

DS n° 3

Sujet « facile »

Le sujet comporte quatre parties indépendantes.

Partie I — Quelques aspects relatifs au système vasculaire

Le cœur est l'organe permettant la circulation du sang dans l'organisme. Les contractions du ventricule gauche expulsent le sang oxygéné vers l'aorte pour irriguer ensuite le reste du corps. Le sang circule dans les artères qui se subdivisent jusqu'à devenir des capillaires au niveau des organes. Les organes sont alimentés en nutriments et en oxygène. Le sang se charge alors en dioxyde de carbone, puis remonte ensuite vers le cœur par le système veineux. On considère un rythme cardiaque de 70 pulsations par minute. Le volume de sang expulsé à chaque pulsation est de 75 cm^3 . On suppose que la section S de l'aorte (artère qui chemine le sang depuis le cœur vers le système artériel) est égale à $3,0 \text{ cm}^2$.

❑ 1 — Déterminer la valeur numérique du débit volumique moyen D . En déduire la valeur numérique de la vitesse v_s du sang dans l'aorte.

On veut décrire l'écoulement du sang dans un vaisseau sanguin. Le vaisseau considéré est de forme cylindrique de longueur L et de rayon R . La longueur L est supposée très grande devant R . On assimile le sang à un fluide visqueux, incompressible et homogène. On note η la viscosité dynamique du sang et ρ sa masse volumique. On se place en régime permanent et on suppose que l'écoulement est laminaire. L'influence de la pesanteur est supposée négligeable. En notant Ox l'axe du cylindre, et en adoptant les coordonnées cylindriques, le champ de vitesses s'écrit $\vec{v}(M) = v(r, \theta, x) \vec{u}_x$.

❑ 2 — À quelle condition sur le nombre de Reynolds l'hypothèse d'un écoulement laminaire est-elle vérifiée?

On considère une portion cylindrique de fluide, de rayon r et de longueur L . On note P_1 la pression à l'entrée de cette portion de fluide et P_2 la pression en sortie.

❑ 3 — Montrer que la vitesse ne dépend que de la variable r . Que vaut la vitesse du fluide en contact avec la paroi?

❑ 4 — La force par unité de surface s'exerçant sur l'élément de fluide considéré a pour expression $\eta \frac{dv}{dr} \vec{u}_x$. Donner l'expression des forces de viscosité exercées sur cet élément de fluide.

❑ 5 — Donner l'expression des forces de pression s'exerçant en amont et en aval du système.

❑ 6 — Montrer que le champ de vitesse vérifie l'équation

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{P_1 - P_2}{2\eta L} r.$$

En déduire l'expression littérale du champ de vitesse $\vec{v}(M)$ dans le fluide.

❑ 7 — Montrer que le débit volumique du fluide vérifie $D_v = \frac{\pi R^4}{8\eta L} (P_1 - P_2)$.

En déduire l'expression littérale de la vitesse moyenne v_m de l'écoulement en fonction de P_1 , P_2 , η , L et R .

❑ 8 — On considère que les vaisseaux capillaires sont assimilables à des cylindres de longueur $L = 1,0 \text{ cm}$ et de rayon $R = 5,0 \mu\text{m}$. On supposera par ailleurs que la perte de charge le long d'un capillaire est typiquement de 10 kPa . Vérifier que l'hypothèse d'un écoulement laminaire est validée.

❑ 9 — En supposant que l'ensemble des capillaires sont en dérivation et que la vitesse du sang dans un capillaire est de l'ordre de $1 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$, donner une estimation du nombre de capillaires présents dans le système vasculaire.

Données

masse volumique du sang $\rho_s = 1,1 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
viscosité du sang $\eta = 4,0 \text{ mPa} \cdot \text{s}$.

Partie II – Autour du sirop d'érable

Le sirop d'érable, produit emblématique du Québec (province du Canada), est un concentré de sève d'érable recueillie en faisant des trous dans l'écorce de l'arbre au printemps.

1 Manchon de sirop d'érable

Quand on prend du sirop d'érable pour l'étaler sur un pancake, il vaut mieux tourner la cuillère ou le couteau pour en prendre le plus possible et éviter d'en faire tomber. Afin de modéliser la situation, on considère un cylindre de rayon a et de longueur L tournant autour d'un axe horizontal à la vitesse angulaire Ω et entouré d'une couche d'épaisseur $h(\theta, r)$ de sirop d'érable, assimilable à un fluide incompressible de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η , plongé dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ (voir figure II-1). On définit l'épaisseur moyenne du film liquide par :

$$h_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta, t) d\theta. \quad (1)$$

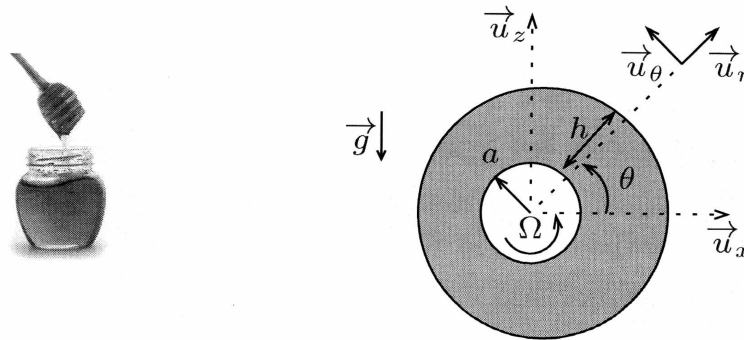


FIGURE II-1 – Cylindre en rotation enduit de sirop d'érable (vue de côté) : notation utilisées

