

DS n° 3

Sujet « difficile »

Le sujet comporte trois parties indépendantes.

Partie I — Physique du sang : modèles d'écoulement du sang

Données :

Viscosité dynamique moyenne du sang : $\eta = 4,8 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$

Masse volumique moyenne du sang : $\rho = 1,07 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Débit cardiaque moyen en sortie du cœur (aorte) : $Q_{\text{cœur}} = 5 \text{ L} \cdot \text{min}^{-1}$

Pression mesurée en mm de mercure (mmHg) : 760 mmHg = 1013 hPa

Écart normalisé :

Soient deux grandeurs x_1 et x_2 assorties d'incertitudes type $u(x_1)$ et $u(x_2)$. On définit l'écart normalisé (appelé aussi Z-score) entre ces deux grandeurs par

$$z_{\text{score}} = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{u_1(x_1)^2 + u_2(x_2)^2}}.$$

Analyse vectorielle en coordonnées cylindriques

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}} f &= \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z \\ \text{div } \vec{a} &= \frac{1}{r} \frac{\partial (r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \\ \text{div}(f \vec{a}) &= f \text{div } \vec{a} + \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \vec{a} \end{aligned}$$

Théorème d'ostrogradski

Pour un champ vectoriel $\vec{A}(M, t)$ défini en tout point d'un volume \mathcal{V} délimité par une surface Σ , on a

$$\iint_{P \in \Sigma} \vec{A}(P, t) \cdot d\vec{S}_P = \iiint_{M \in \mathcal{V}} \text{div } \vec{A}(M, t) d\tau_M.$$

Dans le système circulatoire, le sang enrichi en dioxygène quitte le cœur *via* une série d'artères, puis d'artéries de diamètre plus petit, qui deviennent ensuite des vaisseaux capillaires. Le sang appauvri retourne au cœur par des veinules, puis par des veines. La microcirculation artéries-capillaires-veinules constitue l'essentiel du système vasculaire.

Le sang circule continuellement dans les vaisseaux sanguins grâce à la pompe cardiaque, et peut être en écoulement laminaire (physiologique) ou turbulent (par exemple si un obstacle comme un caillot ou une sténose est présent).

1 — Écoulement d'un fluide newtonien dans un cylindre

1 Préliminaires

On se propose dans cette partie d'établir l'équation de Navier-Stokes pour un écoulement laminaire incompressible à géométrie cylindrique pour un fluide quelconque, newtonien ou non, soumis à des contraintes de cisaillement σ .

On note $\vec{J} = \rho \vec{v}$ le champ de vecteur densité de courant de masse, où \vec{v} est le champ de vitesse et ρ la masse volumique.

□ 1 — En effectuant un bilan de masse sur un volume de contrôle V de fluide fixe délimité par la surface S pendant un temps dt , montrer que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0. \quad (1)$$

□ 2 — Retrouver alors l'équation de conservation de la masse, donnée par l'équation (2).

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div}(\vec{v}) = 0. \quad (2)$$

Donner la signification de la notation $\frac{D}{Dt}$.

Dans le cas d'un écoulement incompressible, simplifier la relation (2). En déduire, en justifiant, une propriété vérifiée par le flux du champ des vitesses.

Le problème de l'écoulement dans un vaisseau sanguin peut se ramener schématiquement à l'écoulement unidirectionnel d'un fluide visqueux dans un cylindre de longueur L et de rayon R (longueur et rayon du vaisseau). On suppose cet écoulement homogène et incompressible. Par ailleurs, **on néglige l'influence de la pesanteur** et on fait l'hypothèse d'un champ de vitesse s'exprimant en coordonnées cylindriques sous la forme $\vec{v} = v_z(r, \theta, z) \vec{u}_z$. On suppose que le sang est poussé vers les z croissants par un gradient de pression négatif (voir figure I-1). On appelle respectivement P_1 et P_2 la pression du sang à l'entrée du cylindre et à sa sortie.

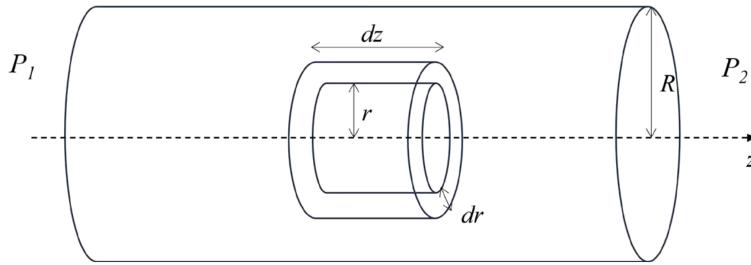


FIGURE I-1 – Modélisation du vaisseau sanguin avec $P_1 > P_2$, et schéma d'une particule de fluide

□ 3 — Commenter l'hypothèse faite sur le champ des vitesses et montrer que v_z ne dépend que de r .

On considère la particule de fluide figure I-1 comprise entre le cylindre d'axe z de longueur dz et de rayon r et le cylindre de même axe, de même longueur et de rayon $r + dr$.

On admet que la force de cisaillement $d\vec{F}$ qu'exerce une couche de fluide de surface élémentaire dS sur une couche de fluide située plus proche de l'axe s'écrit $d\vec{F} = \sigma dS \vec{u}_z$, où σ est la contrainte de cisaillement. Ici, la contrainte $\sigma(r)$ dépend de r .

□ 4 — Exprimer la force de cisaillement exercée par le reste du fluide sur la particule de fluide (en considérant les surfaces en r et $r + dr$).

En appliquant le principe fondamental de la dynamique sur la particule de fluide, obtenir l'équation de Navier-Stokes¹ :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \frac{1}{r} \frac{\partial(\sigma r)}{\partial r} \vec{u}_z. \quad (3)$$

2 Écoulement de Poiseuille dans l'hypothèse d'un fluide newtonien

Dans cette partie on considère le sang comme un fluide newtonien. Dans ce cas, la contrainte de cisaillement est proportionnelle au gradient de vitesse. Pour l'écoulement cylindrique considéré, cela implique $\sigma = \eta \frac{dv_z}{dr}$ où η est la viscosité dynamique du sang, supposée uniforme et constante.

□ 5 — On rappelle l'expression du nombre de Reynolds $\mathcal{R}e$ d'un écoulement cylindrique en fonction des grandeurs caractéristiques de l'écoulement, en prenant $2R$ comme longueur caractéristique et U comme vitesse caractéristique :

$$\mathcal{R}e = \frac{2R\rho U}{\eta}. \quad (4)$$

Préciser la signification physique du nombre de Reynolds. Dans le cadre d'un écoulement dans une conduite, préciser le type d'écoulement observé selon la valeur numérique du nombre de Reynolds, en ordre de grandeur.

□ 6 — Simplifier l'équation (3) en supposant l'écoulement stationnaire, laminaire, homogène et incompressible puis établir l'évolution de la pression en fonction de z , P_1 , $\Delta P = P_1 - P_2$ et L .

Montrer que la loi de vitesse $v_z(r)$ vérifie l'équation (5) :

$$v_z(r) = -\frac{\Delta P}{4\eta L}(r^2 - R^2). \quad (5)$$

□ 7 — Tracer le profil de vitesse $v_z(r)$.

□ 8 — Définir le débit volumique Q_v transporté par le fluide. Montrer que ce débit vérifie la loi de Poiseuille donnée par l'équation (6) :

$$Q_v = \pi R^4 \frac{\Delta P}{8\eta L}. \quad (6)$$

1. La contrainte σ dépend de r ; la notation σr représente sous forme simplifiée $r\sigma(r)$.

On peut établir une analogie entre l'écoulement de type Poiseuille dans une conduite cylindrique soumise à une différence de pression ΔP entre l'entrée et la sortie et la loi d'Ohm utilisée en électricité, ΔP étant analogue à la tension u et Q_v à l'intensité i .

