

# TD bilans

# Bilans d'énergie

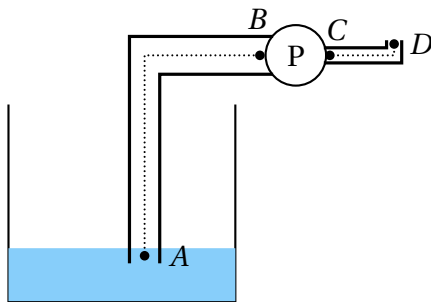
## 1 — Pompe

On considère un bloc pompe P qui puise de l'eau au fond d'un puits de profondeur  $h = 5$  m.

La section du tuyau AB fait  $100 \text{ cm}^2$ , celle du tuyau CD fait  $10 \text{ cm}^2$ .

La pression atmosphérique est de 1 bar, la pression de vapeur saturante de l'eau à  $20^\circ\text{C}$  est de 2,3 kPa.

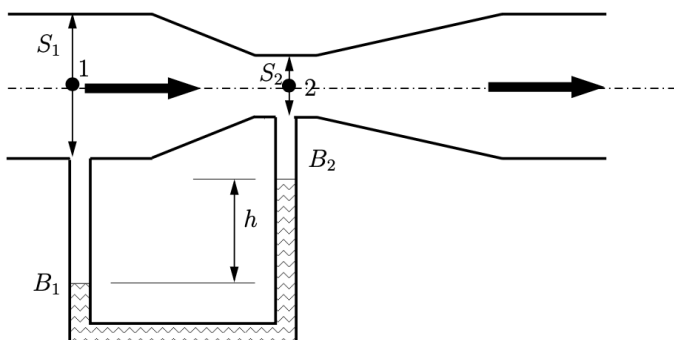
Le débit volumique est  $D_v = 10 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$ .



1. Quelles hypothèses peut-on faire sur l'écoulement?
2. Quelle est la vitesse du fluide en A?
3. Que vaut la pression en B? Y a-t-il un risque de cavitation?
4. Quelle est la puissance de la pompe?
5. Quelle altitude maximale pourra atteindre le jet d'eau?

## 2 — Mesure de débit

On considère le système de Venturi composé d'un rétrécissement suivi d'un élargissement d'une conduite. Les points 1 et 2 sont branchés sur un tube en U contenant du mercure. Un fluide de masse volumique  $\rho$  traverse le système avec un débit volumique  $Q$ .



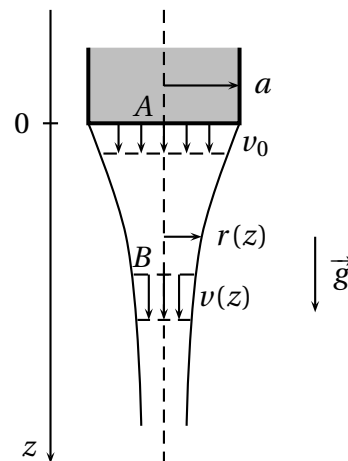
1. Exprimer la différence de pression entre les points 1 et 2 en fonction de la hauteur  $h$ , puis en fonction du débit  $Q$ . On rappelle que dans la direction transverse à un écoulement parallèle, la pression varie de façon hydrostatique.

2. En déduire une expression du débit  $Q$  en fonction de la différence de niveau  $h$  mesurée dans le tube en U.

3. Application numérique :  $\rho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ;  $\rho_{\text{Hg}} = 13000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ;  $h = 10 \text{ cm}$ ;  $D_1 = 1 \text{ cm}$  et  $D_2 = 5 \text{ mm}$ .

## 3 — Rétrécissement d'un jet liquide

On propose d'étudier un jet liquide sortant d'un orifice circulaire de rayon  $a$ , à la vitesse  $v_0$  correspondant à un débit volumique  $Q$ . Le liquide, de masse volumique  $\mu$  est considéré comme parfait. On néglige tout phénomène de tension superficielle à la surface du libre. Le jet présente une symétrie de révolution par rapport à l'axe vertical en tirets représenté sur la figure ci-contre. L'air environnant le jet liquide est à la pression uniforme  $P_0$ .