On cherche à étudier le régime stationnaire où l'épaisseur h du film de sirop ne dépend plus que de l'angle θ . On suppose l'épaisseur du film h faible devant le rayon a du cylindre et les déformations du film faibles devant h (dans un souci de lisibilité de la figure, les proportions ne sont pas respectées). Les effets de viscosité de l'air ambiant sont négligés et la pression est supposée uniforme au sein du film. L'étude étant menée en coordonnées cylindriques, on propose d'écrire le champ des vitesses dans le film sous la forme $\vec{v} = v(r, \theta, t) \vec{u}_\theta$. On admet que l'application de la 2^e loi de Newton à une particule de fluide au sein du film conduit à l'équation :

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\rho g \cos \theta + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}. \quad (2)$$

❑ 1 — En raisonnant sur les ordres de grandeur, déterminer une condition sur Ω vis-à-vis d'une quantité dépendant de η , ρ et de h_0 , permettant de négliger $\rho \frac{\partial v}{\partial t}$ devant $\eta \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}$. Cette condition est-elle vérifiée ici ?

Sous cette condition, deux intégrations successives de cette relation permettent d'aboutir au champ des vitesses suivant :

$$v(r, \theta) = a\Omega + \frac{\rho g \cos \theta}{2\eta} [(r-a)^2 - 2(r-a)h]. \quad (3)$$

❑ 2 — Vérifier que $v(r, \theta)$ satisfait à la condition aux limites imposée en $r = a$. Reproduire le schéma de la figure II-1 en y traçant le champ des vitesses en $\theta = 0, \pi/2, \pi$ et $3\pi/2$.

❑ 3 — Justifier que le débit volumique par unité de longueur de cylindre s'écrit

$$Q(\theta) = \int_a^{a+h} v(r, \theta) dr, \quad (4)$$

puis calculer cette intégrale en fonction de $h, \theta, g, \eta, \rho, a$ et Ω .

❑ 4 — En régime stationnaire, on admet que le débit ne dépend plus de θ : $Q(\theta) = Q$. En déduire un lien entre l'épaisseur h et l'angle θ sous la forme $F(h) = 0$, avec

$$F(h) = \frac{\rho g}{3\eta} h^3 \cos \theta - \Omega a h + Q. \quad (5)$$

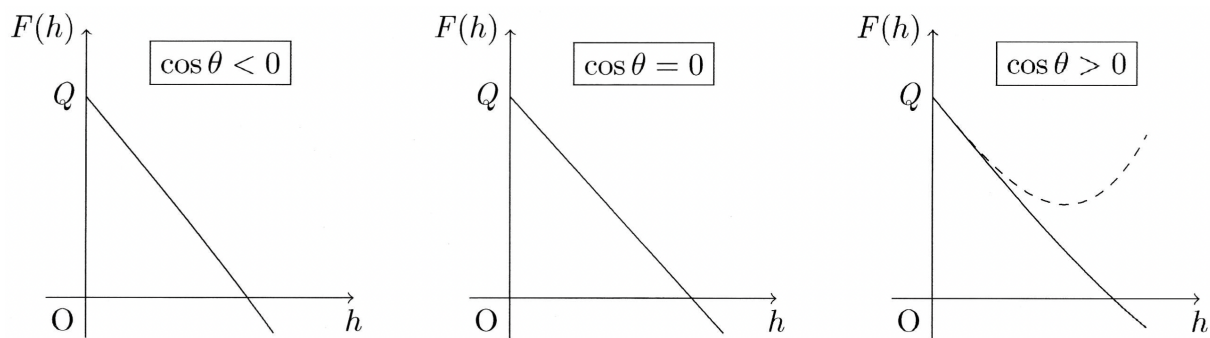


FIGURE II-2 – Représentations graphique de $F(h)$

La figure II-2 illustre les allures de la fonction $F(h)$ selon le signe de $\cos \theta$. Pour $\cos \theta > 0$, deux comportements sont possibles selon que F s'annule ou pas dans le domaine $h > 0$.

□ 5 — En étudiant les variations de la fonction F pour un angle θ fixé, montrer qu'une solution à l'équation $F(h) = 0$ existe à condition d'avoir $Q < Q_{\max}(\theta)$, où $Q_{\max}(\theta)$ est une quantité à exprimer en fonction de θ , g , η , ρ , a et Ω . Pour quelle condition sur Q existe-t-il alors une solution pour tout angle θ ?

□ 6 — En déduire littéralement la masse maximale de sirop d'érable que l'on peut ainsi maintenir autour du cylindre, par unité de longueur, en fonction de g , η , ρ , a et Ω .

Données

Propriétés physiques du sirop d'érable :

- masse volumique $\rho = 1,4 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$;
- viscosité dynamique $\eta = 0,20 \text{ Pa} \cdot \text{s}$.

Épaisseur moyenne du film liquide : $h_0 = 0,50 \text{ mm}$.