□ 9 — Définir la résistance hydraulique R_h de la conduite en précisant son unité. Exprimer R_h en fonction de η , L et R .

Commenter la variation de la perte de charge (diminution de la pression liée à l'écoulement) avec la rayon du cylindre en comparant avec l'analogue en électricité.

3 Vérification expérimentale de la loi de Poiseuille

On peut vérifier expérimentalement la loi de Poiseuille avec un liquide comme de l'eau, par exemple avec le montage schématisé figure I-2 (voir BUP 1994 volume 8).

L'alimentation en eau s'effectue par un réservoir monté sur une glissière maintenue par un système vis-écrou qui permet de faire varier la hauteur H , mesurée par un mètre gradué en cm. On suppose le diamètre du réservoir assez grand pour que le niveau du liquide reste constant pendant l'expérience.

Le débit est mesuré à l'aide d'une éprouvette graduée en mL et d'un chronomètre précis à la seconde.

On dispose d'un tube capillaire cylindrique de longueur $L = 1,80$ m et de rayon $R = 0,50$ mm en roulé et fixé sur une planche horizontale surélevée permettant de placer l'éprouvette en sortie du tuyau à la hauteur de la planche. Le rayon de courbure de l'enroulement est choisi suffisamment important pour que le modèle abordé dans la partie précédente soit valable, ainsi que pour éviter toutes pertes de charge incontrôlées.

Tous les autres tuyaux de raccordement ont un diamètre supérieur ou égal à 12 mm.

On appelle ρ_{eau} la masse volumique de l'eau et on cherche à déterminer sa viscosité dynamique η_{eau} . On suppose que l'on travaille à 25°C à pression ambiante et on prend $\rho_{\text{eau}}(25^\circ\text{C}) = 997,13 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

La valeur de référence publiée de la viscosité dynamique de l'eau est $\eta_{\text{eau, référence}}(25^\circ\text{C}) = 8,91 \times 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ avec une incertitude type $u(\eta_{\text{eau, référence}}) = 0,20 \times 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}$.

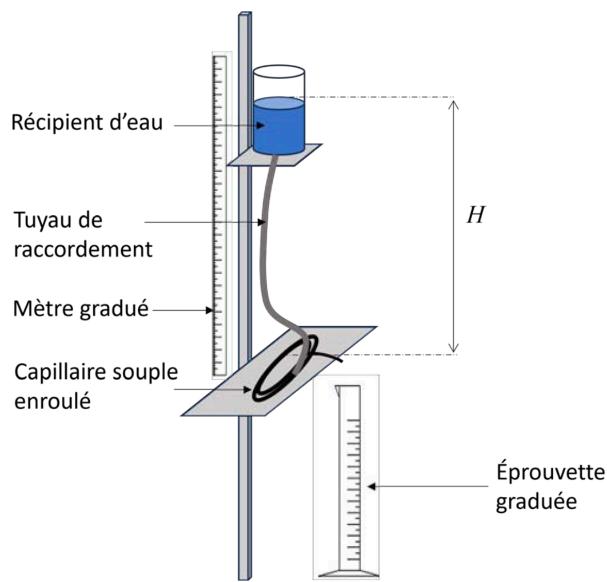


FIGURE I-2 – Montage présenté dans le BUP 1994 volume 8

□ 10 — Justifier que l'on peut négliger les pertes de charges dans les tuyaux de raccordement par rapport aux pertes de charge dans le capillaire.

Quelle pourrait-être l'origine des pertes de charges incontrôlées que le choix d'un grand rayon de courbure d'enroulement vise à limiter?

Exprimer la différence de pression ΔP entre l'entrée et l'extrémité du capillaire enroulé en fonction des données, puis en déduire l'expression du débit volumique Q_v en fonction des données (R , H , ρ_{eau} , η_{eau} , L , g).

On choisit de mesurer le volume d'eau V_0 récupéré dans l'éprouvette pour une durée $t_0 = 270$ s, pour différentes hauteurs H . On obtient alors les valeurs suivantes :

Hauteur H (cm)	30	40	50	60	70
Volume V_0 (mL)	12,5	17,0	21,0	25,0	29,5

On se propose alors d'utiliser un programme écrit en langage Python pour modéliser les résultats obtenus par une fonction affine $Q_v = A \times H$ et ainsi vérifier la validité du modèle de l'écoulement de Poiseuille, déterminer la valeur de A ainsi que son incertitude type, afin d'obtenir une mesure expérimentale de la viscosité dynamique de l'eau associée à son incertitude type.

On fournit le code du programme Python utilisé en annexe 1. Le graphique obtenu est donné dans la figure I-3. Les données affichées par l'ordinateur sont présentées sur la figure I-4.

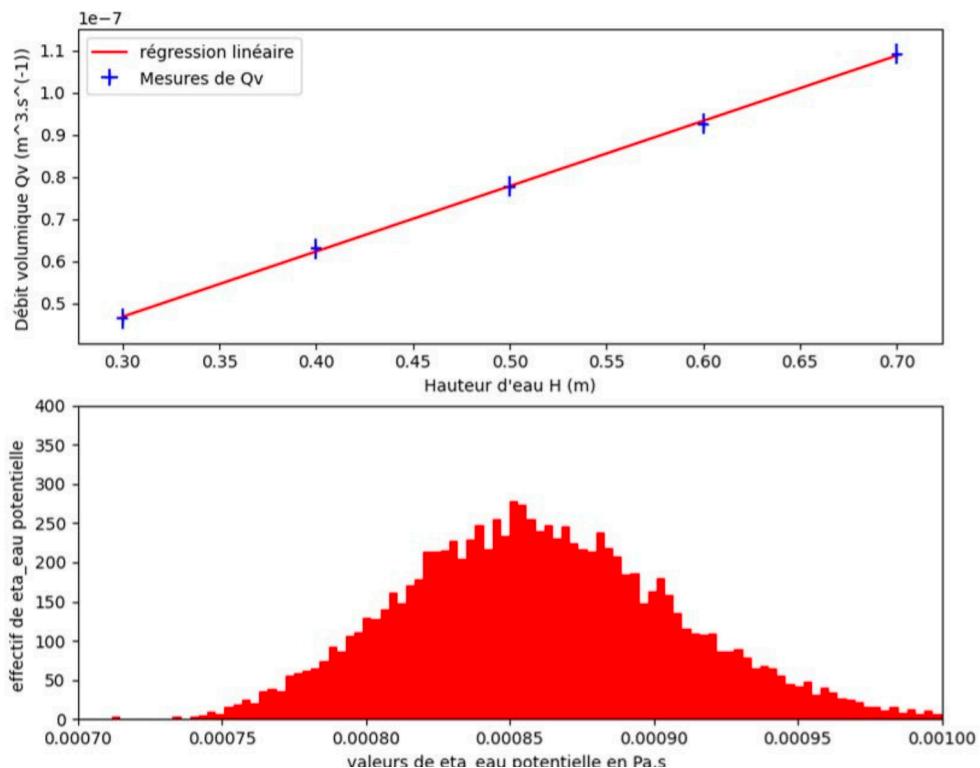


FIGURE I-3 – Régression linéaire $Q_v(H)$ des résultats de l'expérience et histogramme des valeurs possibles de viscosité dynamique η mesurée expérimentalement

Coefficient directeur $A = 1.55072234862588e-07 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ et $u(A) = 7.77327849386914e-09 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$

Ordonnée à l'origine $O = 3.1725836641085e-10 \text{ m}^3/\text{s}$ et $u(O) = 4.056510839522545e-09 \text{ m}^3/\text{s}$

$\eta_{\text{eau, expérimentale}} = 0.0008608733561925844 \text{ Pa.s}$ et $u(\eta_{\text{eau expérimentale}}) = 4.829497784826028e-05 \text{ Pa.s}$

FIGURE I-4 – Valeurs numériques affichées dans la console

□ 11 — Quel est le type d'évaluation d'incertitude (A ou B) choisi dans le programme Python de l'annexe 1 (lignes 20 à 25) pour les différentes grandeurs expérimentales? Commenter les expressions d'incertitudes types choisies pour R , H et Q_v .