En un point  $M$  de l'écoulement, on utilise la base locale des coordonnées cylindriques. On suppose que l'écoulement est quasi-unidimensionnel avec un champ eulérien des vitesses est de la forme :  $\vec{v}(M, t) = v(z) \vec{e}_z$ .

Déterminer l'expression du rayon du jet  $r(z)$ .

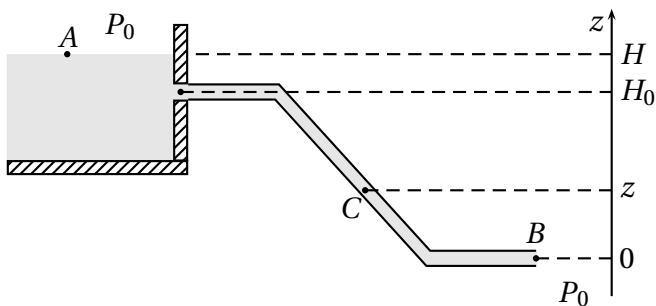
## 4 — Phénomène de cavitation

Une conduite de diamètre  $D = 30$  cm et de longueur  $L = 200$  m amène l'eau d'un barrage vers la turbine d'une centrale. Le barrage a une grande capacité, si bien que l'on peut considérer que le niveau de la surface libre est constant, à la cote  $H = 160$  m. Le départ de la conduite est situé à  $H_0 = 140$  m.

La pression atmosphérique est  $P_0 = 10^5$  Pa, la masse volumique de l'eau  $\rho = 10^3$  kg·m<sup>-3</sup> et le champ de pesanteur  $g = 10$  m·s<sup>-2</sup>.

L'extrémité aval de la conduite est à l'air libre.

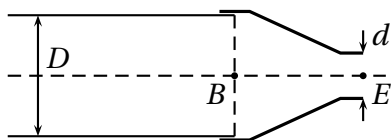
On donne  $H_0 = 140$  m et  $H = 160$  m.



1. Exprimer la vitesse de sortie en fonction de  $g$  et  $H$ , et calculer sa valeur. Calculer le débit volumique.
2. Exprimer la pression  $P(z)$  en un point de cote  $z$  de la conduite.

Déterminer la cote  $z$  des points pour lesquels se produit le phénomène de cavitation dans la conduite (la pression devient inférieure à la pression de vapeur saturante de l'eau  $P_{\text{sat}} = 2300$  Pa à 20 °C).

3. Pour remédier à ce problème (pouvant provoquer la rupture de la conduite), on visse à l'extrémité aval une tubulure de section décroissante (injecteur), de diamètre de sortie  $d < D$ , avec  $d = 15$  cm.

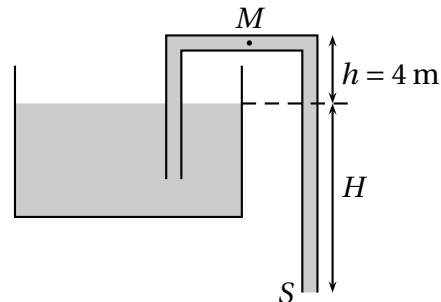


- 3.a) Calculer le nouveau débit volumique.
- 3.b) Montrer que le phénomène de cavitation ne se produira plus dans la conduite.

## 5 — Débit d'un siphon

Suite à de violents orages, une fondation étanche de grandes dimensions s'est remplie d'eau (fluide

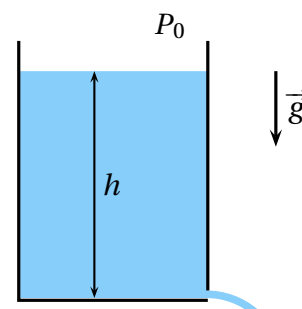
incompressible de masse volumique  $\mu = 1000$  kg·m<sup>-3</sup>). Celle-ci peut être vidée à l'aide d'un siphon constitué d'une conduite de 10 cm de diamètre qui s'élève à 4 m au-dessus de la surface libre du réservoir ouvert à l'atmosphère. On souhaite déterminer la cote  $H$  de la sortie du siphon pour obtenir le débit maximal. On négligera les pertes de charge.



