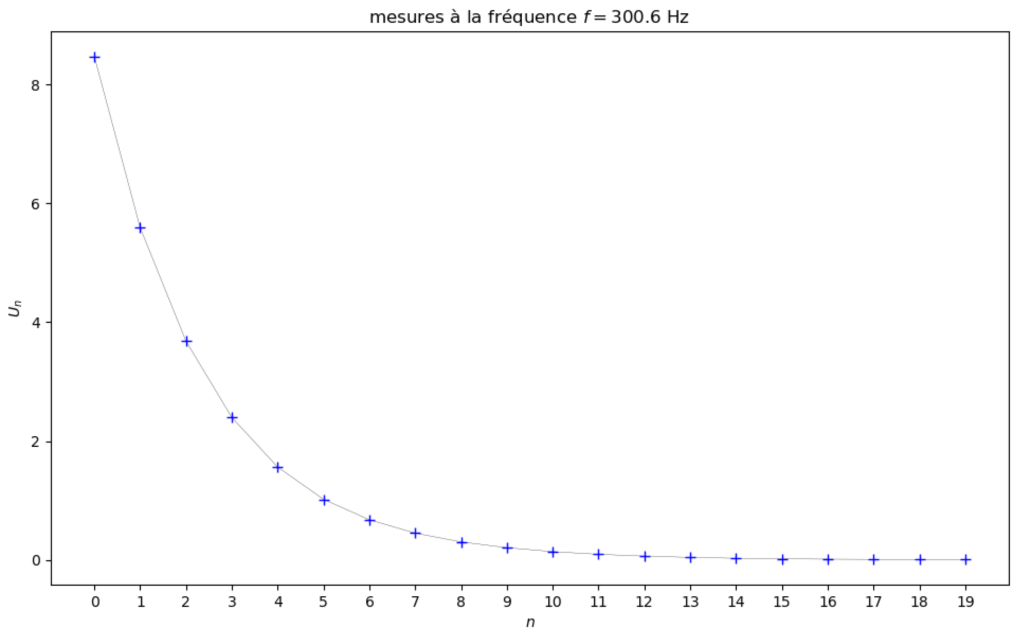
On a clairement $u_{20}(t) = 0$.
La ligne se comporte donc comme un **filtre passe-bas**.

❑ **2** Un pont diviseur de tension donne $\underline{u}_\text{s} = \dfrac{1}{1+\text{j}RC\omega}\underline{u}_\text{e}$ d'où $\boxed{\underline{H}_1(\text{j}\omega) = \dfrac{1}{1+\text{j}RC\omega}}$.

❑ **3** Les cellules ne sont pas en sortie ouverte ; la fonction de transfert d'une cellule au sein de la ligne n'est donc pas égale à $\underline{H}_1(\text{j}\omega)$. On ne peut donc pas écrire $\underline{H} = \left[\underline{H}_1(\text{j}\omega)\right]^N$.