□ 12 — Dans les programmes, identifier la fonction permettant d'obtenir les paramètres de la modélisation de la relation Q_v en fonction de H par régression linéaire.

Discuter, en argumentant, la validité du modèle d'écoulement de Poiseuille.

Proposer une valeur de A et son incertitude.

□ 13 — Expliquer sommairement l'objectif et la méthode, dite de Monte Carlo présentée de la ligne 45 à la ligne 53. Compléter la ligne 51.

Expliquer comment le programme calcule une valeur $\eta_{\text{eau,expérimentale}}$ et son incertitude $u(\eta_{\text{eau,expérimentale}})$ et préciser les lignes de commandes correspondantes.

Proposer une valeur numérique pour ces deux grandeurs. Aurait-on pu les déduire de l'histogramme des valeurs possibles de η_{eau} potentielles et si oui comment?

En comparant la valeur obtenue pour $\eta_{\text{eau,expérimentale}}$ avec la valeur de référence $\eta_{\text{eau,référence}}$ à 25 °C, conclure sur la validité de l'expérience comme moyen expérimental de déterminer η_{eau} .

2 — Hypothèse d'un écoulement newtonien du sang

La description hydrodynamique la plus simple assimile l'écoulement sanguin à celui d'un écoulement permanent et incompressible dans un réseau de conduites élastiques entre un réservoir à haute pression P_{ar} (pression artérielle moyenne) et un réservoir à basse pression P_v (pression veineuse moyenne). Dans le système circulatoire humain, l'aorte se ramifie en artères qui se divisent en artéries. Les artéries se ramifient ensuite en capillaires. Le trajet de retour du sang est réalisé *via* les veinules, veines et enfin la veine cave, comme le présente la figure I-5.

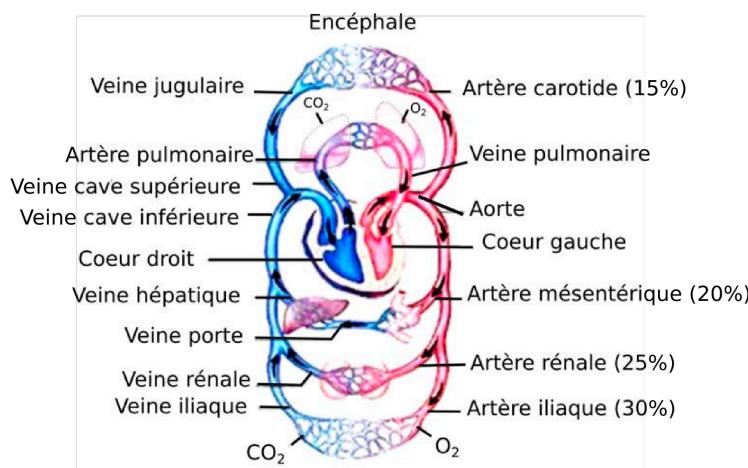


FIGURE I-5 – Petite circulation entre le cœur droit et gauche et les poumons, et circulation systémique du sang (circuit irriguant tous les organes autres que les poumons). Les fractions du débit volumique total $Q_{cœur}$ alimentant les grandes parties du circuit systémique sont indiquées en pourcentage. La fraction manquante est celle alimentant le muscle cardiaque.

Comme tout liquide visqueux s'écoulant dans un tube, le sang propulsé par le cœur dans le système circulatoire est soumis à une résistance hydraulique à l'écoulement. Cette résistance vasculaire est l'un des deux facteurs qui influencent la pression et le débit du courant sanguin, l'autre étant la compliance des vaisseaux sanguins (déformation élastique des artères avec la pression).

On considère un lit vasculaire (réseau microcirculatoire) simplifié du système d'irrigation d'un organe (voir figure I-6), dans lequel le sang circule entre une artère et une veine par un ensemble de N_c capillaires identiques en parallèles. On supposera le modèle de Poiseuille vérifié pour tout l'écoulement.

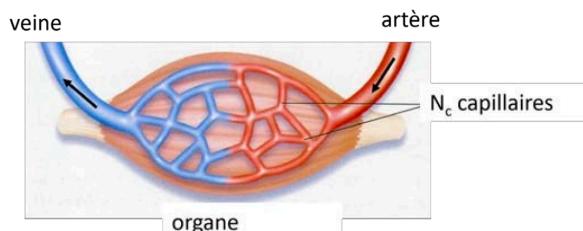


FIGURE I-6 – Lit vasculaire simplifié d'un organe. Dans le modèle adopté, on considère qu'il existe N_c capillaires identiques en parallèle entre l'artère et la veine.

Modélisation du lit vasculaire d'un organe

Rayon d'un capillaire : $R_c = 5,0 \mu\text{m}$

Longueur d'un capillaire : $\ell_c = 1,0 \text{ cm}$

Rayon de l'aorte : $R_{ao} = 0,8 \text{ cm}$

Rayon de l'artère : $R_{ar} = 0,25 \text{ cm}$

Rayon de la veine : $R_v = 0,25 \text{ cm}$

Débit volumique dans le cœur : $Q_{cœur} = 5 \text{ L} \cdot \text{min}^{-1}$

Débit volumique dans l'aorte : $Q_{ao} = Q_{cœur}$

Débit volumique dans l'artère : $Q_{ar} = 5 \% \times Q_{cœur}$

Pression dans l'artère : $P_{ar} = 12\,000 \text{ Pa}$

Pression dans la veine : $P_v = 1330 \text{ Pa}$

□ 14 — Dessiner le schéma électrocinétique équivalent du système simplifié du lit vasculaire.

Déterminer l'expression de la résistance hydraulique d'un capillaire R_{hc} , la résistance du réseau de capillaires R_h , et en déduire l'expression du nombre de capillaires N_c en fonction des données.

Déterminer également le débit volumique Q_c du sang dans les capillaires.

Effectuer les applications numériques. Commenter.

□ 15 — On définit la vitesse débitante U du sang comme celle qu'aurait un écoulement uniforme (donc non visqueux) de même débit. Calculer numériquement la vitesse débitant du sang, U_{ar} dans l'artère (ou la veine) et U_c dans les capillaires. Calculer également la vitesse débitante du sang directement en sortie du cœur U_{ao} .

En utilisant l'expression fournie du nombre de Reynolds, équation (4), calculer la valeur numérique des nombres de Reynolds \mathcal{Re}_{ar} de l'écoulement dans l'artère, \mathcal{Re}_c de l'écoulement dans un capillaire et \mathcal{Re}_{ao} de l'écoulement dans l'aorte, directement en sortie du cœur. Commenter.

□ 16 — On donne la pression moyenne dans l'aorte $P_{ao} = 12,9$ kPa et dans la veine cave $P_{vc} = 800$ Pa. Calculer numériquement la valeur de résistance hydraulique $R_{h,circ}$ correspondant à la circulation systémique du sang dans le corps humain.

3 — Modèle du sang à écoulement périodique, effet Windkessel

Le modèle d'un écoulement permanent ne peut décrire complètement l'écoulement du sang dans le système vasculaire. En effet, le sang ne sort pas du cœur de façon continue mais périodiquement : le régime est pulsé; il comprend deux phases, la diastole et la systole.