1. Donner l'expression de la vitesse moyenne du fluide en S, extrémité du siphon débouchant dans l'atmosphère, en fonction de  $H$ .
2. Donner l'expression de la pression  $p_M$  au point M en fonction de la pression atmosphérique  $P_0$ ,  $H$  et  $h$ . La hauteur  $H$  peut-elle prendre d'importe quelle valeur?
3. Quel débit maximal peut-on obtenir? Quelle doit être alors la cote de la sortie du siphon?

## 6 — Relation de Torricelli

On considère la vidange d'un récipient de section  $S$  percé en son fond d'un orifice de section  $\sigma \ll S$ .



1. En considérant un point A à la surface libre et un point B à la sortie de l'orifice, comparer  $v_A$  et la vitesse  $v$  du fluide en B. Quelle hypothèse permet de considérer l'écoulement comme stationnaire?
2. En appliquant la relation de Bernoulli, obtenir l'expression de  $v$  en fonction de  $h$  (relation de Torricelli).
3. Exprimer  $\frac{dh}{dt}$  en fonction de  $v$ , puis de  $h(t)$ .
4. En déduire la durée  $T$  de la vidange du récipient en fonction de  $h$ .

## 7 — Vidange

Le fond d'un réservoir de section variable

$$S(z) = S_0 \left( \frac{z}{z_0} \right)^\alpha$$

est percé d'un petit trou.

Calculer le temps  $T$  de vidange entre les altitudes  $z_1$  et  $z_2$ .

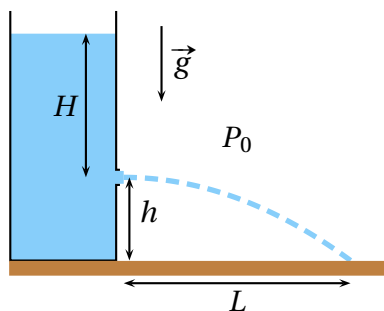
Quelle valeur de  $\alpha$  choisir pour que  $T$  soit une fonction linéaire de  $z_2 - z_1$  ?

## 8 — Contracté du jet

On considère le dispositif suivant : un récipient, rempli d'eau, est muni d'un orifice de section  $\sigma$ , situé à une hauteur  $H$  en dessous du niveau d'eau dans le récipient (le niveau étant maintenu constant).

On place le récipient au-dessus d'une plateforme horizontale, ce qui permet de mesurer la position du point d'impact du jet sur cette dernière, l'orifice de sortie étant à une distance  $h$  au-dessus de la plateforme.

On note  $P_0$  la pression atmosphérique et  $\vec{g}$  le champ de pesanteur terrestre.



1. Rappeler les conditions d'application de la relation de Bernoulli. En déduire l'expression de la vitesse  $v$  du fluide au niveau de l'orifice en fonction des données.

Application numérique pour  $H = 1,0$  m.

2. En supposant que chaque particule de fluide suit la même trajectoire qu'une masse ponctuelle lancée avec la même vitesse horizontale  $\vec{v}$  de l'orifice, exprimer la distance d'impact du jet  $L$  en fonction des données.

Pour  $h = 0,5$  m, on mesure  $L = 1,4$  m. Est-ce compatible avec le résultat précédent ?

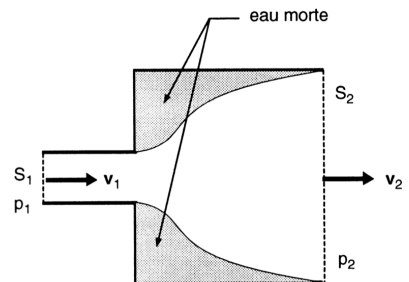
3. Dans une seconde expérience, on détermine le débit volumique du jet sortant de façon directe : on mesure le temps  $T$  mis pour remplir un récipient de volume  $V$  ; on en déduit une estimation  $v'$  de la vitesse de l'eau à la sortie de l'orifice.