Vitesse angulaire de rotation : $\Omega = 4\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Partie III — La circulation sanguine

Le 18 décembre 2013 à l'hôpital européen Georges-Pompidou de Paris, le premier cœur 100 % artificiel et autonome était implanté sur un patient. Cette prouesse n'aurait pu être réalisée sans les nombreuses découvertes théoriques et expérimentales qui l'ont précédée. Aussi, nous nous proposons, dans ce problème, d'en étudier un des aspects ; la circulation sanguine. Ce domaine de la physiologie est appelé l'hémodynamique.

La figure III-1 représente le système vasculaire humain. La cavité droite du cœur envoie le sang appauvri en dioxygène dans les poumons à travers l'artère pulmonaire. Les poumons enrichissent le sang en dioxygène. Le sang enrichi en dioxygène retourne dans le côté gauche du cœur et orgue l'ensemble du corps puis revient au côté droit par la veine cave. Le système vasculaire issu de l'aorte se divise en artères, puis artérioles et capillaires. Le tableau 1 donne, chez l'homme, le diamètre des différents types de vaisseaux et leur nombre.

Le cœur humain pèse environ 0,3 kg et bat environ une fois toutes les secondes lorsqu'il est au repos. À chaque battement, son côté gauche injecte 80 cm^3 de sang par l'aorte à la pression de 16 kPa. La puissance mécanique massique totale du cœur est de $5 \text{ W} \cdot \text{kg}^{-1}$. Pour une durée de vie d'environ 80 années, cela en fait une source de travail remarquable.

Le biologiste anglais C. Murray a étudié la relation qui existe entre le diamètre d'un vaisseau et le nombre de vaisseaux semblables. La figure III-2 où sont portés en échelle logarithmique les nombres de vaisseaux N en fonction de leur rayon a met en évidence cette relation.

Cette relation peut être interprétée par un modèle simple. Le système vasculaire y est alors décrit par deux types de vaisseaux : des artères et des vaisseaux capillaires. Il est supposé composé de N_a artères de longueur L_a et de rayon r_a , et de N_c vaisseaux capillaires de longueur L_c et de rayon r_c (figure III-3).

En considérant alors un écoulement laminaire du sang, de viscosité η , qui se traduit par la loi de Poiseuille, l'expression de la résistance hydraulique de l'ensemble due système, que l'on retrouvera en partie II, vaut

$$R_{\text{tot}} = \frac{8\eta}{\pi} \left(\frac{L_a}{N_a r_a^4} + \frac{L_c}{N_c r_c^4} \right).$$

Par ailleurs, si on admet que le corps se construit en limitant la résistance hydraulique totale, on peut alors justifier qualitativement la loi de Murray théorique, qui traduit la loi de dépendance entre N_a , r_a , N_c et r_c (partie III).