La systole début à chaque battement cardiaque : le ventricule gauche propulse dans l'aorte le volume d'éjection systolique, de l'ordre de 80 mL. Pendant la diastole, aucun débit ne sort du cœur.

On note T la période cardiaque, t_0 la durée de la systole et t_1 celle de la diastole. Expérimentalement, on constate que $t_0 \approx \frac{T}{3}$. Le débit volumique délivré par le cœur pendant la systole est noté Q_{sys} . Le débit sanguin est présenté figure I-7.

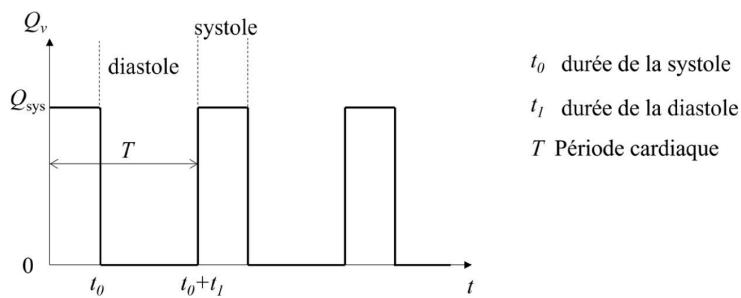


FIGURE I-7 – Débit sanguin du cœur en fonction du temps

Pendant la systole, une partie du volume sanguin éjecté par le cœur s'écoule vers la périphérie de l'aorte (composante axiale), tandis qu'une large part (composante radiale) dilate transitoirement l'aorte, dont la paroi est riche en fibres élastiques. Cette dilatation permet le stockage provisoire d'un volume sanguin et d'une quantité d'énergie, sous forme élastique. Lorsque la force ventriculaire d'éjection disparaît, la diastole débute : volume sanguin et pression sont restitués sous forme d'une nouvelle composante axiale. L'énergie stockée pendant la systole est restituée pendant la diastole.

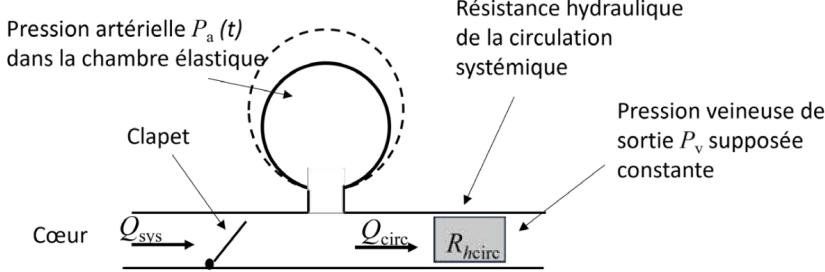
Du fait de l'élasticité de la paroi artérielle et de la résistance hydraulique de la circulation systémique, le débit cardiaque discontinu est transformé en débit artéolo-capillaire continu.

Ainsi lorsque l'on mesure la pression artérielle d'une personne, on obtient deux valeurs : la pression systolique est la pression maximale obtenue lors de la contraction du cœur, de l'ordre de 130 mmHg pour une personne en bonne santé et la pression diastolique, pression minimale obtenue pendant le relâchement du cœur, de l'ordre de 80 mmHg. Le médecin annonce alors une tension de 13-8.

On se propose dans cette partie d'expliquer ce résultat avec un modèle simple basé sur la théorie de Otto Franck datant de 1899 et nommé effet « Windkessel » (« chambre à air » en allemand).

Le modèle, présenté sur la figure I-8, est constitué par une chambre d'accumulation élastique modélisant l'élasticité des artères, placée dans un conduit rigide comportant un clapet (valve cardiaque) en amont, et la résistance hydraulique $R_{h,circ}$ de la circulation systémique en aval (principalement artérielles et capillaires). Cette résistance mène ensuite au système veineux de pression P_v supposée constante. La pression dans la chambre est appelée P_a et dépend du temps.

(a)



(b)

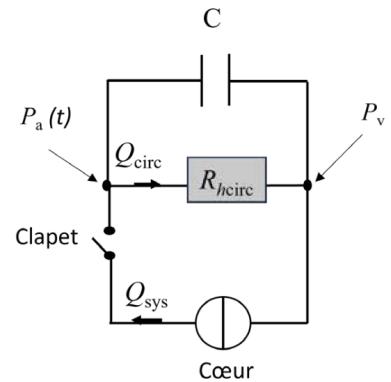


FIGURE I-8 – (a) Modèle de Windkessel. (b) Analogie électrocinétique du modèle de Windkessel

L'écoulement dans la chambre est périodique de période T . Quand le clapet est ouvert (systole) le flux issu du ventricule s'accumule pour une partie dans la chambre élastique, s'échappe pour l'autre partie par la résistance hydraulique. On appelle Q_{circ} le débit du sang dans le système circulatoire.

La capacité des artères à se déformer est caractérisée par une grandeur appelée compliance, notée C , supposée constante.

Pour une variation dV de volume de la chambre élastique, observée pour une variation dP de pression en son sein, la compliance a pour expression

$$C = \frac{dV}{dP}.$$

□ 17 — Exprimer le débit sanguin Q_{sys} du cœur pendant la systole en fonction du débit moyen du cœur Q_{coeur} , t_0 et T .

□ 18 — Justifier sommairement la modélisation électrique de l'effet Windkessel donnée sur la figure I-8. On précisera en particulier la grandeur électrique analogue à la compliance du système artériel et celle analogue au débit cardiaque.

□ 19 — On note $\Delta P(t) = P_a(t) - P_v$. On considère qu'à $t = 0$ le clapet s'ouvre (fermeture de l'interrupteur) et on pose $Q_{\text{circ}1}$ le débit volumique au début de la système dans le système circulatoire systémique. Donner l'équation différentielle vérifiée par Q_{circ} au cours de la systole et montrer que le débit à la fin de la systole vérifie

$$Q_{\text{circ}}(t_0) = Q_{\text{circ}0} = Q_{\text{sys}} + (Q_{\text{circ}1} - Q_{\text{sys}}) e^{-t_0/\tau} \quad (7)$$

où τ est une constante que l'on exprimera en fonction des données et dont on précisera l'unité.

De la même façon, en étudiant la phase diastolique et en admettant qu'à la fin de la diastole le débit est revenu à $Q_{\text{circ}1}$ (continuité du débit) on peut montrer (admis) :

$$Q_{\text{circ}1} = Q_{\text{circ}0} e^{-t_1/\tau} \quad \text{et} \quad Q_{\text{circ}0} = Q_{\text{sys}} \frac{(1 - e^{-t_0/\tau})}{1 - e^{-T/\tau}}.$$

□ 20 — Pour une fréquence cardiaque moyenne de 70 battements par minutes, une résistance hydraulique $R_{h,\text{circ}} = 1,5 \times 10^8 \text{ Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}$ et une compliance $C = 6 \text{ cm}^3 \cdot \text{kPa}^{-1}$, calculer numériquement t_0 , t_1 , τ ainsi que les valeurs extrêmes de Q_{circ} .

Dessiner l'évolution de Q_{circ} en fonction du temps. Conclure.

□ 21 — En choisissant une pression de la veine $P_v = 800 \text{ Pa}$ (pression dans la veine cave), calculer numériquement les valeurs P_{a0} en fin de systole et P_{a1} en fin de diastole et comparer aux valeurs de pressions mesurées chez le médecin.

On peut montrer que ce modèle simplifié donne de bons résultats pendant la diastole, en revanche des écarts importants sont visibles pendant la systole, où l'écoulement peut devenir turbulent du fait du débit élevé.