On met une durée  $T = 27$  s à remplir un récipient de volume  $V = 10$  L. L'orifice de sortie étant circulaire, de diamètre  $d = 1,5$  cm, en déduire la vitesse  $v'$  du fluide à la sortie du récipient.

4. La valeur  $v'$  trouvée est-elle compatible avec la valeur  $v$  trouvée précédemment ? Proposer une explication.

## 9 — Perte de charge singulière

On considère un écoulement stationnaire incompressible d'un fluide dans une conduite d'entrée de section droite d'aire  $S_1$ , de vitesse



$v_1$ , la pression ayant une valeur  $P_1$  (pression amont). La conduite s'évase brutalement, l'aire de la section droite devenant  $S_2 > S_1$ . Il se produit alors un « décollement » des lignes de courant avec la création d'une zone d'eau morte où se produit en regard de la zone d'écoulement un régime turbulent. Le fluide stagnant est supposé rester à la pression  $P_1$ .

À un certain niveau, les lignes de courant les plus éloignées de l'axe rejoignent à nouveau la paroi de la conduite. La vitesse du fluide (vitesse de sortie) est alors  $v_2$  et la pression  $P_2$  (pression aval).

1. Effectuer le bilan des forces exercées sur le fluide contenu entre les plans d'entrée et de sortie.

2. Exprimer le débit massique  $D_m$  à l'entrée et à la sortie.

3. En effectuant un bilan de quantité de mouvement, montrer que  $D_m(v_2 - v_1) = S_2(P_1 - P_2)$ .

4. Établir la relation

$$\frac{P_2}{\mu} = \frac{P_1}{\mu} + \frac{v_1^2 - v_2^2 - (v_2 - v_1)^2}{2},$$

où  $\rho$  est la masse volumique du fluide.

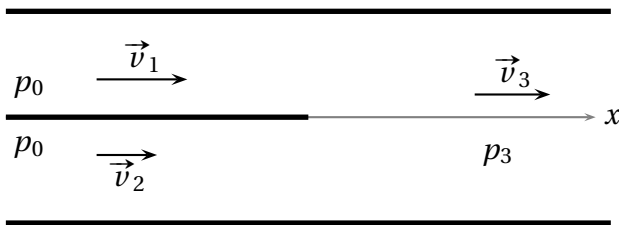
Comparer ce résultat à celui qu'on aurait obtenu en appliquant le théorème de Bernoulli. Expliquer pourquoi ce théorème n'est pas applicable dans le cas considéré.

5. Montrer que l'élargissement brusque a provoqué une « perte de charge »  $\Delta P = \frac{\mu}{2}(v_2 - v_1)^2$  concernant la variation de pression  $P_1 - P_2$ .

Exprimer  $\Delta P$  sous la forme  $\Delta P = \alpha \frac{1}{2} \mu v_1^2$ , où  $\alpha < 1$  sera calculé en fonction du rapport  $\frac{S_1}{S_2}$ .

## 10 — Homogénéisation d'un écoulement

Une canalisation cylindrique d'axe horizontal  $x'x$  et de section  $S$  est partagée jusqu'en  $x = 0$  en deux canalisations de section  $S/2$  dans lesquelles un même fluide de masse volumique  $\mu$  s'écoule avec des vitesses uniformes et stationnaires  $\vec{v}_1 = v_0 \vec{e}_x$  et  $\vec{v}_2 = v_0/2 \vec{e}_x$ . Les deux écoulements se rejoignent en  $x = 0$ . Suffisamment loin de  $x = 0$ , l'écoulement est uniforme et stationnaire de vitesse  $\vec{v}_3 = v_3 \vec{e}_x$ . On note  $P_0$  la valeur commune de la pression dans les écoulements (1) et (2) et  $P_3$  la pression dans l'écoulement (3).