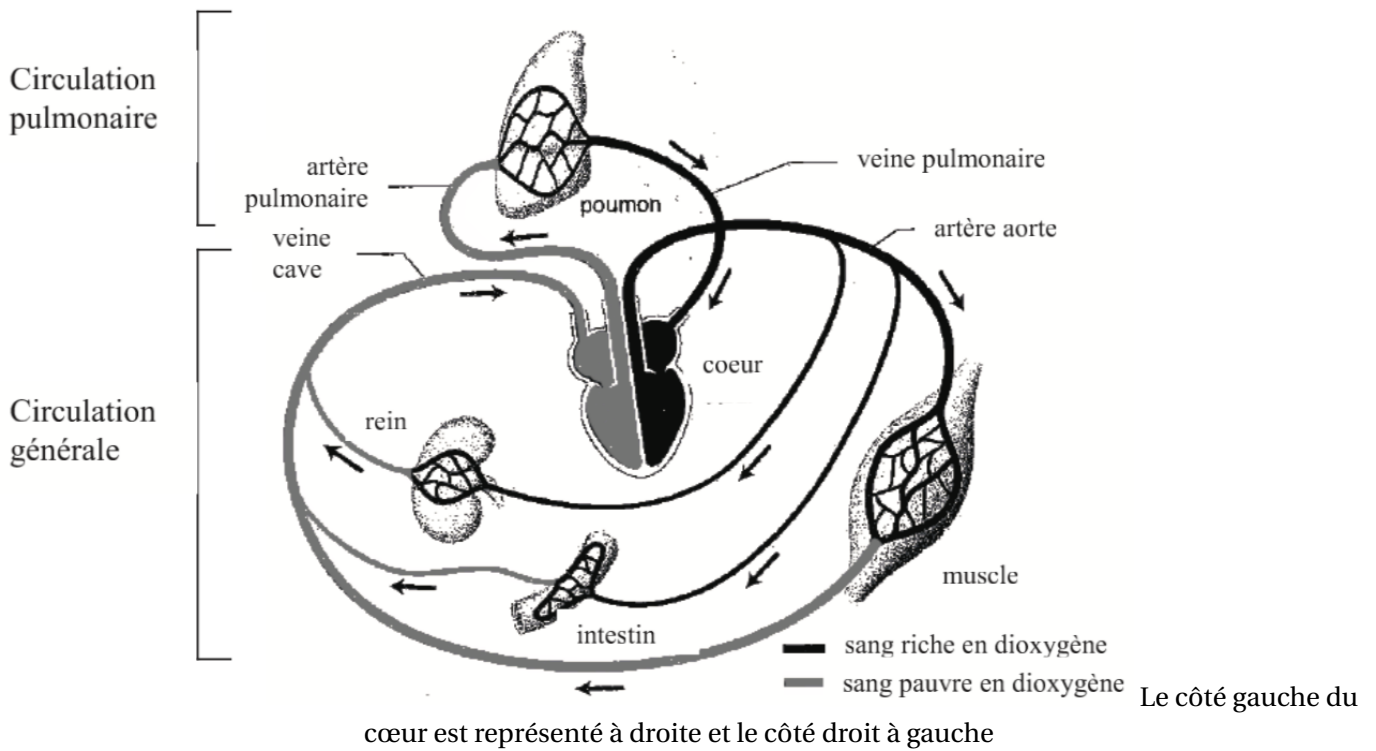


FIGURE III-1 – Le système vasculaire humain

Vaisseau	Diamètre $2a$ (mm)	Nombre N
Artère aorte	10^1	1
Grandes artères	3	4×10^1
Branches principales	1	2×10^3
Branches secondaires	6×10^{-1}	2×10^3
Branches tertiaires	10^{-1}	8×10^4
Artères terminales	5×10^{-2}	10^6
Branches terminales	3×10^{-2}	10^7
Artérioles	2×10^{-2}	4×10^7
Capillaires	8×10^{-3}	10^9

TABLE 1 – Diamètres et nombres des différents types de vaisseaux chez l'homme

Pour une compréhension et une modélisation plus raffinées de la circulation sanguine dans les vaisseaux, il faut garder à l'esprit plusieurs caractéristiques du système vasculaire, qui le différencient d'un réseau d'adduction d'eau par exemple :

- il est alimenté par une source pulsée : le cœur n'injecte du sang dans l'aorte que lors de la contraction du ventricule gauche;
- les vaisseaux sanguins ne sont pas des tuyaux rigides : les tissus qui les constituent possèdent une certaine élasticité;
- le sang n'est pas un liquide newtonien tel que l'eau. Son caractère non newtonien se traduit par exemple par le fait que sa viscosité dépend du diamètre du vaisseau dans lequel il s'écoule.

En s'appuyant sur les éléments donnés lors l'introduction du problème, nous établirons dans la partie I certains résultats généraux de la circulation sanguine. La partie II nous conduira à justifier l'expression de la résistance hydraulique de l'ensemble du système vasculaire et la partie III nous permettra de comparer les lois de Murray théorique et expérimentale.

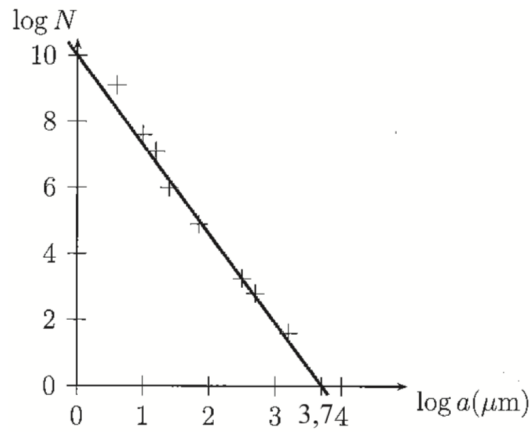


FIGURE III-2 – Nombre de vaisseaux N en fonction de leur rayon a

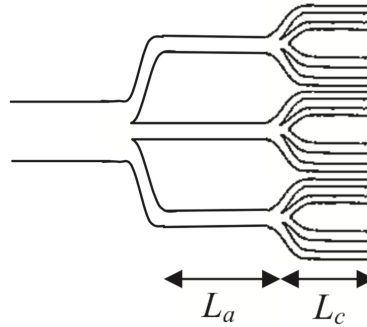


FIGURE III-3 – Modélisation du système circulatoire artériel

On rappelle les expressions des opérateurs vectoriels en coordonnées cylindriques¹ :

$$\overrightarrow{\text{grad}} G = \frac{\partial G}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial G}{\partial z} \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \text{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

1 — Loi de Poiseuille

On considère l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible de masse volumique ρ et de viscosité η dans un tuyau cylindrique immobile dans le référentiel d'étude galiléen, centré sur l'axe horizontal (Ax) de vecteur unitaire $\vec{e}_x$, de section circulaire de rayon a et de longueur L (figure III-4). Nous sommes alors en présence d'un écoulement de Poiseuille cylindrique. La pression à l'entrée du tube est $P(x=0) = P_A$ et $P(x=L) = P_B$ à la sortie. Le champ des vitesses est de la forme $\vec{v}(M) = v(r) \vec{e}_x$.

Par ailleurs, un élément de fluide limité par une partie du cylindre d'axe (Ax) et de rayon r , de surface latérale $\Sigma(r)$, est soumis de la part du fluide situé entre les rayons r et a à la force de viscosité

$$\vec{F} = \eta \frac{dv(r)}{dr} \Sigma(r) \vec{e}_x.$$

On négligera les effets de la pesanteur.