Annexe 1 : programme Python sur l'expérience de Poiseuille

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import random
4 import statistics
5
6
7 ## Données :
8
9 rho_eau = 997.13          # masse volumique de l'eau à 25 degrés Celsius en kg.m^{−3}
10 g = 9.81                  # accélération de la pesanteur en m.s^{−2}
11 L = 1.80                  # longueur du tube en m
12 R = 0.50*10**(-3)         # rayon du tube en m
13 t0 = 270                  # durée de l'expérience en s
14 H = np.array([30*10**(-2),40*10**(-2),50*10^{−2},60*10^{−2},70*10^{−2}])      # valeurs de H en m
15 V0 = np.array([12.5*10**(-6),17*10**(-6),21*10**(-6),25*10**(-6),29.5*10**(-6)])  # valeurs de V0 en m^{−3}
16 Qv = V0/T0                # calcul de Qv en m^{3/s}
17
18 ## évaluation d'incertitudes :
19
20 u_L = 10**(-2)/(12)**(1/2)          # incertitude sur la longueur du tube en m
21 u_R = (0.505*10**(-3)-0.495*10**(-3))/(2*(3)**(1/2))      # incertitude sur le rayon du tube en m
22 u_T0 = 1                          # incertitude sur la durée de l'expérience en s
23 u_H = 1*10**(-2)/12**(1/2)          # incertitude sur la mesure de H en m
24 u_V0 = ((10**(-6)/12**(1/2))**2+(10**(-6)/3**(1/2))**2)    # incertitude sur la mesure de V0 en m^{3}
25 u_Qv = Qv*((u_V0/V0)**2+(u_t0/t0)**2)**(1/2)                # incertitude sur le calcul de Qv en m^{3/s}
26
27 ## simulation de Monte Carlo pour la détermination de Qv = A*H
28
29 n_simulation = 10000
30
31 pente, ordonnee = np.zeros(n_simulation),np.zeros(n_simulation) # crée deux tableaux remplis de 0
32 for i in range (n_simulation) :
33     Qv_simule = np.random.normal(Qv,u_Qv)
34     H_simule = np.random.normal(H,u_H)
35     modelisation = np.polyfit (H_simule,Qv_simule,1)
36     pente[i], ordonnee[i] = modelisation      # remplit la case i du tableau avec les résultats de la simulation
37
38 A = np.mean(pente)
39 u_A = np.std(pente)
40 O = np.mean(ordonnee)
41 u_O = np.std(ordonnee)
42
43 regression = H*A+O
44
45 ## simulation de Monte Carlo pour évaluer la viscosité dynamique eta et son incertitude type :
46
47 n_simulation = 10000
48
49 L1 = np.random.normal(L,u_L,n_simulation)      # crée un tableau de valeur random de L1
50 R1 = np.random.normal(R,u_R,n_simulation)      # crée un tableau de valeur random de R1
51 A1 =
52
53 eta_eau = 3.14*R1**4*rho_eau*g/(8*L1*A1)    1 calcul de la viscosité dynamique de l'eau
54
55 ## affichage des résultats de la manipulation et de la régression linéaire
56
57 plt.subplot(2,1,1)
58 plt.errorbar(H,Qv,xerr=u_H,yerr=u_Qv,fmt='b+',label='Mesures de Qv')
59 plt.plot(H, regression, 'r', label='régression linéaire ')
60 plt.xlabel("Hauteur d'eau H(m)")
61 plt.ylabel("Débit volumique Qv (m^{3}.s^{−1})")
62 plt.legend()
63
64 print (" coefficient directeur A = ",A,"m^{2}.s^{−1} et u(A)=", u_A,"m^{2}.s^{−1}")
65 print ("ordonnée à l'origine O = ",O,"m^{3/s} et u(O)=", u_O,"m^{3/s}")
66
67 ## Tracé de l'histogramme de la viscosité dynamique :
```