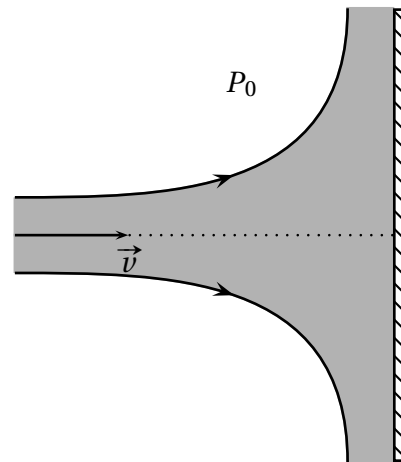


1. Quel phénomène physique est à l'origine de l'homogénéisation des vitesses dans la conduite (3) ?
2. En considérant un système fermé associé au système ouvert (S) constitué à l'instant  $t$  du fluide contenu entre une section d'entrée d'abscisse  $x_1 = x_2 < 0$  où l'écoulement est homogène et une section de sortie d'abscisse  $x_3 > 0$  où l'écoulement est homogène, établir les expressions de  $v_3$  et  $p_3$  en fonction de  $v_0$ ,  $P_0$  et  $\mu$ .
3. En faisant un bilan énergétique pour le même système fermé, établir l'expression de la puissance des forces intérieures. Commenter.

## 11 — Action d'un jet sur une plaque

Un jet d'eau, de section circulaire  $S$ , arrive en incidence normale sur une plaque fixe en forme de disque de rayon  $R$ . Le jet change de géométrie à l'impact avec la plaque : il possède une symétrie de révolution autour de l'axe indiqué en pointillés sur la figure. L'eau, de masse volumique  $\mu$ , à une vitesse  $\vec{v}$  uniforme dans toute section droite du jet située assez loin en amont du point d'impact. La pression ambiante est notée  $P_0$ . L'écou-

lement est supposé permanent dans le référentiel d'étude. La pesanteur est négligée et l'eau est considérée comme un fluide parfait.



Déterminer l'action exercée par le jet sur la plaque.

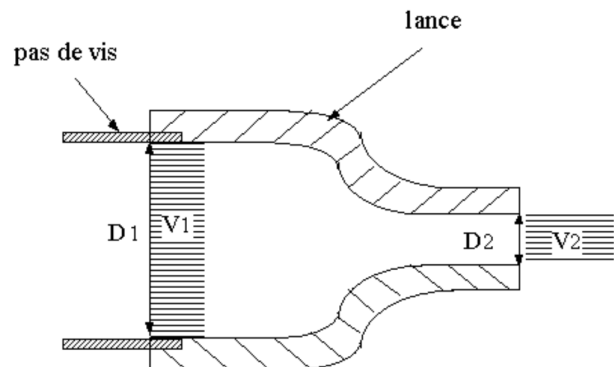
## 12 — Décollage d'une fusée

Une fusée a une masse  $m_0 = 200$  kg à vide. La masse initiale de carburant est  $m_c = 100$  kg. La vitesse d'éjection des gaz est  $u = 100$  m·s<sup>-1</sup> et le débit massique est noté  $Q$ .

1. Calculer la force de poussée exercée par les gaz sur la fusée.
2. Calculer la valeur théorique minimale de  $Q$  pour que la fusée décolle (la valeur réelle est  $1,2Q$ ).
3. Calculer la vitesse maximale atteinte par la fusée en fonction de  $m_0$ ,  $m_c$ ,  $Q$ ,  $g$  et  $u$ .

## 13 — Lance à incendie

L'embout d'une lance à incendie a un diamètre  $D_2 = 10$  cm. Il est vissé à un tube cylindrique de diamètre  $D_1 = 20$  cm. Quand l'embout est ouvert à l'air libre, la lance d'incendie débite  $Q$  de 40 litres d'eau par seconde.

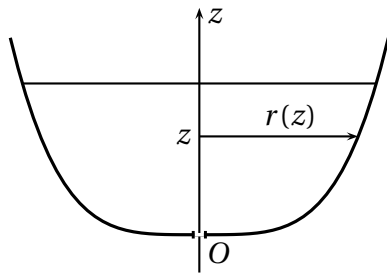


Calculer la force  $F$  à laquelle doit résister le pas de vis quand l'embout est ouvert. On négligera la pesanteur./

## 14 — Clepsydre

On s'intéresse à un clepsydre, à symétrie de révolution, le rayon à la cote  $z$  étant  $r(z)$ .