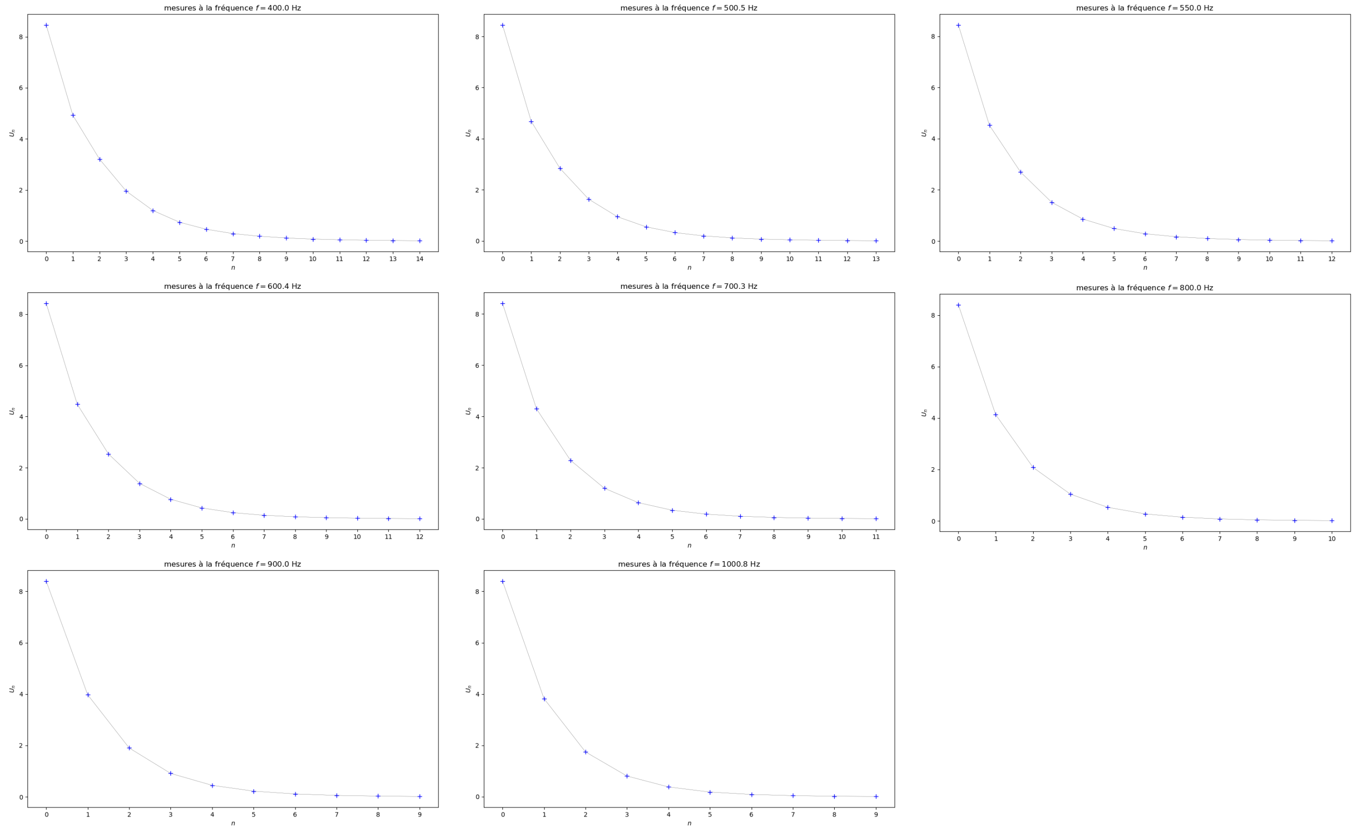
2 — Régime harmonique

❑ **4** Relevé des valeurs efficaces de la tension pour $f = 300{,}6$ Hz :



L'amplitude de la tension décroît tout au long de la ligne.

❑ **6** Relevés pour les autres fréquences :



On constate que la décroissance de l'amplitude est d'autant plus rapide que la fréquence est élevée.

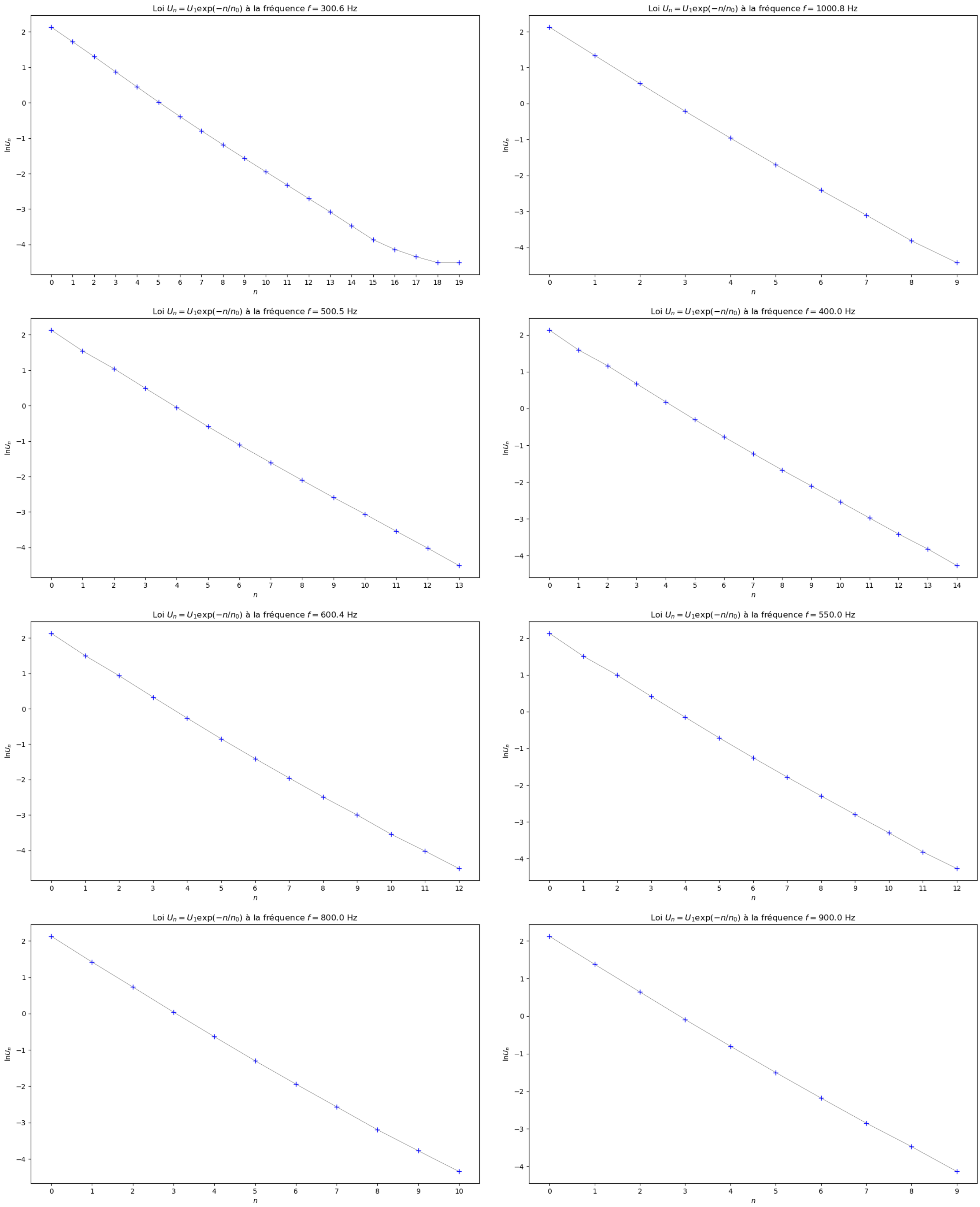
❑ **7** La relation $U_n = U_1' \, \mathrm{e}^{-n/n_0}$ peut s'écrire $\ln U_n = -\dfrac{n}{n_0} + \ln U_1'$.