```

68 nb_classe =100 # la hauteur de chaque classe est égale à l' effectif dans la classe
69
70 plt .subplots(2,1,2)
71 plt .hist (eta_eau, bins=np_classe, range(7*10**(-4),10*10**(-4)), color='red')
72
73 plt .axis ([7*10**(-4),10*10**(-4),0,400])
74 plt .xlabel ("valeurs de eta_eau potentielle en Pa.s")
75 plt .ylabel (" effectif de eta_eau potentielle")
76
77 ## Obtention de la viscosité dynamique et de son incertitude type :
78
79 eta_eauexp = np.mean(eta_eau)
80 u_etaeauexp = np.std(eta_eau)
81 print ("eta_eau,experimentale = "neta_eauexp, "Pa.s et u(eta_eau experimentale)=", u_etaeauexp,"Pa.s")
82
83 plt .show()

```

Partie II – Ballons-sondes dans l'atmosphère

Le premier ballon-sonde d'exploration de l'atmosphère a été lancé en 1892. À leurs débuts, ces ballons sont équipés d'enveloppes en matériaux non extensibles (papier huilé par exemple). Étant fermés, ils finissent donc par éclater en altitude lorsque la pression atmosphérique devient trop faible et il faut récupérer les instruments de mesure au sol après leur chute pour espérer relever des mesures faites et mémorisées par ceux-ci.

Depuis 1929, les ballons-sondes météorologiques sont équipés pour la transmission radio en temps réel des mesures effectuées vers des stations de réception au sol. Aujourd'hui encore l'entreprise fondée par le physicien et météorologue finnois Vilho Väisälä reste un leader de l'instrumentation embarquée.

En 2002 une altitude record de 53 km a été atteinte par un ballon scientifique lancé par l'institut de recherche japonais JAXA, avec un rayon maximal de l'ordre de 25 m. Enfin, à la fin de janvier 2023, l'armée des États-Unis a repéré un ballon de haute altitude (environ 18 km) d'origine chinoise avant de l'abattre. L'appareil, de dimensions comparables au ballon du record japonais, emportait une charge utile de l'ordre d'une tonne. Le gouvernement chinois l'a décrit comme météorologique.

Cette partie décrit quelques éléments de la physique de l'atmosphère et certaines propriétés de tels ballons, indilatables ou dilatables et des mesures qu'ils sont susceptibles de réaliser au moyen d'instruments ou de récepteurs embarqués.

Les données numériques et valeurs des constantes physiques nécessaires sont regroupées en fin d'énoncé. Pour les applications numériques demandées, on se contentera de 2 chiffres significatifs.

L'atmosphère sera décrite comme un mélange idéal de gaz parfaits de masse molaire moyenne \mathcal{M}_{air} et de rapport adiabatique γ_{air} , en équilibre dans le champ de pesanteur. L'étude sera limitée aux couches les plus basses (la troposphère) dans lesquels la température décroît linéairement de sa valeur $T_0 = 27^\circ\text{C}$ au sol à la valeur minimale $T_h = -64^\circ\text{C}$ à l'altitude maximale $h = 14 \text{ km}$. Les ballons eux-mêmes seront remplis d'hélium (sauf à la question **XX**, qui étudie un ballon historique employant un mélange contenant du dihydrogène). L'hélium sera également décrit comme un gaz parfait de masse molaire \mathcal{M}_{He} et de rapport adiabatique γ_{He} .

1 — Pesanteur et pression en altitude

On néglige les variations du champ de pesanteur g dans la troposphère, et aussi la courbure de la Terre : le sol est le plan $z = 0$ où l'axe (Oz) est vertical ascendant.

La pression $P(z)$, la température $T(z) = T_0(1 - \Gamma z)$ et la masse volumique $\rho(z)$ ne dépendent que de z . On suppose l'équilibre mécanique de la colonne d'air (figure II-1) située au-dessus de l'altitude z . Les paramètres T_0 et Γ sont constants.

□ 1 — Déduire des indications précédentes une relation intégrale liant $P(z)$ et la fonction $\rho(z)$ puis l'équation différentielle

$$\frac{dP}{P} = -\frac{1}{1 - \frac{z}{H_1}} \frac{dz}{H_0}$$

en exprimer les altitudes caractéristiques H_0 et H_1 en fonction de \mathcal{M}_{air} , g , R , T_0 et de Γ respectivement, puis calculer numérique H_0 et H_1 .

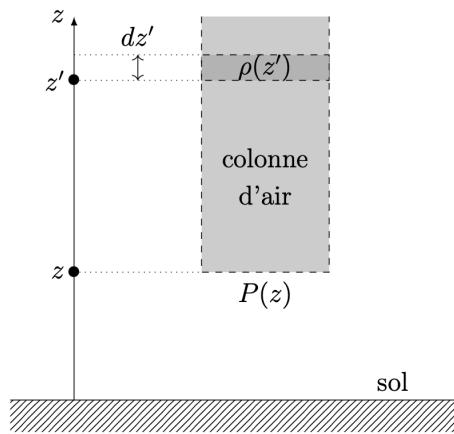


FIGURE II-1 – Équilibre d'une colonne d'air

□ 2 — Montrer que $P(z) = P_0(1 - z/H_1)^k$ et déterminer k puis la valeur numérique $P(h)$ de la pression au sommet de la troposphère.

2 — Stabilité d'une atmosphère sans vent

On étudie ici en l'absence de vent, un modèle d'atmosphère stratifié : la pression $P(z)$, la température $T(z)$ et donc la masse volumique $\rho(z)$ du gaz ne dépendent que de l'altitude. Une certaine quantité d'air, de volume V_0 , prise à l'altitude z_0 sous la pression $P(z_0)$, subit, pour des raisons que l'on ne précisera pas ici, un déplacement rapide jusqu'à une altitude $z > z_0$ et y acquiert presque instantanément la pression d'équilibre $P(z)$ environnante (cf. figure II-2). Cette évolution sera supposée assez rapide pour être décrite comme adiabatique et cependant réversible; on notera respectivement $\frac{1}{h_{\text{air}}} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \Big|_{\text{air}}$ la décroissance relative de la masse volumique de l'air *atmosphérique* et $\frac{1}{h_S} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \Big|_S$ la grandeur analogue pour les variations *adiabatiques et réversibles* d'altitude de l'air du volume V .

□ 3 — Écrire, en fonction de la masse volumique $\rho_{\text{air}}(z)$ de l'air atmosphérique et de celle $\rho_S(z)$ de l'air dans le volume V , la résultante des forces de pesanteur et de pression exercées sur le volume V d'air.

□ 4 — En déduire l'équation différentielle vérifiée par l'altitude $z(t)$ du volume V d'air. Si l'air est, à l'arrivée, plus froid que l'air environnant, va-t-il redescendre ou continuer à monter? Que dire dans ce cas de la stabilité de l'atmosphère?

□ 5 — On considère que $z - z_0$ est assez faible pour qu'on puisse se contenter d'un développement au premier ordre en $z - z_0$. Montrer l'équation de Brunt-Väisälä :