❑ 1 — Pourquoi choisit-on des pressions en entrée et en sortie différentes pour décrire cet écoulement?

❑ 2 — L'équation locale de la dynamique, ou équation de Navier-Stokes, pour les fluides incompressibles est

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \vec{f}_{\text{vol}} - \overrightarrow{\text{grad}} P + \eta \Delta \vec{v},$$

où $\eta \Delta \vec{v}$ est l'équivalent volumique des forces de viscosité.

Donner la signification des autres termes de cette équation.

❑ 3 — Estimer la vitesse moyenne du sang dans l'artère aorte.

❑ 4 — À quelle condition l'écoulement peut-il être considéré comme laminaire? Tester cette condition pour l'écoulement dans l'artère aorte en considérant une viscosité dynamique de $10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ et une masse volumique du sang de $10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Commenter.

1. Tous ne sont pas nécessairement utilisés dans ce problème.

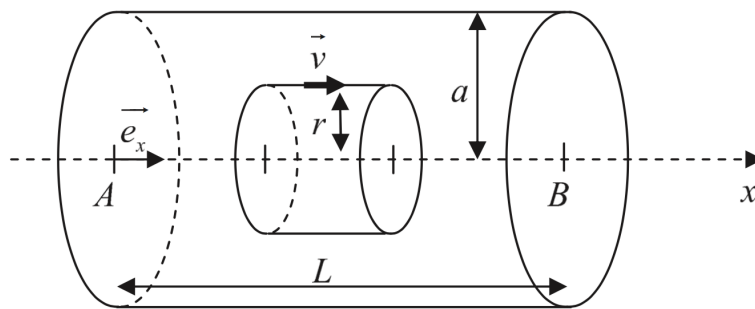


FIGURE III-4 – Loi de Poiseuille pour un tube de section circulaire

□ 5 — D'après les premiers éléments descriptifs de l'écoulement de Poiseuille cylindrique, simplifier l'équation de Navier-Stokes.

Pour définir la loi d'évolution $v(r)$, il faut préciser le terme $\eta \Delta \vec{v}$. Pour cela, il nous faut retrouver la densité volumique des forces de viscosité en calculant le résultante des forces de viscosité s'exerçant sur une particule de fluide possédant la forme décrite en figure III-5.

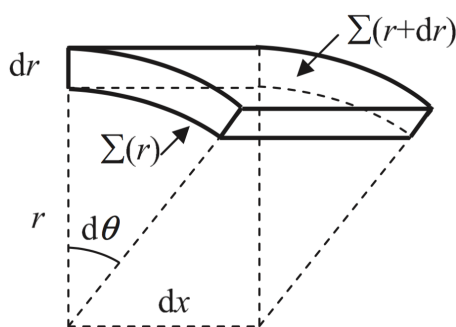


FIGURE III-5 – Particule de fluide en géométrie cylindrique

□ 6 — Déterminer les expressions de la force de viscosité $d\vec{F}_+$ appliquée sur la face supérieure de surface latérale $\Sigma(r+dr)$ et de la force de viscosité $d\vec{F}_-$ appliquée sur la face inférieure de surface latérale $\Sigma(r)$. Montrer que la résultante des forces de viscosité qui s'exercent sur la particule de fluide est donc

$$d\vec{F}_{\text{visc}} = \eta \left[\frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) \right] d\theta dx dr \vec{e}_x.$$

En déduire la densité volumique des forces de viscosité $\vec{f}_{\text{v,visc}}$.

□ 7 — La pression dépend-elle de la variable θ ? Et de la variable r ? Projeter l'équation de Navier-Stokes et montrer que le champ de pression est égal à

$$P(x) = P_A - (P_A - P_B) \frac{x}{L}$$

et que

$$v(r) = \frac{(P_A - P_B)}{4\eta L} (a^2 - r^2).$$

□ 8 — Donner l'expression du débit volumique D_v de cet écoulement. En expliquant l'analogie avec la résistance électrique, montrer que la résistance hydraulique du tuyau vaut

$$R_H = \frac{8\eta L}{\pi a^4}.$$

□ 9 — Justifier l'expression de la résistance hydraulique de l'ensemble du système vasculaire R_{tot} .

2. Cette force correspond au terme $\eta \Delta \vec{v}$ de l'équation de Navier-Stokes et ne doit pas être confondu avec la force notée $\vec{f}_{\text{vol}}$.

2 — Loi de Murray

On suppose que l'organisme dispose d'un volume V_0 donné de tissus pour réaliser les parois du système vasculaire et que l'épaisseur e d'un vaisseau est proportionnelle à son rayon extérieur r :

$$e = \alpha r \quad \text{avec} \quad \alpha \ll 1.$$

□ 10 — Exprimer V_0 en fonction de N_a , L_a , r_a , N_c , L_c , r_c , et α . En exprimant que le système circulatoire se construit en utilisant une quantité minimale et donc un volume V_0 minimal de tissus, déterminer $\frac{dr_c}{dr_a}$ en fonction de N_a , L_a , r_a , N_c , L_c et r_c .

□ 11 — Le corps se construit aussi de façon à minimiser la résistance hydraulique totale R_{tot} du système circulatoire. Montrer que cela entraîne une relation entre N_a , r_a , N_c et r_c , que l'on identifiera comme étant la loi de Murray théorique.