On représente $\ln U_n$ en fonction de n : on doit obtenir une droite si les valeurs mesurées suivent la loi proposée.

❑ **8** Code correspondant :

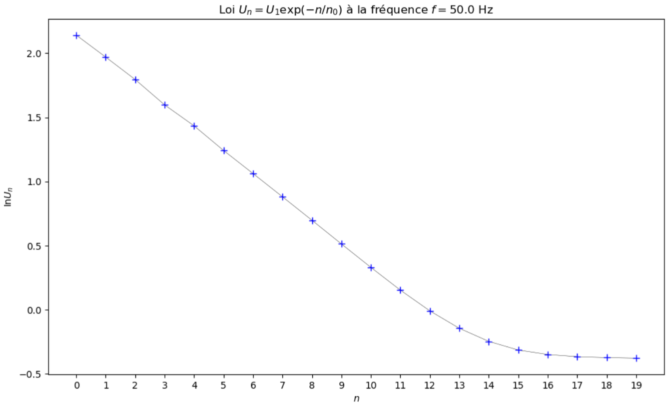
```
def plot_loi_data(data_i):
    freq = data_i[0]
    L = data_i[1]
    plt.figure(1, figsize=(10, 6))
    plt.subplots_adjust(left=0.065, right=0.97, top=0.95, bottom=0.08)
    plt.plot(range(len(L)),np.log(L),'k',linewidth=.3)
    plt.plot(range(len(L)),np.log(L),marker='+',markersize=7,mec='b',linestyle=' ')
    plt.xticks(list(range(len(L))),list(range(len(L))))
    plt.title("Loi $U_n=U_1\exp(-n/n_0)$ à la fréquence $f=$%.1f Hz"%freq)
    plt.xlabel("$n$")
    plt.ylabel("$\ln U_n$")
    plt.show()
```

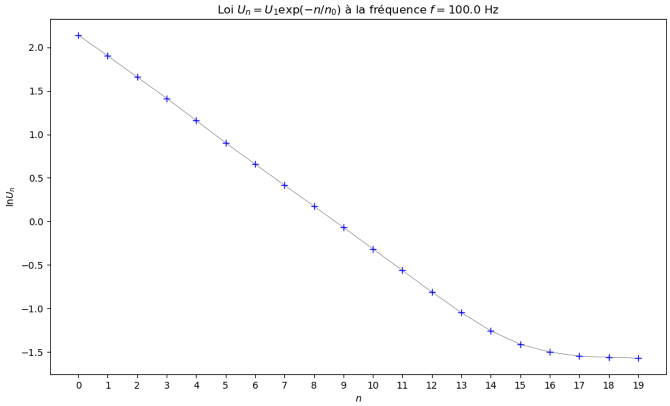
❑ **9** Graphe de $\ln U_n$ en fonction de n pour les fréquences considérées.



La relation proposée n'est pas vérifiée pour $f = 300$ Hz, c'est-à-dire quand la fréquence est trop basse.

Pour information, à des fréquences plus basses on obtient





On constate que la loi de décroissance exponentielle n'est pas respectée en fin de ligne aux basses fréquences. On peut supposer que l'hypothèse de la ligne semi-infinie n'est alors plus valide.

❑ **10** On retient les enregistrements à partir de la fréquence $f = 400$ Hz.