$$\ddot{z} + N^2 z = \text{cte} \quad \text{avec} \quad N^2 = g \left[\frac{1}{h_{\text{air}}} - \frac{1}{h_S} \right].$$

Ici et dans toute la suite on adoptera pour la description de l'air atmosphérique les expressions de la pression $P(z)$ et de la température $T(z)$ dans l'atmosphère :

$$T(z) = T_0(1 - \Gamma z) \quad \text{et} \quad P(z) = P_0(1 - \Gamma z)^k$$

avec $T_0 = 300 \text{ K}$, $P_0 = 1 \text{ bar}$, $1/\Gamma = 48 \text{ km}$ et $k = 5$.

□ 6 — Exprimer h_{air} en fonction de k , Γ et $T(z)/T_0$.

□ 7 — Dans le cas d'une évolution adiabatique réversible, rappeler la relation qui lie $P(z)$, $\rho(z)$ et leurs valeurs initiales P_0 et ρ_0 en fonction du rapport adiabatique $\gamma = C_p/C_V$. En déduire l'expression de h_S en fonction de γ , k , Γ et $T(z)/T_0$.

□ 8 — Conclure quant à la stabilité de l'atmosphère relativement aux mouvements verticaux de l'air.

3 — Forces exercées sur un ballon

En haute atmosphère des vents de vitesses allant jusqu'à $v = 120 \text{ km/h}$ ne sont pas rares. La force \vec{F}_v exercée dans ces conditions par le vent sur un ballon sphérique de rayon R ne dépend que de la masse volumique ρ_{air} de l'air, de v et de R .

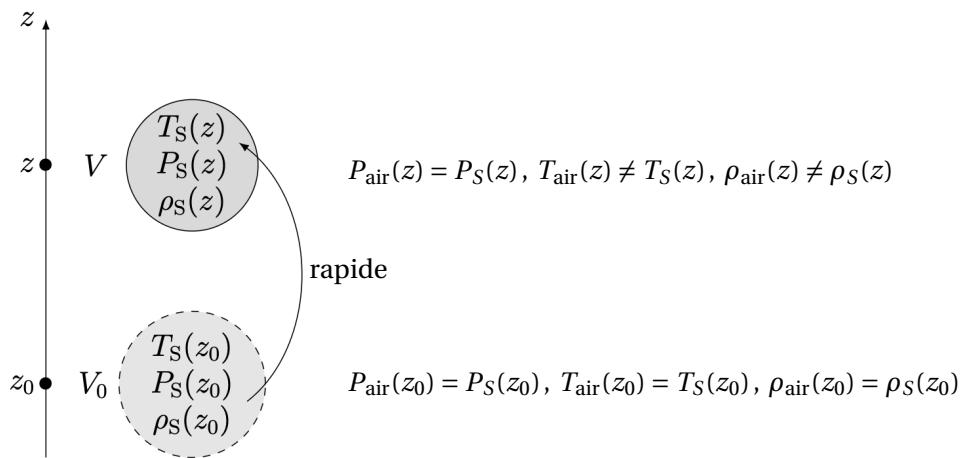


FIGURE II-2 – Évolution rapide d'une certaine quantité d'air

□ 9 — Proposer, par exemple par analyse dimensionnelle, une expression $F_v = \|\vec{F}_v\|$ de cette force due au vent.

□ 10 — On note Π le poids du ballon, qu'on supposera en équilibre thermique et mécanique avec l'air environnant. Expliciter le rapport $x = F_v/\Pi$ en fonction de R , v , g et de la densité $d = M_{\text{He}}/M_{\text{air}}$ de l'hélium. À quelle condition (portant sur R) la force exercée par le vent est-elle prépondérante? On calculera un ordre de grandeur du rayon critique R_c avant de conclure.

Le 17 novembre 1892, par une journée sans vent notable, un ballon à enveloppe rigide de volume $V = 4 \text{ m}^3$ est complètement gonflé au *gaz d'éclairage* (qu'on assimilera à du dihydrogène) par Gustave Hermite et Georges Besançon. Il embarque un manomètre et un thermomètre à minima, capables d'enregistrer les valeurs les plus basses de la pression et de la température avant l'éclatement du ballon et la récupération au sol des instruments. Dans ce cas les instruments indiquent une pression minimale $P_{\text{min}} = 0,35 \text{ bar}$ et une température minimale $T_{\text{min}} = -18^\circ\text{C}$.

□ 11 — Calculer la masse maximale de l'enveloppe et des instruments.

4 — Ballons à enveloppe élastique

Dans toute la suite on ne tiendra plus compte des vents pour l'étude de l'équilibre du ballon. Le ballon est formé d'un matériau élastique qui doit rester tendu, ce qui explique que la pression intérieure P_i de l'hélium doit rester supérieure à la pression extérieure P_e de l'air atmosphérique. Considérant le cas (figure II-3 d'un ballon sphérique de rayon (variable) R , on en isole par la pensée une partie basse et une partie haute, séparée par un cercle \mathcal{C} de rayon $r = R \sin \theta$, parallèle au plan (Oxy) avec $\theta < \pi/2$.

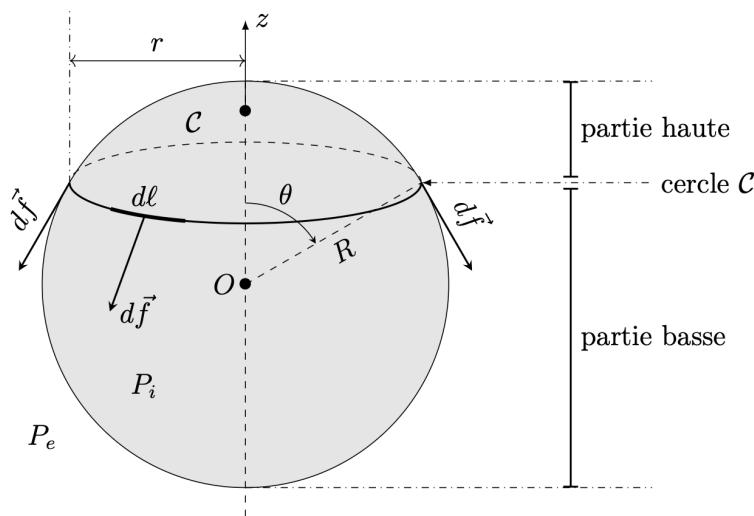


FIGURE II-3 – Forces de tension au sein de la membrane du ballon

La force de tension (ou de traction) exercée par la partie basse du ballon sur l'autre partie est uniformément répartie le long du cercle (\mathcal{C}) avec une force par unité de longueur de norme $\|\frac{d\vec{f}}{d\ell}\| = \xi$ constante, tangente au ballon et perpendiculaire à (\mathcal{C}). Ici et dans toute la suite on négligera la masse de la membrane.

□ 12 — Exprimer la résultante \vec{f} des forces de traction exercées par la partie basse du ballon sur la partie haute en fonction de R , ξ et θ , puis la résultante \vec{F}_p des forces de pression exercées sur la partie haute du ballon en fonction de $P_i - P_e$ et r uniquement.

□ 13 — Établir la *loi de Jurin-Laplace*, $P_i = P_e + \frac{2\xi}{R}$. Dans la suite on admettra qu'elle est constamment vérifiée avec pour P_e la pression atmosphérique à l'altitude z du ballon.

□ 14 — Le ballon est assemblé au sol, où $P_e(z=0) = P_0 = 1$ bar avec un rayon d'équilibre $R_1 = 2$ m et une pression intérieure d'équilibre $P_i = P_1 = 2$ bar. Calculer ξ et $\beta = 2\xi/P_0R_1$. On considérera que ces valeurs restent constantes dans toute la suite.

Le ballon monte à l'altitude $z > 0$ et acquiert alors instantanément le rayon d'équilibre R ; on note $x = R_1/R$ et $\delta(z) = P_e/P_0$. Au cours de cette montée on admet que l'évolution de l'hélium intérieur au ballon est adiabatique et réversible.

□ 15 — Établir une relation de la forme $\psi(x) = \delta(z)$ en précisant l'expression de $\psi(x)$ en fonction de x , β et γ_{He} . Montrer que $R > R_1$.

□ 16 — Les courbes proposées figure II-4 sont celles représentatives de $\psi(x)$ et de $\delta(z)$. En déduire les valeurs numériques de R aux altitudes 3, 9 et 15 km.

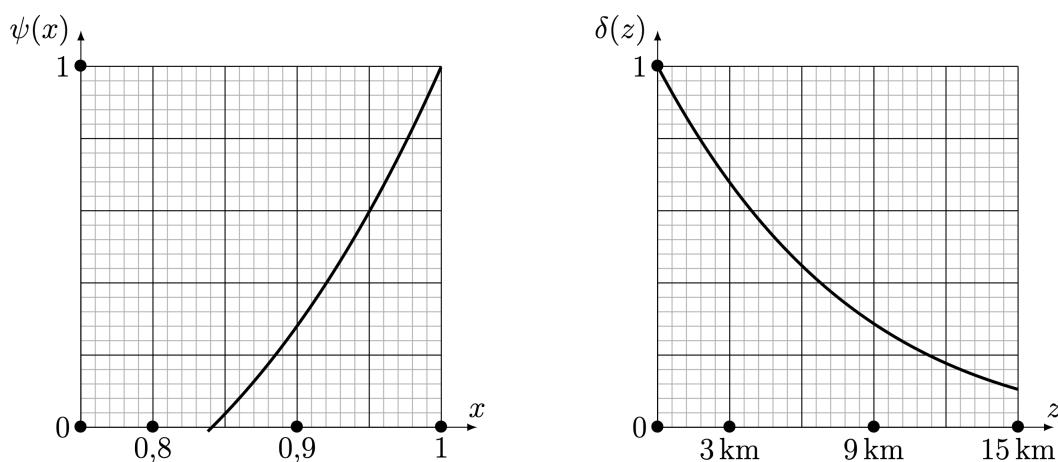


FIGURE II-4 – Courbes représentatives de $\psi(x)$ et $\delta(z)$

Constantes physiques, notations et données numériques

Champ de pesanteur au sol	$g_0 = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Constante molaire des gaz parfaits	$R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Constante d'Avogadro-Ampère	$N_A = 1,4 \times 10^{-23} \text{ mol}^{-1}$
Masse molaire de l'air	$\mathcal{M}_{\text{air}} = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
Masse molaire de l'hélium	$\mathcal{M}_{\text{He}} = 4,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
Masse molaire du dihydrogène	$\mathcal{M}_{\text{H}_2} = 2,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
Pression au sol	$P_0 = 1,0 \text{ bar}$
Rapport adiabatique C_P/C_V de l'air	$\gamma_{\text{air}} = 7/5 = 1,4$