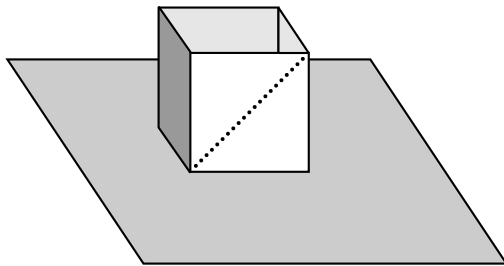
Il est ouvert à sa base par un orifice de rayon  $b$  très petit.



Le profil est de la forme  $r(z) = az^n$ , avec  $n = \frac{1}{4}$ . La hauteur du clepsydre est  $H = 10$  cm, et son rayon maximal  $R = 7$  cm. On donne  $b = 2$  mm. Combien de temps le clepsydre met-il à se vider ?

## 15 — Récipient percé

Un récipient carré de côté  $H$  est percé de petits trous régulièrement espacés selon sa diagonale :

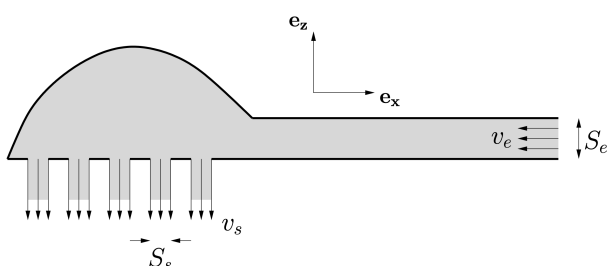


Déterminer le lieu des points d'impact des jets sur le support plan.

## 16 — Pommeau de douche

Un embout de douche est constitué d'un tuyau d'entrée de section  $S_e$  et de  $N$  trous de sortie ayant chacun une section  $S_s$  (cf. figure). Le fluide entre à la vitesse  $v_e$  et sort à la pression atmosphérique à la vitesse  $v_s$ , supposée identique dans chaque trou. On note  $Q$  le débit volumique et  $P_{atm}$  la pression atmosphérique.

On supposera le fluide incompressible.



1. Exprimer la vitesse de sortie  $v_s$  en fonction de la vitesse d'entrée  $v_e$ .
2. Exprimer la pression  $P_e$  à l'entrée en fonction de  $P_{atm}$  et  $v_e$ .
3. On note  $M_p$  la masse du pommeau. À partir de quel débit  $Q_c$  le pommeau de douche décolle-t-il ?

## 17 — Étude d'une éolienne

Depuis l'orientation des années 1970 vers les énergies nouvelles et renouvelables, le développement éolien est en plein expansion. Les éoliennes fournissent de l'énergie électrique d'appoint mais peuvent couvrir, sur certains territoires, notamment insulaires, l'ensemble de leur besoin électrique. Il existe différents type d'aérogénérateurs, classés selon la géométrie de leur rotor et de son orientation par rapport à la direction du vent. Nous nous intéresserons aux plus courants (qui sont les plus puissants), ceux dont le rotor est d'axe parallèle à la vitesse du vent. Cet axe sera noté  $(Ox)$ .

### Données

Masse volumique de l'air :  $\rho = 1,20 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

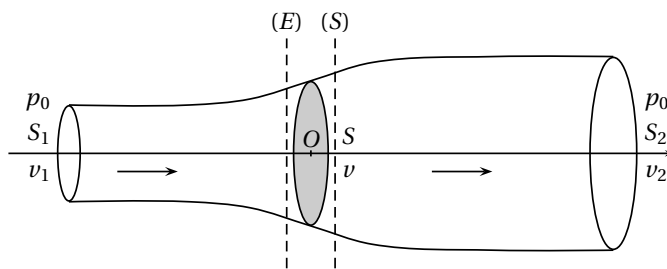
Viscosité dynamique de l'air :  $\eta = 1,85 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ .

### Conversion de puissance d'un aérogénérateur. Limite de Betz.

Nous souhaitons déterminer place puissance que le vent peut céder à un dispositif éolien, dans un cadre très simplifié et idéalisé reposant sur des hypothèses fortes? Nous supposons notamment que la vitesse de l'écoulement reste parallèle à l'axe  $(Ox)$ . Nous considérons encore que les champs de vitesse et de pression sont uniformes sur toute section droite du tube de courant (cf. figure). Enfin, nous considérons l'écoulement d'air comme étant parfait, stationnaire et incompressible. Les effets de la pesanteur ne sont jamais considérés.

La figure ?? représente la portion [1,2] du tube de courant traversant l'éolienne. Nous notons respectivement  $v_1$ ,  $v$  et  $v_2$  les vitesses loin en amont de l'éolienne, au niveau du rotor, et loin en aval de l'éolienne. Les sections correspondantes sont notées  $S_1$ ,  $S$  et  $S_2$ . Les plans  $(E)$  et  $(S)$  sont situés immédiatement en amont et en aval du rotor. Nous considérerons alors que  $S_E = S = S_S$  et  $v_E = v = v_S$  (les pressions  $p_E$  et  $p_S$  sont, *a priori*, différentes). La pression de l'air, au niveau des surfaces  $S_1$  et  $S_2$ , est la pression atmosphérique  $p_0$ .

Figure : veine d'air traversant le rotor de l'éolienne. La surface  $S$  grisée se situe au niveau des pales du rotor. Il s'agit de la surface offerte au passage du vent et sur laquelle s'appuie le tube de courant échangeant de la puissance avec le rotor.



1. Justifier la forme générale du tube de courant représenté sur la figure.

2. Exprimer le débit massique d'air  $q_m$  traversant l'éolienne.

### Détermination de la vitesse $v$ .

3. En effectuant un bilan de quantité de mouvement sur la portion  $[1,2]$  du tube de courant, établir l'expression de la force  $\vec{F}_{r/a}$  que le rotor exerce, globalement, sur l'écoulement d'air. Il sera utile d'y faire apparaître  $q_m$ .

4. En appliquant le théorème de Bernoulli entre les sections (1) et (E), puis entre les sections (S) et (2), exprimer les pressions  $p_E$  et  $p_S$  régnant au niveau des surfaces  $S_E$  et  $S_S$ .

5. Du résultat précédent, établir une nouvelle expression de  $\vec{F}_{r/a}$ .

6. En identifiant les deux expressions de la force  $\vec{F}_{r/a}$ , relier  $v$  à  $v_1$  et  $v_2$ .

### Puissance transférée de l'écoulement à l'éolienne et rendement de la conversion.

7. À partir d'un bilan d'énergie mécanique, effectué sur la portion  $[1,2]$  du tube de courant, déduire l'expression de la puissance  $\mathcal{P}$  cédée à l'éolienne par l'écoulement. On l'exprimera d'abord en fonction de  $\rho$ ,  $v_1$ ,  $S_1$ ,  $v_2$  et  $S_2$ , puis en fonction de  $q_m$ ,  $v_1$  et  $v_2$ .

8. Nous posons  $\mathcal{P}^* = (1/2)\rho S v_1^3$ . Attribuer une signification physique à cette grandeur.

9. Nous posons  $r = v_2/v_1$ . Établir alors que le rendement de la conversion d'énergie, relativement à  $\mathcal{P}^*$ , s'écrit

$$\eta^* = \frac{1}{2}(1+r)^2(1-r).$$

10. Illustrer graphiquement la dépendance de  $\eta^*$  avec  $r$ .

11. Interpréter ce tracé. Caractériser la situation optimale de fonctionnement, connue sous le nom de limite de Betz.

### Quelques remarques sur le cadre de l'étude.

12. Expliquer brièvement pourquoi supposer que le champ de vitesse de l'écoulement reste purement axial constitue une hypothèse forte.

13. Le théorème de Bernoulli est-il applicable entre les sections (E) et (S)? Réponse à argumenter.

14. Expliquer (brièvement) ce qui détermine, en pratique, le rapport  $r$ .