Le code suivant crée deux listes :

— la liste `freq_n0` qui contient les fréquences ;

— la liste `list_n0` qui contient les valeurs du paramètre n_0 pour chaque fréquence.

```
list_n0 = []
list_freq = []

for i in [4,6,7,8,9,10,11,12]:
    p = np.polyfit(range(len(data[i][1])),np.log(data[i][1]),1)
    n0 = -1/p[0]
    list_n0.append(n0)
    list_freq.append(data[i][0])
```

On exécute ensuite

```
for i in range(len(list_n0)):
        print("fréquence f = ",list_freq[i]," n0 = ",list_n0[i])
```

qui retourne

```
fréquence f = 400 n0 =  2.1973244953256326
fréquence f = 500.5 n0 =  1.966415433467613
fréquence f = 550 n0 =  1.8729246015374759
fréquence f = 600.4 n0 =  1.8044764362751413
fréquence f = 700.3 n0 =  1.6558898933315804
fréquence f = 800 n0 =  1.5401418204454722
fréquence f = 900 n0 =  1.4375775055685527
fréquence f = 1000.8 n0 =  1.3672118841354548
```

❑ **11** On constate que n_0 diminue quand f augmente.

Le paramètre n_0 peut s'interpréter comme une « profondeur de pénétration » de la tension dans la ligne.

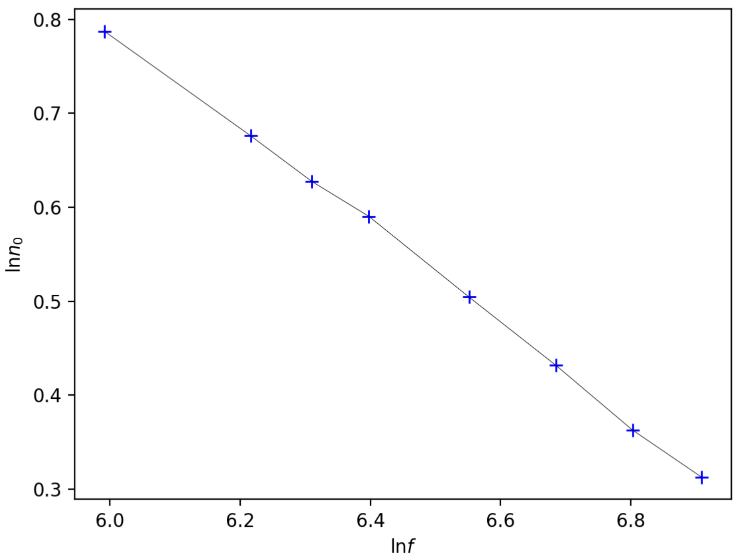
Ces résultats font penser à l'effet de peau ; n_0 joue le rôle de l'épaisseur de peau (comptée en nombre de cellules). ?

❑ **12** La loi $n_0(f) = kf^\alpha$ peut s'écrire $\ln n_0 = \alpha \ln f + \ln k$.

On représente $\ln n_0$ en fonction de $\ln n$: on doit avoir une droite si la loi proposée est respectée.

❑ **13** Effectuons cette représentation graphique :

```
plt.plot(np.log(list_freq),np.log(list_n0),marker='+',mec='b',markersize=7,linestyle=' ')
plt.plot(np.log(list_freq),np.log(list_n0),'k',linewidth=.3)
plt.xlabel("$\ln f$")
plt.ylabel("$\ln n_0$")
plt.show()
```



On peut effectuer une régression linéaire :

```
p = np.polyfit(np.log(list_freq),np.log(list_n0),1)
print("alpha = ",p[0])
```

qui retourne

```
alpha = -0.5228014384087316
```

On obtient donc

$$n_0(f) = \frac{k}{f^{0,52}} \approx \frac{k}{\sqrt{f}}.$$

➤ La dépendance de l'« épaisseur de peau » avec la fréquence est en $1/\sqrt{f}$, comme pour l'effet de peau.

3 — Régime établi non harmonique

❏ **14** En prenant en entrée un signal carré de fréquence $f = 500$ Hz, on constate qu'il se déforme tout au long de la ligne. AU rang $n = 10$, on obtient une tension quasi-sinusoïdale de fréquence $f = 500$ Hz.

Le signal carré peut se décomposer en série de Fourier, comprenant le fondamentale (sinusoïde à $f = 500$ Hz) et des harmoniques de fréquences multiples de 500 Hz. On a vu qu'une sinusoïde s'atténue d'autant plus vite le long de la ligne que sa fréquence est élevée. Les harmoniques du signal s'atténuent donc plus rapidement que le fondamentale, et à partir d'un certain rang, il ne reste quasiment plus que le fondamental, d'où la sinusoïde observée.