□ 12 — Une étude expérimentale a conduit à une expression expérimentale de la loi de Murray :

$$Na^{10/3,74} = Na^{2,7} = 10^{10}.$$

Proposer des interprétations à l'écart entre la loi de Murray théorique et la loi expérimentale. Toute démarche construite, même inachevée, développant une réflexion physique sur les limites de la modélisation, sera prise en considération dans l'évaluation.

Partie IV — Analyse d'une eau

La solubilité du dioxygène O_2 dans l'eau dépend de la valeur de la pression partielle de O_2 au-dessus de l'eau ainsi que de celle de la température. Le dioxygène dissout O_2 est en permanence consommé par les systèmes chimiques et biologiques. La concentration en dioxygène dissout est un indicateur de la qualité de l'eau. Une eau ne peut servir en irrigation que si la concentration massique en dioxygène dissout est supérieure à $5 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$.

1 — Diagramme E -pH du manganèse

On donne le diagramme potentiel-pH du manganèse à 298 K pour une concentration molaire totale en espèces dissoutes $c_T = 1 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

On ne considère que les espèces Mn(s) , $\text{Mn}^{2+}(\text{aq})$, $\text{Mn}^{3+}(\text{aq})$, $\text{Mn(OH)}_2(\text{s})$ et $\text{Mn(OH)}_3(\text{s})$.

On superpose le diagramme E -pH de l'eau en pointillé.

□ 1 — Associer chaque domaine aux espèces chimiques du manganèse en justifiant.

□ 2 — Calculer le pH de début d'apparition du précipité $\text{Mn(OH)}_3(\text{s})$.

□ 3 — Écrire les demi-équations électroniques associées aux couples de l'eau $O_2(\text{g})/\text{H}_2\text{O}(\ell)$ et $\text{H}_2\text{O}(\ell)/\text{H}_2(\text{g})$. En déduire les équations de droites $E_{O_2(\text{g})/\text{H}_2\text{O}(\ell)}$ et $E_{\text{H}_2\text{O}(\ell)/\text{H}_2(\text{g})}$. On suppose qu'aux différentes frontières la pression partielle des gaz est égale à 1 bar.

□ 4 — Retrouver la valeur de la pente de la droite frontière séparant le couple $\text{Mn(OH)}_3(\text{s})/\text{Mn(OH)}_2(\text{s})$.

□ 5 — Déduire par lecture graphique le potentiel standard $E_{\text{Mn}^{2+}(\text{aq})/\text{Mn(s)}}^\circ$ du couple $\text{Mn}^{2+}(\text{aq})/\text{Mn(s)}$.

□ 6 — Discuter de la stabilité dans l'eau des espèces dérivant du manganèse en fonction du pH.

2 — Dosage du dioxygène dissout dans l'eau par la méthode de Winkler

Le dosage s'effectue en 3 étapes.

1 Première étape

— Remplir une fiole jaugée de volume $V = 250 \text{ mL}$ de l'échantillon d'eau à analyser.

— Ajouter des pastilles de soude.

— Ajouter 2,00 g de chlorure de manganèse hydraté ($\text{MnCl}_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$).

— Boucher la fiole sans emprisonner d'air et la maintenir sous agitation magnétique jusqu'à la dissolution complète des réactifs.

— Agiter 30 minutes.