Rapport adiabatique C_P/C_V de l'hélium	$\gamma_{\text{He}} = 5/3 \approx 1,7$
Rayon terrestre	$R_T = 6400 \text{ km}$

Facteurs de conversion

$$0^\circ\text{C} = 273 \text{ K}$$

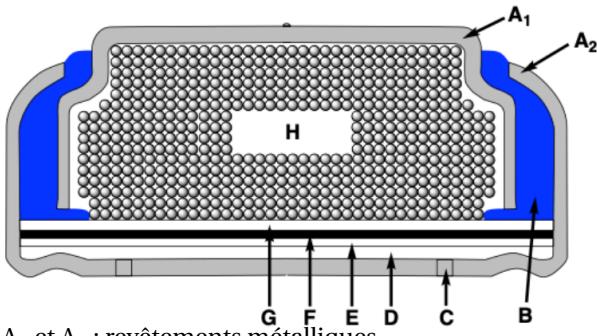
$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

$$\left(\frac{210}{300}\right)^5 \approx 0,15 \quad \ln(10) \approx 2,3 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} \approx 0,63$$

Partie III — Chimie

1 — Piles zinc-air

Les piles zinc-air sont des accumulateurs tirant leur énergie de l'oxydation du zinc avec le dioxygène de l'air ambiant (figure III-1). Ces piles possèdent de hautes densités énergétiques et sont peu chères. Leur format varie des piles boutons pour les audioprothèses à des formats intermédiaires, pouvant être utilisés dans des appareils tels les caméras, jusqu'aux grands formats utilisables dans les véhicules électriques.



A₁ et A₂ : revêtements métalliques
B : joint isolant; C : orifice d'entrée d'air
D : membrane semi-perméable
E : dioxygène (air); F : membrane hydrophobe
G : séparateur; H : poudre de zinc et électrolyte (solution gélifiée de potasse)

Caractéristiques :

Force électromotrice : $e \approx 1,6 \text{ V}$
Réaction de fonctionnement :
 $2 \text{Zn}(\text{s}) + \text{O}_2(\text{g}) \longrightarrow 2 \text{ZnO}(\text{s})$
Masse de zinc dans la pile : 0,65 g
Masse de la pile : 1,0 g
Intensité de fonctionnement : 0,80 mA
Tension de fonctionnement : 1,5 V

FIGURE III-1 – Schéma et caractéristiques d'une pile bouton zinc-air

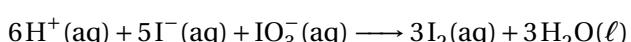
- 1 — Identifier l'anode et la cathode de cette pile et déterminer la polarité de la pile. Justifier.
- 2 — Calculer la force électromotrice standard e° de cette pile à partir des valeurs des potentiels standard E° des couples rédox.
- 3 — Calculer l'enthalpie libre standard $\Delta_f G^\circ$ de la réaction de fonctionnement de la pile à 298 K en utilisant les grandeurs thermodynamiques fournies. En déduire la valeur de la constante K° de cette même réaction. Conclure.
- 4 — Calculer la valeur de la force électromotrice standard à l'aide de la valeur de $\Delta_f G^\circ$.
- 5 — Calculer la durée théorique pendant laquelle cette pile peut fonctionner sans être déchargée.
- 6 — Calculer l'énergie que peut fournir cette pile.

2 — Énergie du sportif

Le glucose, un sucre de formule brute $\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6$, est stocké chez les plantes sous forme d'amidon et chez les animaux sous forme de glycogène, qui peuvent être hydrolysés à tout moment pour redonner des molécules de glucose prêtes à être dégradées en fournissant de l'énergie dès que la cellule en a besoin. Nous allons nous intéresser au titrage du glucose dans un jus d'orange selon le protocole proposé dans le document 1.

Document 1 : dosage du glucose présent dans du jus d'orange

- Presser une demi-orange et filtrer sur Büchner sous pression réduite pour récupérer le jus.
- Diluer 5 fois le jus d'orange. Cette solution est nommée (S1).
- En se plaçant en milieu basique, oxyder le glucose présent dans $V_g = 20,0 \text{ mL}$ de la solution (S1) à l'aide de 20,0 mL de solution aqueuse de diiode de concentration $C = 5,00 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Dans cette étape il se produit deux réactions :
dismutation du diiode : $3 \text{I}_2(\text{aq}) + 6 \text{HO}^-(\text{aq}) \longrightarrow 5 \text{I}^-(\text{aq}) + \text{IO}_3^-(\text{aq}) + 3 \text{H}_2\text{O}(\ell)$
réaction du glucose avec les ions iodates : $3 \text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6(\text{aq}) + \text{IO}_3^-(\text{aq}) \longrightarrow 3 \text{I}_2(\text{aq}) + 3 \text{H}_2\text{O}(\ell)$
- revenir en milieu acide pour former du diiode par une réaction de médiamutation :



- Titrer le diiode présent par une solution de thiosulfate de sodium à $0,100 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. On obtient un volume équivalent $V_{\text{éq}} = 8,8 \text{ mL}$.

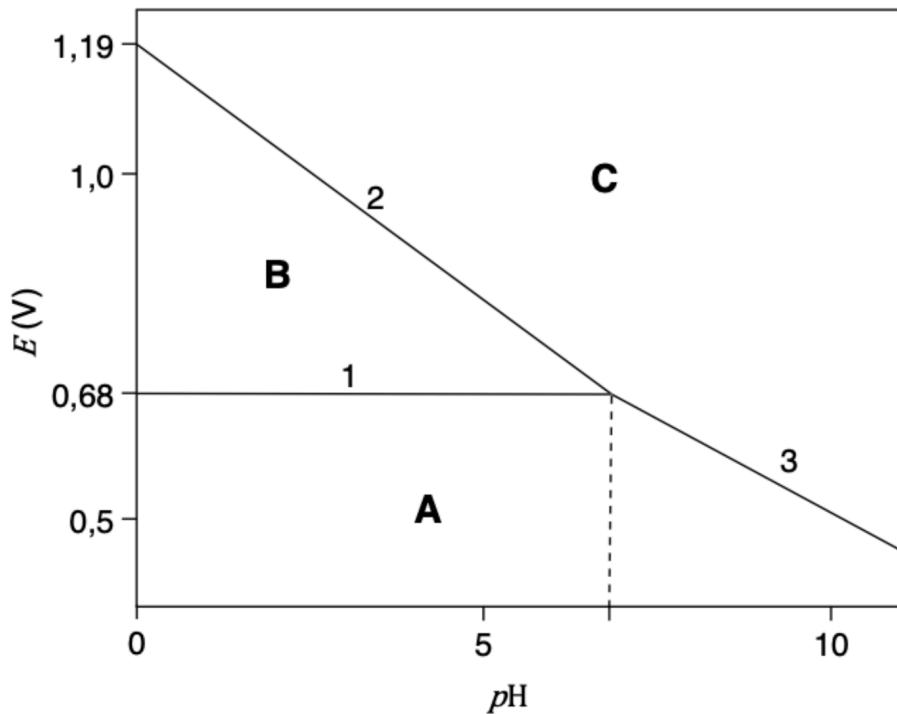


FIGURE III-2 – Diagramme potentiel-pH de quelques espèces de l'iode

- 7 — Déterminer le nombre d'oxydation de l'iode dans les trois espèces qui ont pour formules I_2 , I^- et IO_3^- .
- 8 — Attribuer à chaque domaine A, B et C du diagramme potentiel-pH de l'iode (figure III-2, $C_{\text{tracé}} = 1,0 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ en élément iodé) aux 3 espèces données dans la question précédente.
Justifier.
- 9 — Déterminer le coefficient directeur de la droite 2 à l'aide de la formule de Nernst.
- 10 — Écrire la réaction de titrage du diiode I_2 par les ions thiosulfates $S_2O_3^{2-}$. Comment repère-t-on l'équivalence du titrage?
- 11 — Calculer la concentration massique de glucose dans un jus d'orange.

Annexe

Constantes usuelles et approximations de calcul

Constante de Faraday : $\mathcal{F} \approx 10^5 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Constante d'Avogadro : $N_A \approx 6 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

Constante des gaz parfaits : $R \approx 8 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Approximations : $\sqrt{3} \approx 1,8$ et $\sqrt{2} \approx 1,4$.

Données numériques

Masses molaires : $M(\text{Zn}) = 65 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $M(\text{glucose}) = 180 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Données thermodynamiques à 298 K (valeurs arrondies)

	Zn(s)	$O_2(g)$	ZnO(s)	$H_2O(\ell)$
$\Delta_f H^\circ (\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1})$	0	0	-350	-300
$S^\circ (\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1})$	40	200	40	70

Potentiels rédox standard à pH = 0 :

$$E^\circ(O_2/H_2O) = 1,23 \text{ V}; E^\circ(\text{ZnO}/\text{Zn}) = -0,43 \text{ V}; E^\circ(S_4O_6^{2-}/S_2O_3^{2-}) = 0,08 \text{ V}.$$