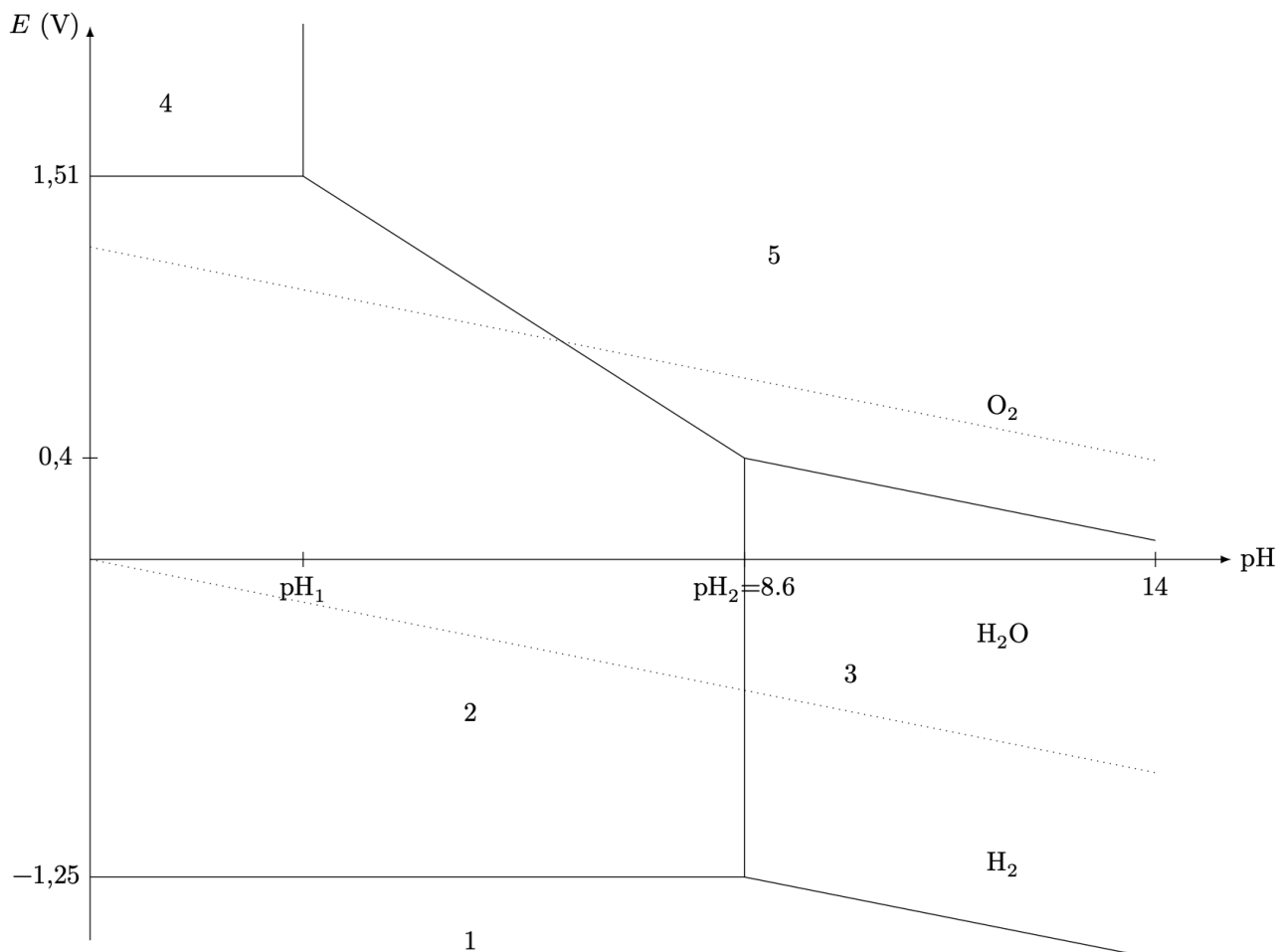


FIGURE IV-1 – Diagramme E -pH du manganèse et de l'eau

— Observer l'apparition d'un précipité brun.

□ 7 — Écrire l'équation de réaction modélisant la transformation chimique entre les ions manganèse II $\text{Mn}^{2+}(\text{aq})$ et les ions hydroxyde $\text{HO}^{-}(\text{aq})$.

□ 8 — Écrire l'équation de réaction modélisant la transformation chimique entre le composé obtenu et le dioxygène dissout $\text{O}_2(\text{g})$.

2 Deuxième étape

— Acidifier l'échantillon jusqu'à $\text{pH} = 1,5$ avec l'acide chlorhydrique concentré HCl .

— Ajouter 3,0 g d'iodure de potassium KI .

— Observer la formation d'un précipité et l'apparition d'une solution limpide orangée.

□ 9 — Écrire la réaction de dissolution du précipité de $\text{Mn}(\text{OH})_3(\text{s})$ en milieu acide.

□ 10 — Écrire l'équation de réaction modélisant la réaction d'oxydoréduction entre les ions $\text{Mn}^{3+}(\text{aq})$ et $\text{I}^{-}(\text{aq})$ à $\text{pH} = 1,5$ pour former $\text{Mn}^{2+}(\text{aq})$ et $\text{I}_2(\text{aq})$.

3 Troisième étape

— Prélever un volume $V_0 = 50 \text{ mL}$ de la solution obtenue.

— Doser cette solution par une solution de thiosulfate de sodium ($2\text{Na}^{+} + \text{S}_2\text{O}_3^{2-}$) de concentration $C_1 = 1,5 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

□ 11 — Écrire l'équation de réaction support du titrage entre les ions thiosulfate $\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$ et le diiode I_2 pour former $\text{S}_4\text{O}_6^{2-}$ et I^{-} .

□ 12 — On repère l'équivalence par un ajout de volume équivalent $V_{\text{eq}} = 5,0 \text{ mL}$ de thiosulfate de sodium. Montrer que la concentration molaire en dioxygène dissout C_{O_2} s'écrit

$$C_{\text{O}_2} = \frac{C_1 V_{\text{eq}}}{4 V_0}.$$

❑ 13 — En déduire la concentration massique c_{O_2} en dioxygène dissout dans l'échantillon. Conclure quant à son utilisation en irrigation.

3 — Simulation de Monte-Carlo

On souhaite dans cette partie évaluer grâce à la méthode de Monte-Carlo la valeur moyenne de la concentration massique c_{O_2} ainsi que l'écart-type associé.

Le tableau suivant précise les données correspondant à l'expérience réalisée :

grandeurs	V_{eq}	V_0	C_1
valeurs	5,00 mL	50,0 mL	$1,50 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$
incertitude-type	0,050 mL	0,020 mL	$1,5 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

La figure IV-3 donne une partie du programme Python pour réaliser la simulation de Monte-Carlo.

```

1  # Importation des bibliothèques
2  import numpy as np
3  import numpy.random as rd
4  import matplotlib.pyplot as plt
5
6  1 Entrée de données du problème
7  MO2 = 32.0      # g/mol
8  Veq = 5.0       # en mL
9  u_Veq = 0.05    # en mL
10 V0 = 50.0       # en mL
11 u_V0 = 0.02     # en mL
12
13 # \A compléter
14 # \A compléter
15
16 # Simulation de N = 10000 titrages par la méthode de Monte Carlo
17
18 N = 10000       # nombre de titrages à réaliser
19 Veq_sim = Veq + rd.normal(0,u_Veq,N) # simulation des valeurs de Veq
20 V0_sim = V0 + rd.normal(0,u_V0,N)    # simulation des valeurs de V0
21 # Simulation sur C1 à compléter
22
23 cO2_sim = C1_sim*Veq_sim * MO2/(4*V0_sim) # simulation des valeurs de cO2
24
25 # Représentation de l'histogramme
26 plt.hist(CO2_sim,bins='rice')
27 plt.show()
28
29 ## Analyse statistique des résultats de la simulation de MC
30
31 cO2_moy = np.average(cO2_sim)          # Calcul de la valeur moyenne de cO2_sim
32 u_cO2 = np.std(cO2_sim,ddof=1)         # Écart-type de cO2_sim
33 print(cO2_moy,'\n',u_cO2)              # Afficher les valeurs de cO2_moy en u_cO2

```

FIGURE IV-2 – Listing Python pour réaliser la simulation de Monte-Carlo

❑ 14 — Compléter les lignes 13, 14 et 21 sur votre copie

Le programme ainsi complété permet d'obtenir le résultat de la figure IV-3.

❑ 15 — Déduire de la simulation de Monte-Carlo une écriture du résultat pour la concentration massique en dioxygène dissout c_{O_2} .

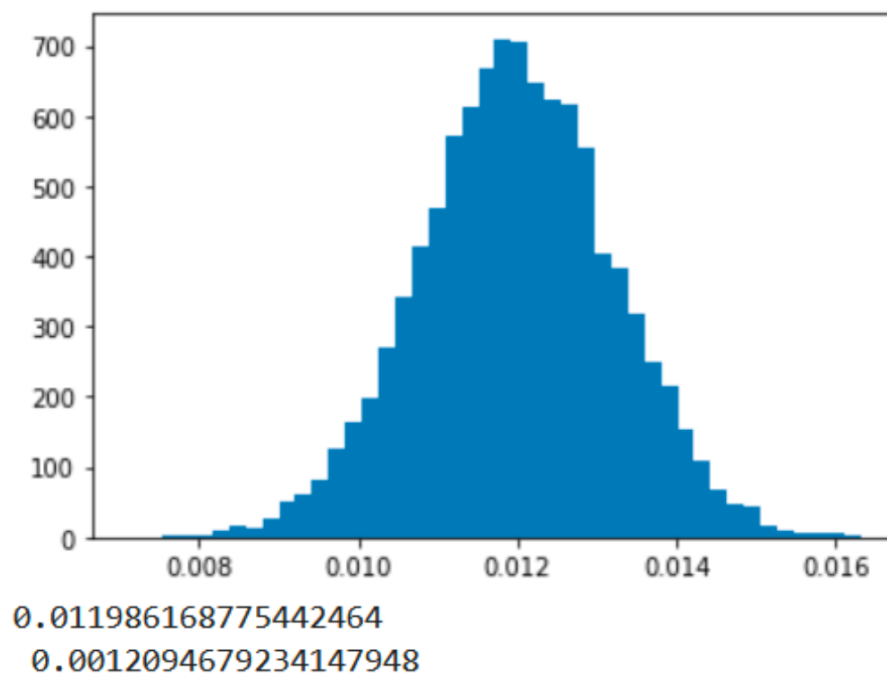


FIGURE IV-3 – Résultat de la simulation Python

Données

Données thermodynamiques à 298 K

produit ionique de l'eau	$K_e = 10^{-14}$
produit de solubilité de l'hydroxyde de manganèse III	$K_s(\text{Mn}(\text{OH})_3) = 10^{-35,6}$
potentiel standard du couple $\text{O}_2(\text{g})/\text{H}_2\text{O}(\ell)$	$E^\circ_{\text{O}_2(\text{g})/\text{H}_2\text{O}(\ell)} = 1,23 \text{ V}$
potentiel standard du couple $\text{H}_2\text{O}(\ell)/\text{H}_2(\text{g})$	$E^\circ_{\text{H}_2\text{O}(\ell)/\text{H}_2(\text{g})} = 0,00 \text{ V}$
potentiel standard du couple $\text{I}_2(\text{aq})/\text{I}^-(\text{aq})$	$E^\circ_{\text{I}_2(\text{aq})/\text{I}^-(\text{aq})} = 0,62 \text{ V}$
potentiel standard du couple $\text{S}_4\text{O}_6^{2-}(\text{aq})/\text{S}_2\text{O}_3^{2-}(\text{aq})$	$E^\circ_{\text{S}_4\text{O}_6^{2-}(\text{aq})/\text{S}_2\text{O}_3^{2-}(\text{aq})} = 0,08 \text{ V}$

Masses molaires

oxygène	$M(\text{O}) = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
Tétrahydrate de chlorure de manganèse	$M(\text{MnCl}_2, 4\text{H}_2\text{O}) = 198 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
Iodure de potassium	$M(\text{KI}) = 166 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$